Διάλεξη 21: Κανονικοποίηση και Συναρτησιακές Εξαρτήσεις II

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:
Εισαγωγή στις έννοιες:

- Συναρτησιακές Εξαρτήσεις
- Κανόνες Συμπερασμού για Συναρτησιακές
- Ορισμοί Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (FD)

Διδάσκων: Παναγιώτης Ανδρέου

Περιεχόμενο Διάλεξης

- **Συναρτησιακές Εξαρτήσεις** (Functional Dependencies FD)

- **Κανόνες Συμπερασμού για Συναρτησιακές** Εξαρτήσεις(Inference Rules - IR)
  - Τα αξιώματα Armstrong
  - Αποδείξεις με χρήση γνωστών κανόνων

- **Ορισμοί Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (FD):**
  - Κλειστότητες F^+ και X^+ (Closure)
  - Ισοδυναμία $F^+=G^+$ (Equivalence)
  - Κάλυψη FD (Cover)
  - Ελάχιστη Κάλυψη FD (Minimal Cover)

Συναρτησιακές Εξαρτήσ. (Functional Dependencies)

- Στην προηγούμενη διάλεξη καλύψαμε με άτυπο τρόπο κάποιες γενικές **κατευθύνσεις** στο **σχεδιασμό** ενός **καλού σχεσιακού σχήματος**.
- Σε αυτή την διάλεξη θα μελετήσουμε την έννοια των **Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (Functional Dependencies, FD)**
- Με χρήση των FD θα μπορέσουμε να αποτιμήσουμε, στην ερχόμενη διάλεξη, με τυπικό τρόπο την **χρηστότητα (goodness)** ενός σχεσιακού σχήματος.
  - Οι Συναρτησιακές Εξαρτήσεις αποτελούν το βασικό υπόβαθρο στο Relational Design Theory

Παραδείγματα Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (FDs)

- Το **SSN** προσδιορίζει το όνομα του **Employee**.
  - SSN $\rightarrow$ ENAME
- Το **PNUMBER** προσδιορίζει το **Project Name** και **Location**
  - PNUMBER $\rightarrow$ {PNAME, PLOCATION}
- Το **SSN** και το **PNumber** προσδιορίζει τον αριθμό ορών που εργάζεται ένας employee σε ένα project.
  - {SSN, PNUMBER} $\rightarrow$ HOURS
- Φαινομενικά, το **αριστερό μέλος** ενός FDs είναι κάποιο πρωτεύων κλειδί. Στην πραγματικότητα, μπορεί να είναι οποιοδήποτε/α key ή non-key γνώρισμα/τα, π.χ.,
  - Credits → Status
  - CarModel $\rightarrow$ Manfacturer
  - NumberGrade $\rightarrow$ LetterGrade
  - *{Author, Title}* $\rightarrow$ *Publication Date*

- Τα **FDs** ορίζουν **εξαρτήσεις** μεταξύ γνωρισμάτων, οι οποίες προκύπτουν ρητά από τις προδιαγραφές, και οι οποίες μπορεί να οδηγούν σε **επανάληψη (redundancy)** δεδομένων.

Παραδείγματα Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (FDs)

- Η συναρτησιακή εξάρτηση **TOWN** $\rightarrow$ **ZIP** στο ακόλουθο σχήμα προκαλεί την επανάληψη πληροφορίας (redundancy)
  - Π.χ., θεωρώντας ότι οι διευθύνσεις στην ίδια περιοχή έχουν το ίδιο ταχυδρομικό κώδικα (zip)

SSN	*Name*	*Town*	*Zip*
1234	Joe	Stony Brook	11790
4321	Mary	Stony Brook	11790
5454	Tom	Stony Brook	11790
	……………………		

Redundancy

- Κατ' επέκταση, η πιο πάνω **επανάληψη** οδηγεί σε ανωμαλίες **εισαγωγών**, **διαγραφών** και **ενημερώσεων** για αυτό η επανάληψη δεδομένων πρέπει να **ελαχιστοποιηθεί**!

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις FDs

- Μια **Συναρτησιακή Εξάρτηση** είναι ένας **περιορισμός** μεταξύ δυο **ομάδων γνωρισμάτων** μιας βάσης δεδομένων.
  - Κάντε την παραδοχή ότι όλα τα γνωρίσματα μιας βάσης αποθηκεύονται σε ένα καθολικό πίνακα $\mathbf{R(A_1, A_2,\ldots, A_n)}$
- Έστω ότι $\mathbf{R=(A_1, A_2,\ldots, A_n)}$ και ότι $\mathbf{X \subseteq R}$ και $\mathbf{Y \subseteq R}$, τότε η Συναρτησιακή Εξάρτηση $\mathbf{X \rightarrow Y}$, υποδηλώνει ότι μια ανάθεση τιμών στο σύνολο X προσδιορίζει μοναδικά το σύνολο Y.
  - Δηλαδή, εάν **t1[X]=t2[X],** *τότε* **t1[Y]=t2[Y]**
  - Επομένως είναι μια γενίκευση της έννοιας του κλειδιού.
- Θα **αναφερόμαστε** στα FDs ως ακολούθως:
  - Το **X προσδιορίζει** συναρτησιακά το **Y**
  - Το **Y** είναι συναρτησιακά **εξαρτώμενο** από το **X**

Χαρακτηριστικά FDs

- Τα **FDs** είναι ένας επιπλέον **μηχανισμός χαρακτηρισμού** των περιορισμών αναφορικής ακεραιότητας (IC) μεταξύ **γνωρισμάτων** μιας σχέσης
  - Ωστόσο τα FDs **ΔΕΝ** δηλώνονται ρητά σε μια βάση, **απλά** χρησιμοποιούνται ως **εργαλείο** για **Εκλέπτυνση** του Σχήματος κατά την φάση της σχεδίασης.
- Για τα FDs υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:
  - **A) ΙΣΧΥΕΙ για ΚΑΘΕ στιγμιότυπο βάσης.** π.χ., SSN $\rightarrow$ Teacher (γενικά όλα τα FDs με αριστερό μέλος KEY ισχύουν ΠΑΝΤΑ.)
  - **B) ΜΠΟΡΕΙ να Ισχύει (σε ΚΑΠΟΙΟ στιγμιότυπο βάσης:** π.χ., στο πιο κάτω στιγμιότυπο τυγχάνει να ισχύει το TEXT $\rightarrow$ COURSE
  - **C) ΔΕΝ Ισχύει σε ΚΑΠΟΙΟ στιγμιότυπο βάσης:** Αρκεί να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα π.χ., πιο κάτω TEACHER -/$\rightarrow$ COURSE.

TEACH

Teacher	Course	Text
Smith	Data Structures	Bartram
Smith	Data Management	Martin
Hall	Compilers	Hoffman
Brown	Data Structures	Horowitz

Παραδείγματα FDs

- Βρείτε ποια FDs **ισχύουν** στο ακόλουθο στιγμιότυπο βάσης (ή ποια **ΜΠΟΡΕΙ να ισχύουν** στην ακόλουθη βάση)

	A	B	C	D
1)	a1	b1	c1	d1
2)	a1	b2	c1	d2
3)	a2	b2	c2	d2
4)	a2	b2	c2	d3
5)	a3	b3	c2	d4

- $A \rightarrow C$; **YES (Maybe)**
- $C \rightarrow A$; **NO (line 5)**
- $B \rightarrow C$; **NO (line 3)**
- $D \rightarrow B$; **YES(Maybe)**
- $AB \rightarrow D$; **NO (line 4)**

Κανόνες Συμπερασμού για FDs

- **Κανόνες Συμπερασμού για FDs (Inference Rules, IR)**
- Με βάση ένα σύνολο FDs **F και τους κανόνες του Armstrong**, μπορούμε να **συμπεράνουμε (infer)** επιπλέον FDs τα οποία ισχύουν όποτε ισχύει το **F**.
  - Π.χ., Από το FD={SSN $\rightarrow$ Dno, Dno->Dname} μπορούμε να συμπεράνουμε, με τους κανόνες Armstrong, ότι SSN $\rightarrow$ Dname.

- **Οι Κανόνες Συμπερασμού (IR) Armstrong :**
  - **IR1** (**Ανακλαστικός, Reflexive): Εάν X $\supseteq$ Y τότε X $\rightarrow$ Y**
    - π.χ., Εάν **{ssn,name}$\supseteq$name** τότε {**ssn,name**} $\rightarrow$ **name**
    - Είναι τετριμμένος κανόνας.
  - **IR2** (**Επαυξητικός, Augmentation**): **Εάν X$\rightarrow$Y τότε XZ$\rightarrow$YZ**
    - π.χ., Εάν **ssn$\rightarrow$name** τότε **{ssn,age}** $\rightarrow$ **{name,age}**
    - * Το **XZ** σημαίνει **X U Z**, επίσης Εάν **X$\rightarrow$Y** τότε **XZ$\rightarrow$Y**
  - **IR3 (Μεταβατικός, Transitive**) **Εάν X$\rightarrow$Y και Y$\rightarrow$Z τότε X$\rightarrow$Z**
    - π.χ., Εάν **ssn$\rightarrow$Dno** και **Dno$\rightarrow$Dname** τότε **ssn$\rightarrow$Dname**

Κανόνες Συμπερασμού για FDs

- Οι κανόνες Armstrong (IR1, IR2, IR3) είναι **βάσιμοι (sound)** και **πλήρεις (complete).**
  - **Βάσιμοι (Sound):** Δηλαδή είναι ορθοί για κάθε στιγμιότυπο εισόδου (δείτε αποδείξεις ορθότητας στο βιβλίο)
  - **Πλήρεις (Complete):** Με βάσει αυτούς μπορούμε να συνάγουμε ΟΛΟΥΣ τους άλλους κανόνες που μπορεί να συναχθούν.

- Στην επόμενη διαφάνεια δείχνουμε μερικούς άλλους Κανόνες IR, τους οποίους μπορούμε να συνάγουμε από τα αξιώματα Armstrong

Κανόνες Συμπερασμού για FDs

Κανόνες που Συνάγονται από τα Αξιώματα Armstrong

- **IR4 Διάσπαση (Decomposition):**

  Εάν **X → YZ** τότε **X → Y** και **X → Z**

  π.χ., Εάν **ssn→{name, age}** τότε **ssn→name** και **ssn → age**

  Προσοχή: Μόνο το δεξί μέλος διασπάται όχι το αριστερό

  π.χ., Εάν {ssn,name}→age ΔΕΝ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ότι **name→age**

- **IR5 Ένωση (Union), [Αντίθετο της διάσπασης]:**

  Εάν **X → Y** και **X → Z**, τότε **X → YZ**

  π.χ., Εάν **ssn->name** και **ssn->age** τότε **ssn->{name,age}**

  Προσοχή: X → A και Y → B ΔΕΝ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ότι XY→AB

- **IR6 Ψευδομετάβαση (Pseudotransitivity):**

  Εάν **X → Y** και **WY → Z**, τότε **WX → Z**

  π.χ., Εάν **isbn→title** και {**author, title**}→**pubdate** τότε {**author, isbn**}→**pubdate**

Αποδείξεις IR4-IR6

- Οι κανόνες συμπερασμού **IR1-IR3** αποδεικνύονται με **μαθηματικές αποδείξεις** (δείτε βιβλίο) ενώ οι **κανόνες IR4-IR6** και άλλες ασκήσεις με τη **χρήση** των **IR1-IR3**.

- **Απόδειξη IR4 (Διάσπαση): Εάν $X \rightarrow YZ \models X \rightarrow Y \wedge X \rightarrow Z$**
  1) **X**→YZ (δεδομένο)
  2) YZ→**Y** (IR1:ανακλαστική, το YZ⊇Y), αντίστοιχα και YZ→Z από YZ⊇Z
  3) X→**Y** (IR3:μετάβαση 1-2), αντίστοιχα με (2) YZ→Z και (1) έχουμε X→Z

- **Απόδειξη IR5 (Ένωση): $(X \rightarrow Y \wedge X \rightarrow Z) \models X \rightarrow YZ$**
  1) **X**→Y (δεδομένο)
  2) X→Z (δεδομένο)
  3) XX →**XY** (IR2:επαύξηση 1 με X)
  4) X→**XY** (απλοποίηση 3, XX = X)
  5) **XY**→YZ (IR2:επαύξηση 2 με Y)
  6) **X**→**YZ** (IR3: μετάβαση 4-5)

- **Απόδειξη IR6 (Ψευδομετάβαση):** $X \rightarrow Y \wedge WY \rightarrow Z \models WX \rightarrow Z$
  1) X→Y (δεδομένο)
  2) WY→**Z** (δεδομένο)
  3) **WX**→WY (IR2:επαύξηση 1 με W)
  4) **WX**→**Z** (IR3: μετάβαση 2-3)

Κλειστότητες F^+ και X^+

- **F^+: Κλειστότητα Συνόλου FD F:** Το σύνολο όλων των συναρτησιακών εξαρτήσεων που προσδιορίζεται από το F (με επαναληπτική εφαρμογή των κανόνων IR1-IR6)
  - π.χ., Εάν **F={A→B, B→C}** τότε **F^+={A→B, B→C, A→C}**

- **X^+: Κλειστότητα Γνωρίσματος X:** Το σύνολο όλων των γνωρισμάτων που εξαρτώνται συναρτησιακά από το X
  - π.χ., Εάν F=**{A→B, B→C}** τότε **A^+={A,B,C}**, **B^+={B,C}** και **C^+={C}**
  - **X^+** είναι χρήσιμο εάν θέλουμε να βρούμε κατά πόσο μια FD **X→Y** ανήκει σε κάποιο **F^+** (π.χ., βρες εάν το A→C είναι στο F^+
  - **C** ∈ **A^+**, άρα είναι!
  - Εάν το **X^+** περιέχει όλα τα γνωρίσματα μιας σχέσης τότε το **X** είναι Candidate Key.

Αλγόριθμος Υπολογισμού του X^+:

$F=\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$

Αλγόριθμος Υπολογισμού του X^+:

1) $X^+ := X$
2) repeat
3) old_X^+ := X^+
4) for each FD **$Y \rightarrow Z$** in **F** do
5) if $Y \subseteq X^+$ then $X^+ := X^+ \cup Z$
6) until (old_X^+ == X^+)

Step-by-Step Execution:

1) $A^+ := \{A\}$
3) old_$A^+ := \{A\}$
4-5) $A \subseteq A^+$, so $A^+ := \{A,B\}$
4-5) $B \subseteq A^+$, so $A^+ := \{A,B,C\}$
…(after next iteration)…
6) Now $A^+ ==$ old_A^+ so quit

Παράδειγμα Υπολογισμού του X^+

F= { SSN $\rightarrow$ Ename,

Pnumber $\rightarrow$ {Pname, Plocation}

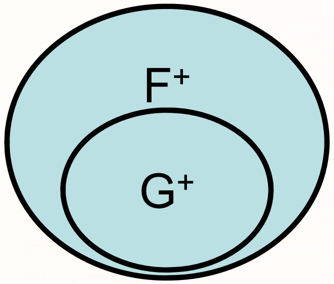
{Ssn, Pnumber} $\rightarrow$ Hours }

1) $\{Ssn\}^+$={Ssn, Ename}
2) $\{Pnumber\}^+$ = {Pnumber, Pname, Plocation}
3) $\{Ssn, Pnumber\}^+$ = {Ssn, Pnumber, Ename, Pname, Plocation, Hours}

➔ Το {Ssn, Pnumber} είναι **candidate key**!

Ισοδυναμία Συνόλου FDs $F^+=G^+$

- **Κάλυψη FDs (Cover):** Ένα σύνολο FD **F**, καλύπτει ένα άλλο σύνολο **G** εάν $\mathbf{G^+ \subseteq F^+}$



- Εναλλακτικά, το **F** καλύπτει το **G** εάν:
  - Κάθε FD του **G** μπορεί να συμπεραθεί από το **F**.
  - π.χ., $\{SSN\}^+=\{SSN, NumGrade, LetterGrade\}$

    Το FD SSN→LetterGrade καλύπτεται από το SSN→**all**
- **Ισοδυναμία FDs (Equivalence):** Δυο σύνολα FDs **F** και **G** είναι ισοδύναμα εάν **το** $\mathbf{F^+=G^+}$
- Εναλλακτικά, τα **F** και **G** είναι **ισοδύναμα** εάν:
  - **ΚΆΘΕ** FD του **F** μπορεί να **συμπεραθεί** από το **G** και
  - **ΚΆΘΕ** FD του **G** μπορεί να **συμπεραθεί** από το **F**
- Συνεπώς, τα **F** και **G** είναι **ισοδύναμα** εάν:
  - Το **F καλύπτει** το **G** και το **G καλύπτει** το F.

Παράδειγμα Κάλυψης

Σας δίνεται το σύνολο Συναρτησιακών Εξαρτήσεων F.
Βρείτε εάν τα $AB \rightarrow E$ και $D \rightarrow C$ *καλύπτονται από το* F

F: $A \rightarrow D$
$AB \rightarrow C$
$D \rightarrow E$
$AC \rightarrow B$

X	X^+
A	$\{A, D, E\}$
AB	$\{A, B, C, D, E\}$ (Επομένως *AB* είναι κλειδί)
B	$\{B\}$
D	$\{D, E\}$

Καλύπτεται το $AB \rightarrow E$ από το ***F***;
ΝΑΙ, επειδή το $E \in \{AB\}^+$.
Καλύπτεται το $D \rightarrow C$ από το ***F***;
ΟΧΙ, επειδή το $C \notin D^+$.

Συμπέρασμα: Το X^+ μας επιτρέπει να βρίσκουμε εάν η συναρτησιακή εξάρτηση της μορφής $X \rightarrow Y$ καλύπτεται από το σύνολο FDs ***F***.

Παράδειγμα Απόδειξης Ισοδυναμίας

Αποδείξτε ότι τα σύνολα FDs F και G είναι ισοδύναμα

F= { SSN $\rightarrow$ Ename, Pnumber $\rightarrow$ {Pname, Plocation}, {Ssn, Pnumber} $\rightarrow$ Hours }

G= { SSN $\rightarrow$ Ename, Pnumber $\rightarrow$ {Pname, Plocation}, {Ssn, Pnumber} $\rightarrow$ Ename,Pname, Plocation, Hours }

Πρέπει να αποδείξουμε τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις:

a) Κάθε FD του <u>G</u> καλύπτεται από το <u>F</u> (δηλ., $G^+ \subseteq F^+$)

Τα πρώτα δυο FDs των συνόλων είναι τα ίδια. Για το τρίτο FD , υπολογίζουμε το **{Ssn, Pnumber}+** (στο F) το οποίο είναι **{Ssn, Pnumber, Ename, Pname, Plocation, Hours}**

Το **{Ssn, Pnumber}+** (του F) **καλύπτει** τον τρίτο κανόνα του **G** εφόσον περιέχει όλα τα γνωρίσματα στο δεξί του μέλος (δηλ., **Ename, Pname, Plocation, Hours**)

β) Κάθε FD του <u>F</u> καλύπτεται από το <u>G</u> (δηλ., $F^+ \subseteq G^+$)

Αντίστοιχα με το (a) βρίσκουμε ότι ο τρίτος κανόνας του **F** καλύπτεται από το $\{Ssn, Pnumber\}^+$ του **G**.

Εφόσον το G καλύπτει το F και αντίστροφα, τα FDs είναι ισοδύναμα.

Ελάχιστη Κάλυψη FDs F_{min}

- Η **Ελάχιστη Κάλυψη F_{min} (Minimal Cover)** ενός συνόλου εξαρτήσεων **F**, είναι iii) ένας **Ελάχιστος αριθμός FDs**, i) σε **Κανονική Μορφή**, και ii) **Απλουστευμένη Μορφή**

I. **Κανονική Μορφή :** Κάθε εξάρτηση $\mathbf{X \rightarrow \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}}$ μετατρέπεται με IR4 (διάσπαση) σε $\mathbf{X \rightarrow A_1, X \rightarrow A_2, \ldots, X \rightarrow A_n}$
   - *π.χ., SSN→{Name, Age}* ***σε*** *SSN→Name και SSN→Age.*

II. **Απλουστευμένη Μορφή:** Το αριστερό μέλος κάθε δυνατής εξάρτησης $\mathbf{\{B_1, B_2, \ldots B_n\} \rightarrow X}$ μετατρέπεται σε απλούστερη μορφή, π.χ., $\mathbf{\{B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}\} \rightarrow X}$ **ισοδύναμη με την αρχική**
   - *π.χ., {SSN, Name}→Age* ***σε*** *SSN→Age*

III. **Ελάχιστος Αριθμός:** Οι περιττές εξαρτήσεις εξαλείφονται. Δηλαδή η X→A εξαλείφεται εάν $\mathbf{\{F - \{X \rightarrow A\}\}^+ = F^+}$

- Ο Αλγόριθμος 15.1 (Minimal Cover) στο βιβλίο, εφαρμόζει τα πιο πάνω τρία βήματα σε ένα σύνολο **F** για προσδιορισμό του $\mathbf{F_{min}}$

Παράδειγμα Ελάχιστης Κάλυψης

- **Παράδειγμα:** Βρείτε την ελάχιστη κάλυψη του συνόλου Συναρτησιακών Εξαρτήσεων E : {B → A, D → A, AB → D};
- **Λύση**
  - **Βήμα I (Κανονική Μορφή):** Όλες οι FD είναι ήδη σε κανονική μορφή $\mathbf{X \rightarrow A_1, X \rightarrow A_2, \ldots, X \rightarrow A_n}$ άρα δεν κάνουμε κάτι επιπλέον.
  - **Βήμα II (Απλουστευμένη Μορφή):** Η μόνη FD που έχει πάνω από 1 γνώρισμα στο αριστερό μέλος είναι η **AB→D.** Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι το **E** είναι ισοδύναμο **είτε** με το E’: {B → A, D → A, **B→D**} **ή** E’’: {B → A, D → A, **A→D}.** Εμείς θα δείξουμε ότι **E=E’.**

    1. Μπορεί από το **B→D** να προκύψει το **AB→D (το καλύπτει);**

       ➔ Αυτό ισχύει τετριμμένα λόγω της IR2 (επαυξητικής)

    2. Μπορεί από το **AB→D** να προκύψει το **B→D (το καλύπτει);**

       ➔ Με βάση το E={B → A, D → A, AB → D}, προκύπτει ότι B^+={B, A, D} το οποίο σημαίνει ότι το **B→D** καλύπτεται από το B^+ και κατ’ επέκταση από το E.

Παράδειγμα Ελάχιστης Κάλυψης (συν.)

- **Λύση (συνέχεια)**
  - **Βήμα II:** E': {B→A, D→A, B→D}
  - **Βήμα III (Ελάχιστος Αριθμός):**

    Τώρα θα επιχειρήσουμε να βρούμε τις **περιττές (redundant)** FDs (αυτές που μπορούν να φύγουν χωρίς να αλλάξει η κλειστότητα E'^{+})

    A) Διαγραφή του B→A από το E': Το **B→A** μπορεί να εξαχθεί από τα **B→D** και **D→A** (μέσω μεταβατικής) συνεπώς είναι περιττό.

  ➔ **Ενδιάμεσο Αποτέλεσμα: E': {D→A, B→D}**

    B) Διαγραφή του D→A από το E': Το **D→A** δεν μπορεί να εξαχθεί από το **B→D**, άρα δεν μπορεί να διαγραφεί

    Γ) Διαγραφή του B→D από το E' : Το **B→D** δεν μπορεί να εξαχθεί από το **D→A**, άρα δεν μπορεί να διαγραφεί

Επομένως η ελάχιστη κάλυψη του E είναι {D→A, B→D}

Ελάχιστο Σύνολο FDs

- Κάθε σύνολο από FDs έχει **ένα** ή **περισσότερα ελάχιστα σύνολα** (ανάλογα με ποια σειρά επιλέγουμε να κάνουμε την εκτέλεση)
  - **Π.χ., F_{MIN}(E'): {*D→A*, B→D} και F_{MIN}(E''): {*B → A*, *D → A*, A→D}** στο προηγούμενο παράδειγμα.
- Σημειώστε, ότι τα σύνολα αυτά έχουν **διαφορετικό μέγεθος** λόγω της **διαφορετικής σειράς** απλοποίησης που χρησιμοποιήθηκε.
- Επομένως, ένα σύνολο **ονομάζεται Ελάχιστο** ΟΧΙ επειδή περιέχει τον **μικρότερο αριθμό** από FDs αλλά επειδή **ΔΕΝ** μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω.