



Διάλεξη 36: Φροντιστήριο για Γράφους II

Διδάσκων: Παναγιώτης Ανδρέου

Βραχύτερα Μονοπάτια σε Γράφους

- Με δεδομένο ένα κατευθυνόμενο γράφο με βάρη $G=(V,E)$, θέλουμε να βρούμε τα μονοπάτια με το ελάχιστο δυνατό βάρος από κάποιο κόμβο A προς οποιονδήποτε κόμβο X .
- **Ορισμός: Βραχύτερο μονοπάτι** μεταξύ ενός συνόλου από μονοπάτια είναι το μονοπάτι με το ελάχιστο βάρος.
- Υπενθύμιση: Το βάρος $w(p)$ ενός μονοπατιού p δίνεται ως εξής:

$$\begin{array}{l} \text{Αν } p = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \\ \text{τότε } w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i) \end{array}$$

- Σε αυτή την διάλεξη θα δούμε ακόμα ένα άπληστο αλγόριθμο (greedy algorithm) του Δανού **Edsger Dijkstra** (1930-2002) για την επίλυση αυτού του προβλήματος.
- Ένας τέτοιος αλγόριθμος έχει πολλές εφαρμογές (π.χ. εύρεση μικρότερης διαδρομής σε ένα οδικό δίκτυο, σε δίκτυα υπολογιστών κτλ).

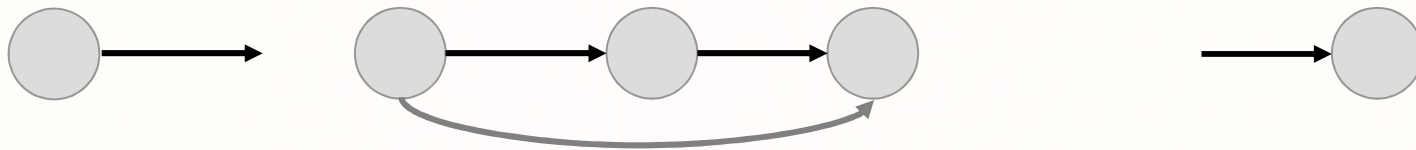
Η δομή της βέλτιστης λύσης

- **Λήμμα 1**

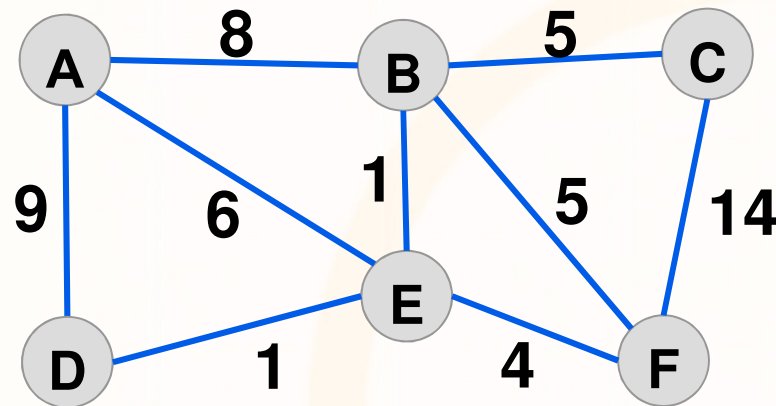
Έστω κατευθυνόμενος γράφος με βάρη $G=(V,E)$ και έστω

$$p = u \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v$$

- το βραχύτερο μονοπάτι μεταξύ των κόμβων u και v .
Τότε κάθε υπο-μονοπάτι του p είναι βραχύτερο.

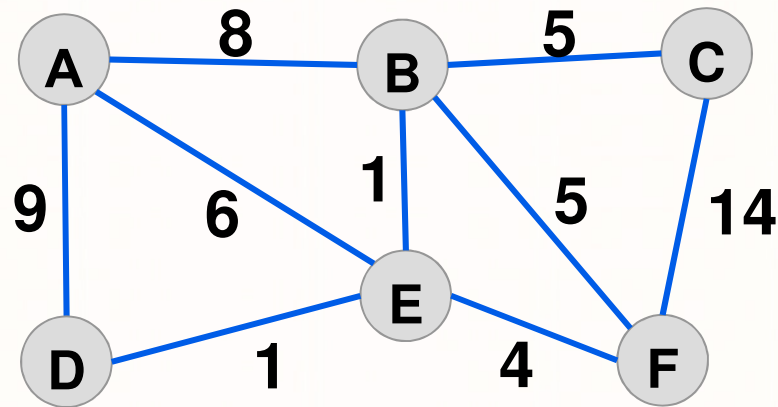


- Ας δούμε την λογική πίσω από το Λήμμα.



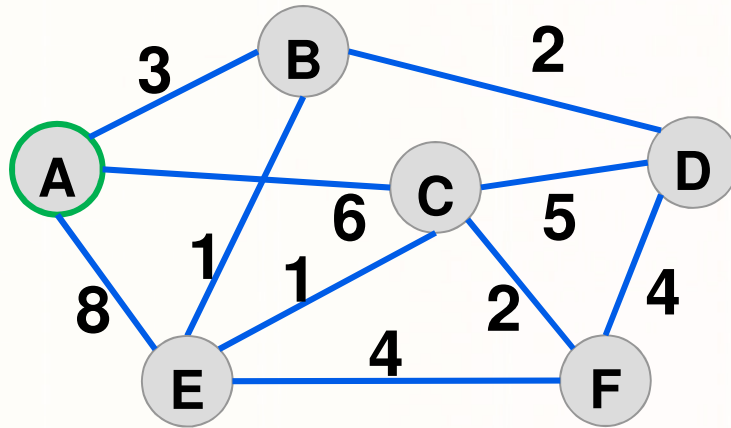
Ανασκόπηση του Αλγόριθμου Dijkstra


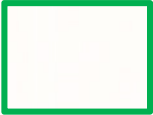

- Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το/α βραχύτερα μονοπάτια από κάποιο κόμβο **A** προς όλους τους υπόλοιπους κόμβους σε κάποιο γράφο **G(V,E)**



1. Ποιο είναι το κόστος του βραχύτερου μονοπατιού από **D** προς **C**;
 2. Ποιο είναι το ακριβές μονοπάτι;
- Ο αλγόριθμος του Dijkstra είναι ένας **single source shortest path algorithm** (δηλαδή αναφέρεται συγκεκριμένα σε μια κορυφή εκκίνησης) για γράφους με **μη-αρνητικά βάρη**.

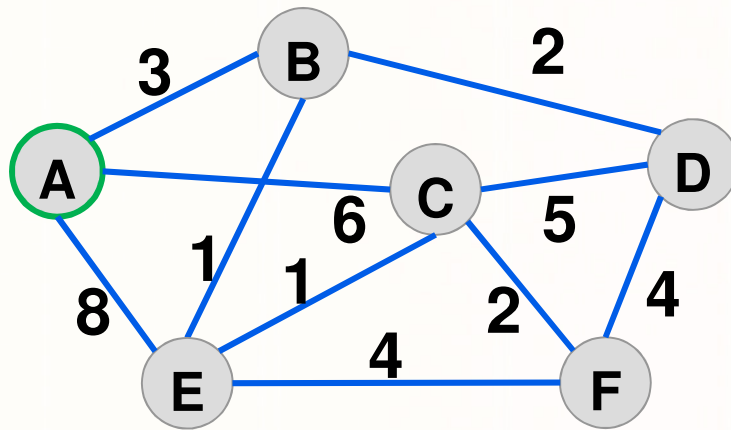
Αλγόριθμος Dijkstra για εύρεση Βραχ. Μονοπατιού



-  Κορυφές που έχουμε επισκεφθεί (visited=1)
-  Επιλογή της ελάχιστης απόστασης
-  Μείωση από την προηγούμενη απόσταση

Εκτέλεση	S	d(A)	d(B)	d(C)	d(D)	d(E)	d(F)
1	\emptyset	0,-	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$

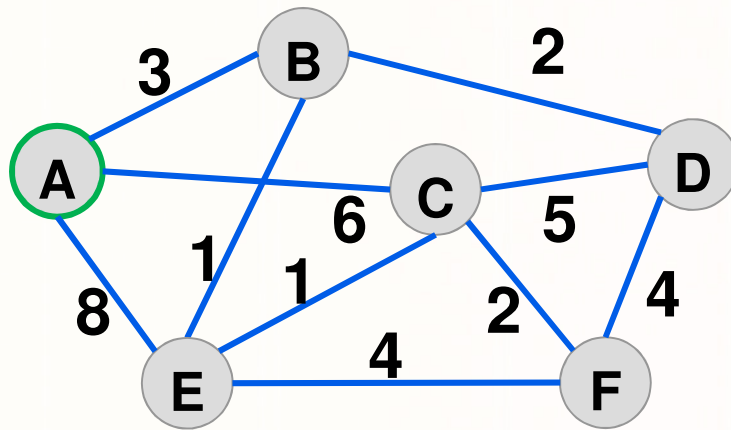
Αλγόριθμος Dijkstra για εύρεση Βραχ. Μονοπατιού



- Κορυφές που έχουμε επισκεφθεί (visited=1)
- Επιλογή της ελάχιστης απόστασης
- X Μείωση από την προηγούμενη απόσταση

Εκτέλεση	S	d(A)	d(B)	d(C)	d(D)	d(E)	d(F)
1	\emptyset	0,-	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$
2	{A}	0,-	3,A	6,A	$\infty,-$	8,A	∞

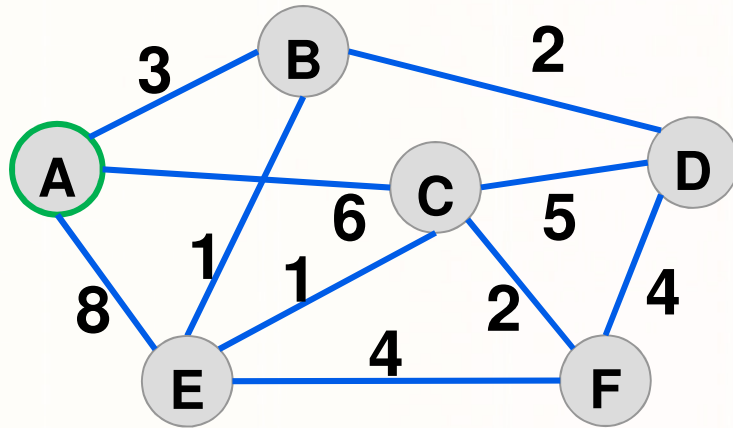
Αλγόριθμος Dijkstra για εύρεση Βραχ. Μονοπατιού



- Κορυφές που έχουμε επισκεφθεί (visited=1)
- Επιλογή της ελάχιστης απόστασης
- X Μείωση από την προηγούμενη απόσταση

Εκτέλεση	S	d(A)	d(B)	d(C)	d(D)	d(E)	d(F)
1	\emptyset	0,-	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$
2	{A}	0,-	3,A	6,A	$\infty,-$	8,A	∞
3	{A,B}	0,-	3,A	6,A	5,B	4,B	$\infty,-$

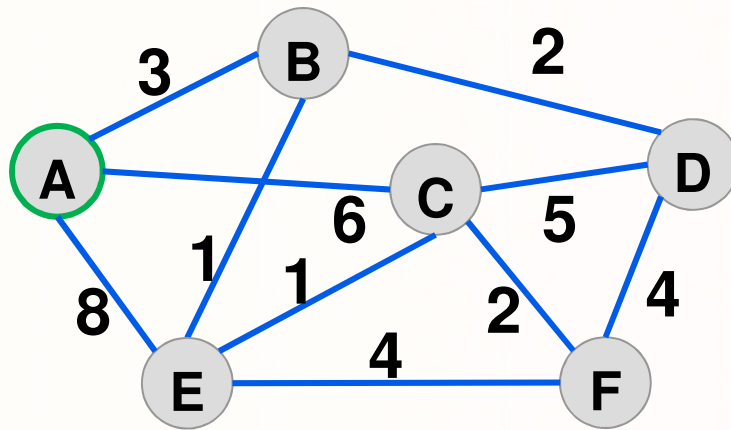
Αλγόριθμος Dijkstra για εύρεση Βραχ. Μονοπατιού



- Κορυφές που έχουμε επισκεφθεί (visited=1)
- Επιλογή της ελάχιστης απόστασης
- X Μείωση από την προηγούμενη απόσταση

Εκτέλεση	S	d(A)	d(B)	d(C)	d(D)	d(E)	d(F)
1	\emptyset	0,-	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$
2	{A}	0,-	3,A	6,A	$\infty,-$	8,A	∞
3	{A,B}	0,-	3,A	6,A	5,B	4,B	$\infty,-$
4	{A,B,E}	0,-	3,A	5,E	5,B	4,B	8,E

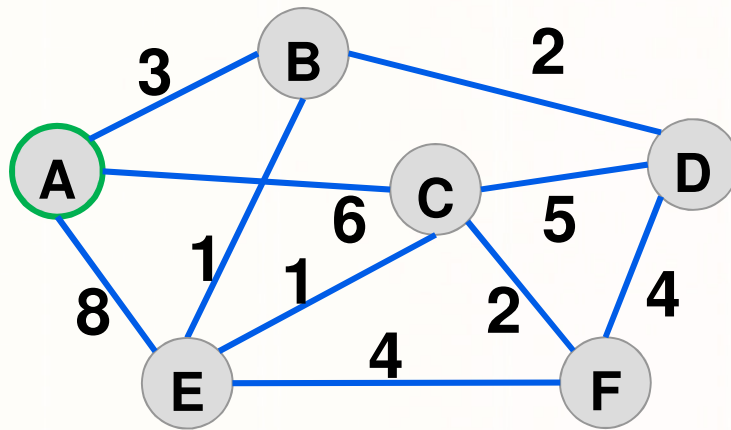
Αλγόριθμος Dijkstra για εύρεση Βραχ. Μονοπατιού



- Κορυφές που έχουμε επισκεφθεί (visited=1)
- Επιλογή της ελάχιστης απόστασης
- X Μείωση από την προηγούμενη απόσταση

Εκτέλεση	S	d(A)	d(B)	d(C)	d(D)	d(E)	d(F)
1	\emptyset	0,-	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$
2	{A}	0,-	3,A	6,A	$\infty,-$	8,A	∞
3	{A,B}	0,-	3,A	6,A	5,B	4,B	$\infty,-$
4	{A,B,E}	0,-	3,A	5,E	5,B	4,B	8,E
5	{A,B,E,D}	0,-	3,A	5,E	5,B	4,B	7,C

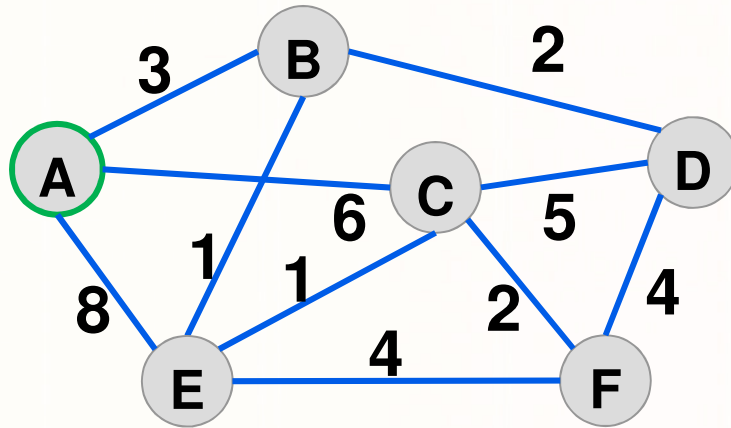
Αλγόριθμος Dijkstra για εύρεση Βραχ. Μονοπατιού



- Κορυφές που έχουμε επισκεφθεί (visited=1)
- Επιλογή της ελάχιστης απόστασης
- X Μείωση από την προηγούμενη απόσταση

Εκτέλεση	S	d(A)	d(B)	d(C)	d(D)	d(E)	d(F)
1	\emptyset	0,-	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$
2	{A}	0,-	3,A	6,A	$\infty,-$	8,A	∞
3	{A,B}	0,-	3,A	6,A	5,B	4,B	$\infty,-$
4	{A,B,E}	0,-	3,A	5,E	5,B	4,B	8,E
5	{A,B,E,D}	0,-	3,A	5,E	5,B	4,B	7,C
6	{A,B,E,D,C}	0,-	3,A	5,E	5,B	4,B	7,C

Αλγόριθμος Dijkstra για εύρεση Βραχ. Μονοπατιού



- Κορυφές που έχουμε επισκεφθεί (visited=1)
- Επιλογή της ελάχιστης απόστασης
- X Μείωση από την προηγούμενη απόσταση

Εκτέλεση	S	d(A)	d(B)	d(C)	d(D)	d(E)	d(F)
1	\emptyset	0,-	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$	$\infty,-$
2	{A}	0,-	3,A	6,A	$\infty,-$	8,A	∞
3	{A,B}	0,-	3,A	6,A	5,B	4,B	$\infty,-$
4	{A,B,E}	0,-	3,A	5,E	5,B	4,B	8,E
5	{A,B,E,D}	0,-	3,A	5,E	5,B	4,B	7,C
6	{A,B,E,D,C}	0,-	3,A	5,E	5,B	4,B	7,C
7	{A,B,E,D,C,F}	0,-	3,A	5,E	5,B	4,B	7,C