



Διάλεξη 33: Φροντιστήριο για Γράφους I

Διδάσκων: Παναγιώτης Ανδρέου

Αλγόριθμος για Τοπολογική Ταξινόμηση

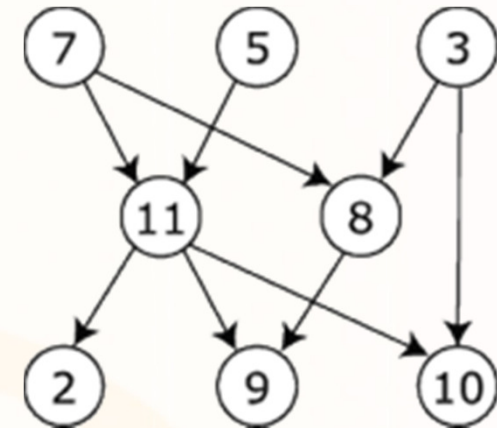
- **Βαθμός εισόδου (in-degree):** ενός κόμβου είναι ο αριθμός των ακμών που καταλήγουν στον κόμβο. (Στο πρόβλημα μας, ο αριθμός των προαπαιτούμενων εργασιών)
- Για κάθε κορυφή u έστω $I[u]$ ο βαθμός εισόδου (αριθμός γονέων) της u .

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Επαναλαμβάνουμε τα εξής βήματα:

1. διαλέγουμε κορυφή A με $I[A]=0$,
2. τυπώνουμε την A ,
3. για όλες τις κορυφές B , όπου υπάρχει η ακμή (A,B) μειώνουμε την τιμή $I[B]$ κατά 1.

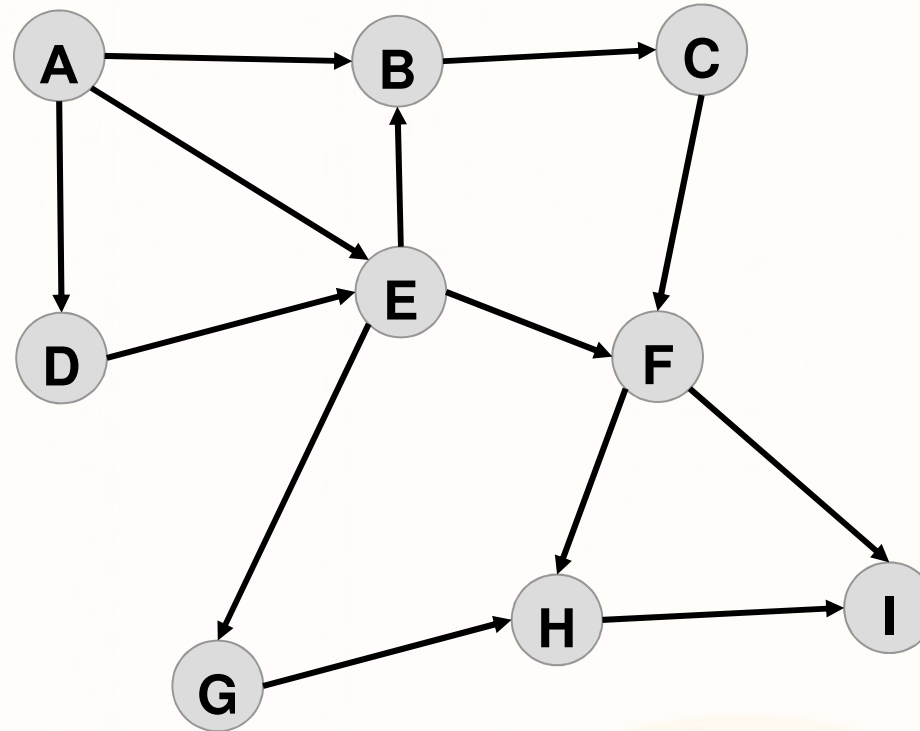
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ(Υπάρχουν αρκετές τοπολογικές ταξινομήσεις)

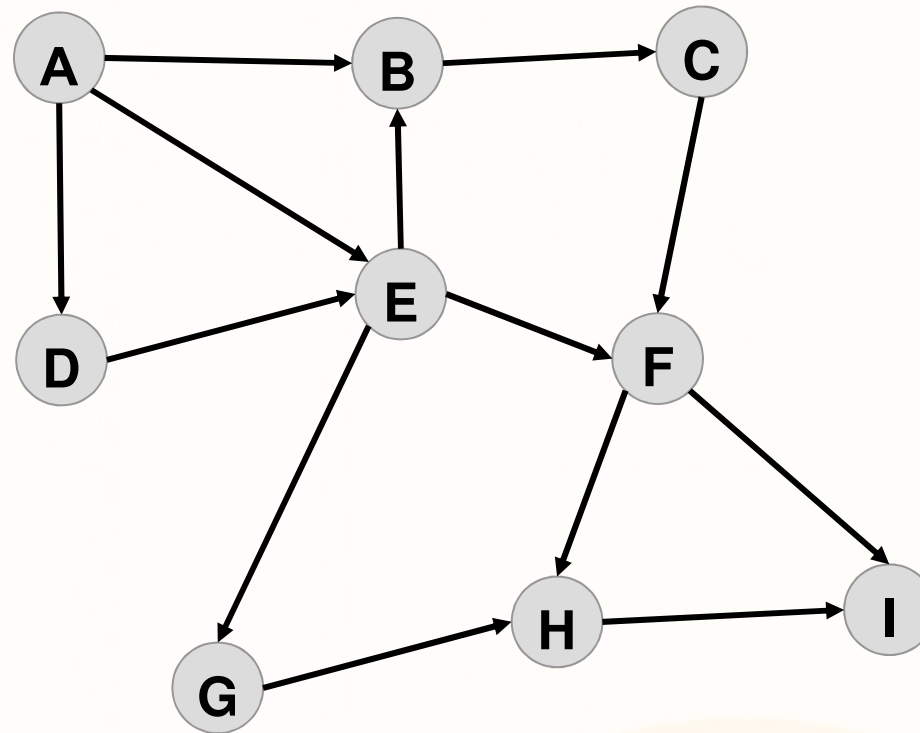
- **7,5,3,11,8,2,9,10**
- **7,5,11,2,3,10,8,9**
-

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



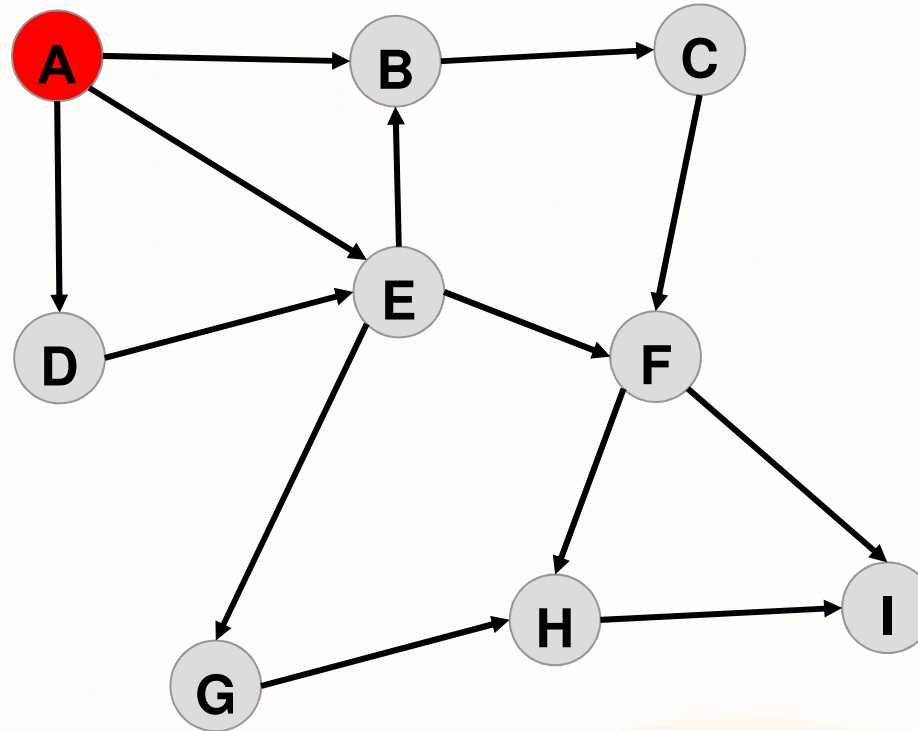
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	0	0	0	0	0	0	0	0
print:									

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



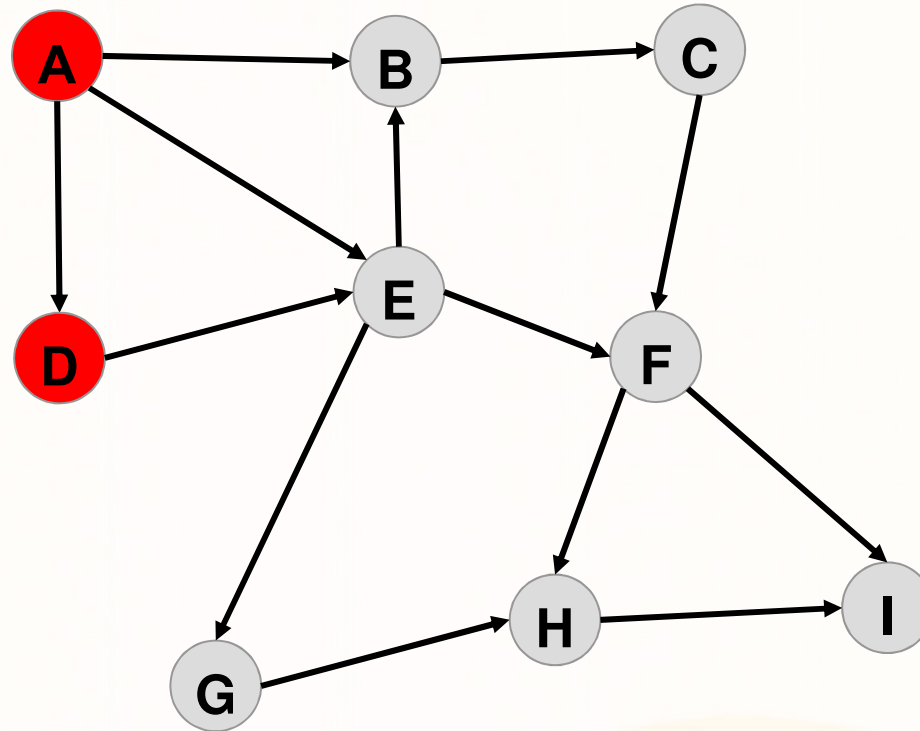
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	2	1	1	2	2	1	2	2
print:	A								

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



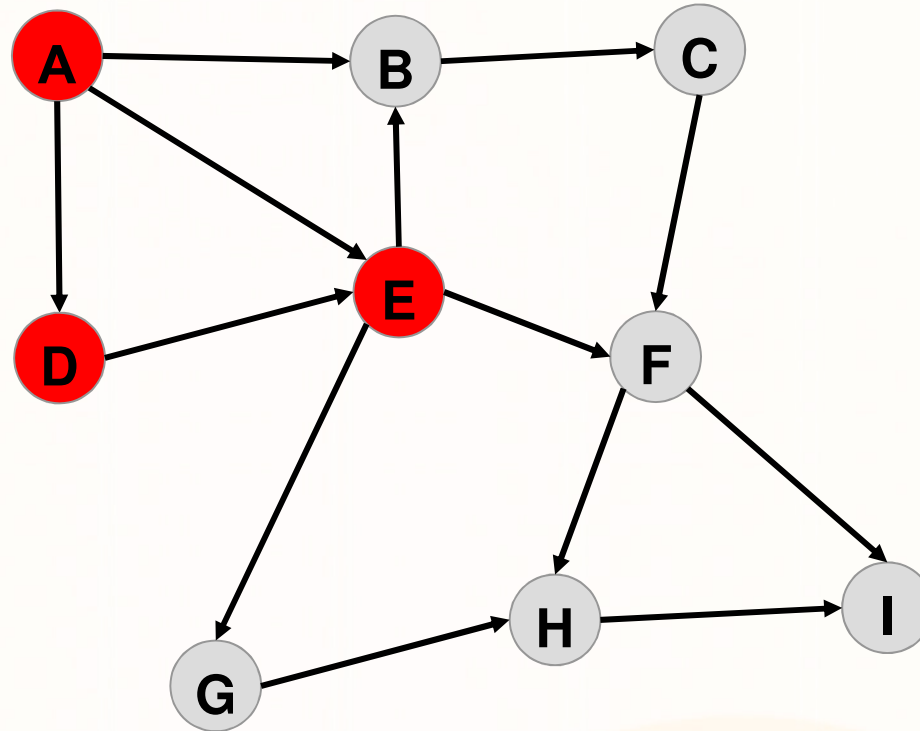
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	1	1	0	1	2	1	2	2
print:	A	D							

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



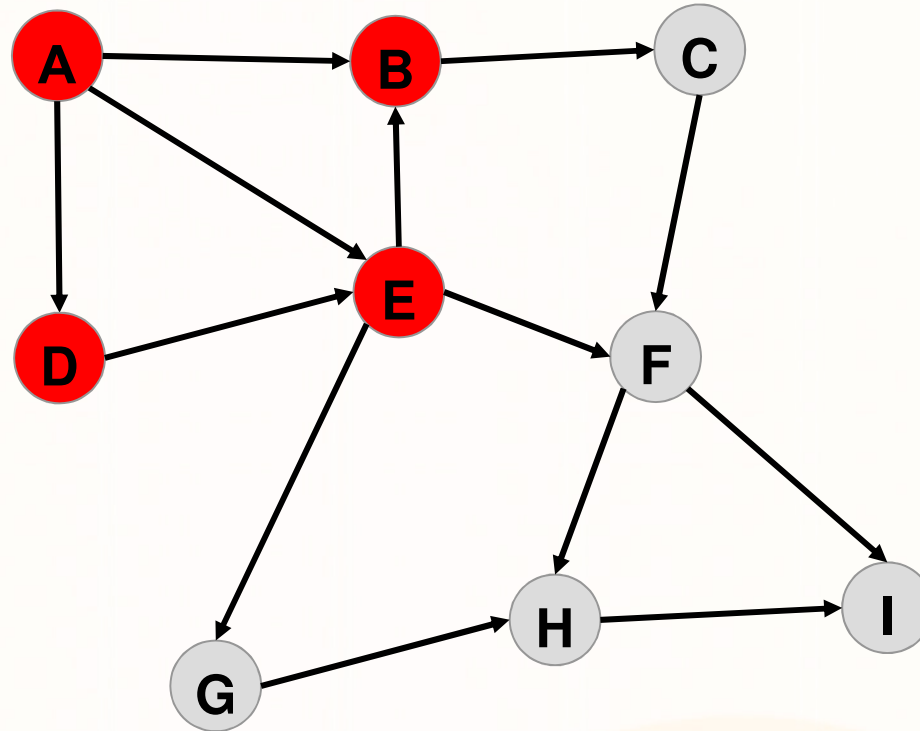
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	1	1	0	0	2	1	2	2
print:	A	D	E						

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



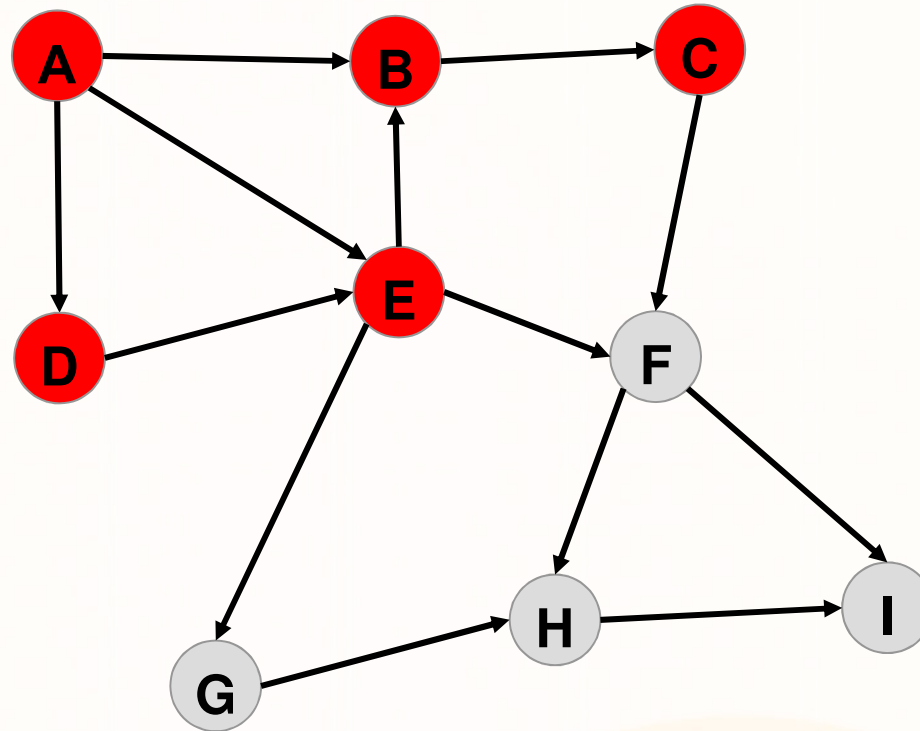
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	0	1	0	0	1	0	2	2
print:	A	D	E	B					

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



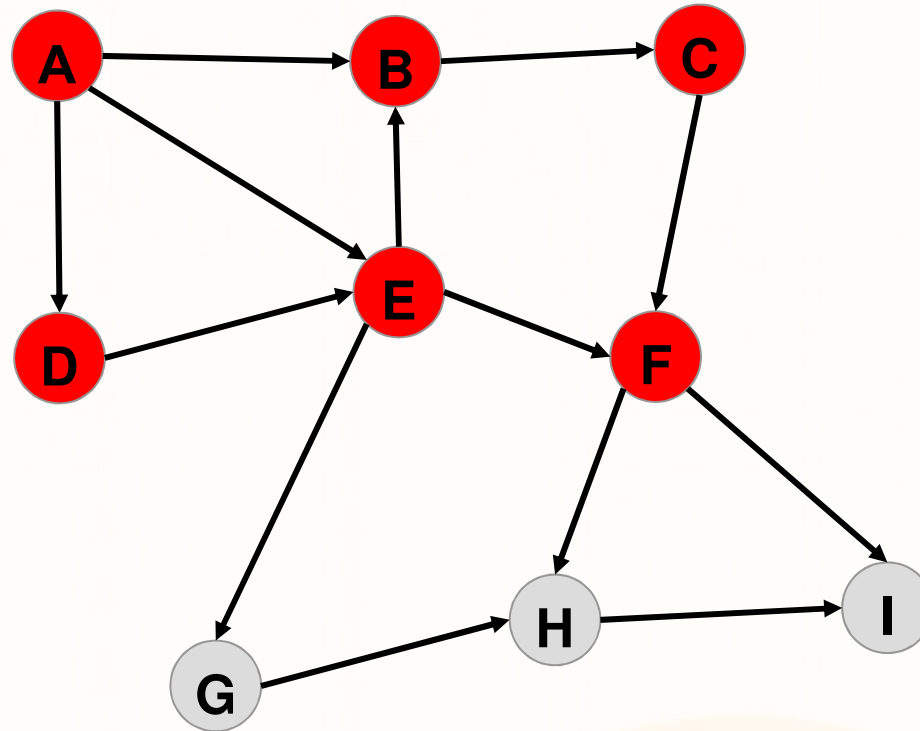
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	0	0	0	0	1	0	2	2
print:	A	D	E	B	C				

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



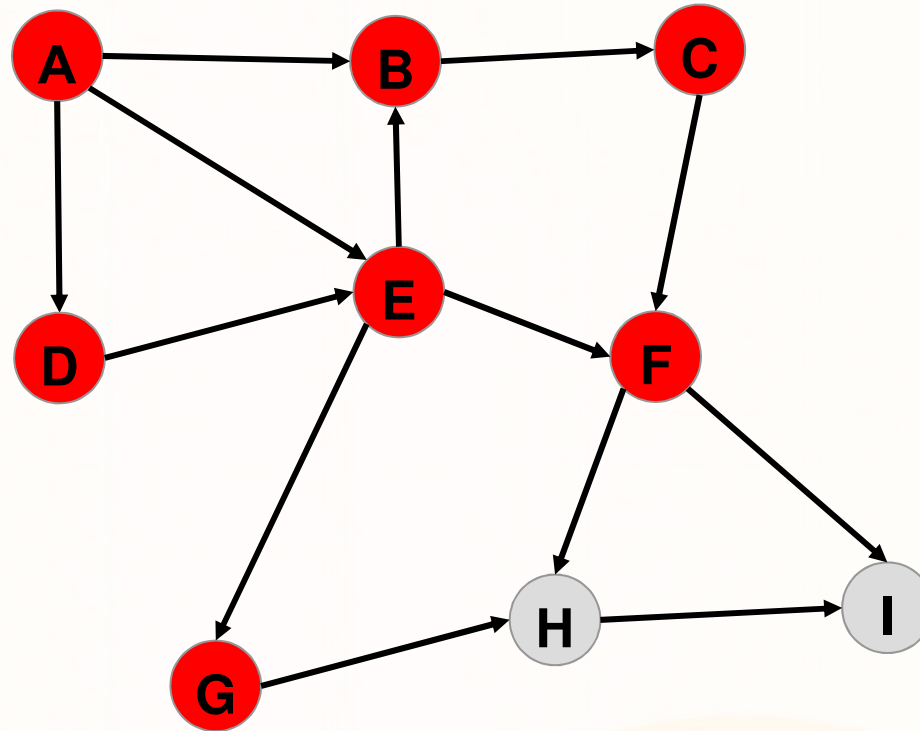
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	0	0	0	0	0	0	2	2
print:	A	D	E	B	C	F			

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



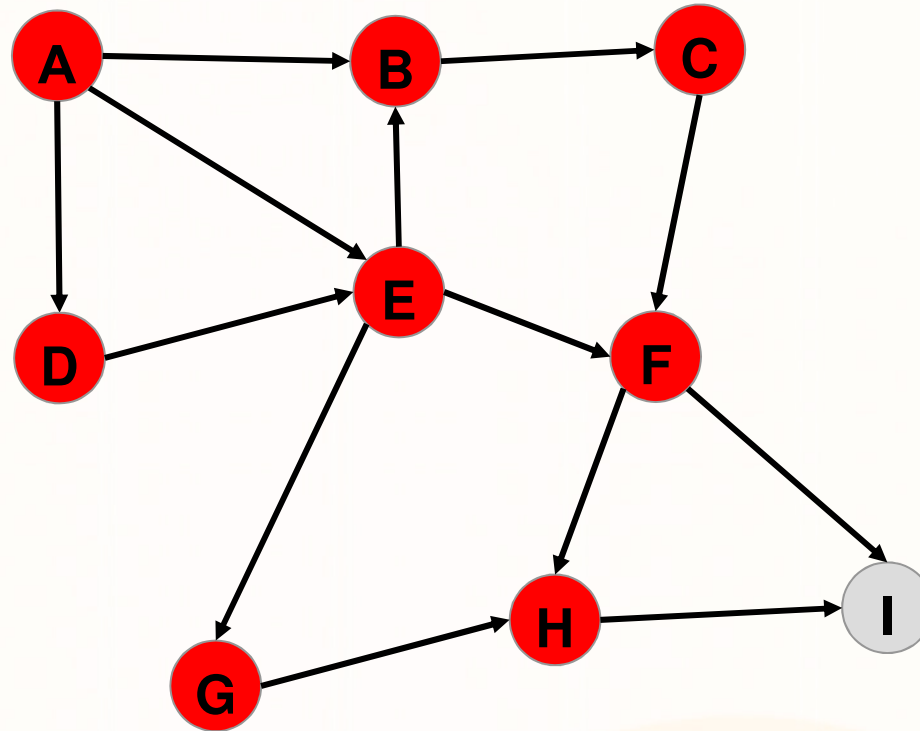
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	0	0	0	0	0	0	1	1
print:	A	D	E	B	C	F	G		

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



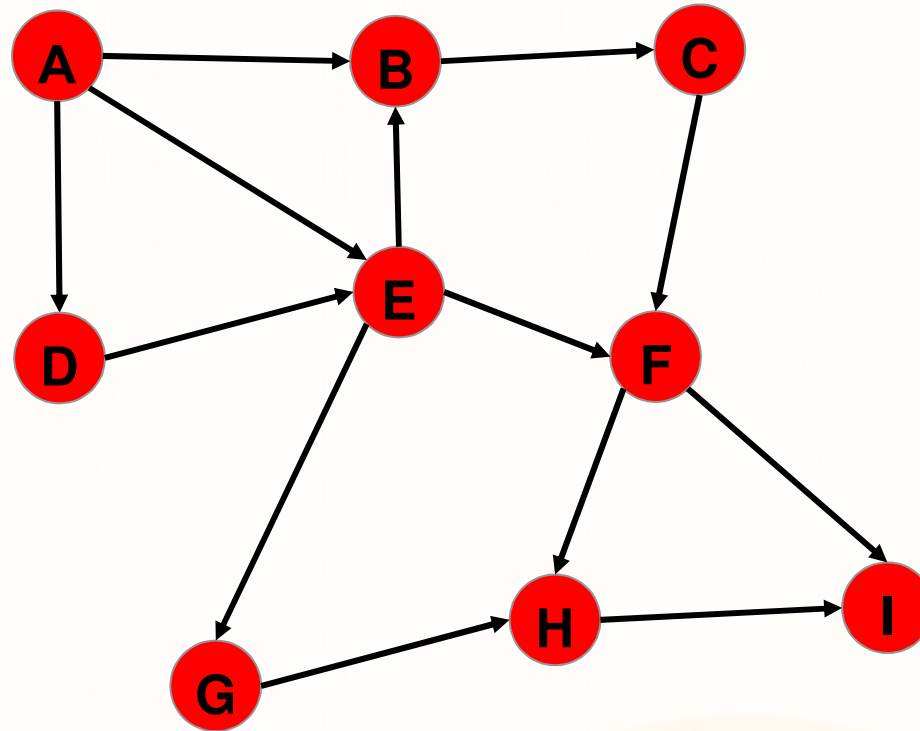
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	0	0	0	0	0	0	0	1
print:	A	D	E	B	C	F	G	H	

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



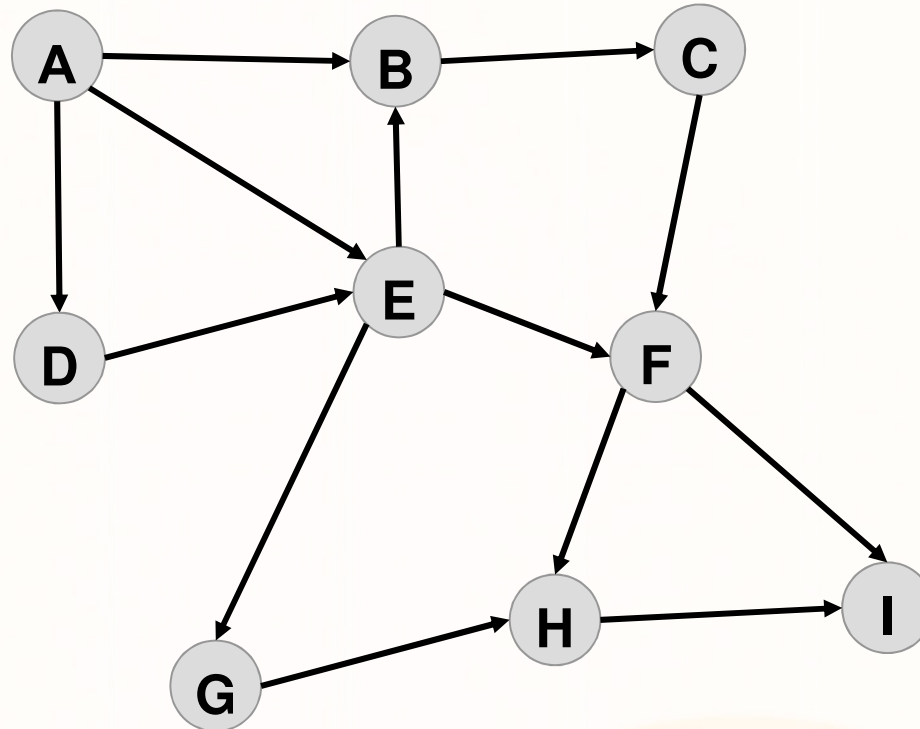
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	0	0	0	0	0	0	0	0
print:	A	D	E	B	C	F	G	H	I

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	0	0	0	0	0	0	0	0
print:	A	D	E	B	C	F	G	H	I

Παράδειγμα Τοπολογικής Ταξινόμησης



Υποθέστε δύο παράλληλους επεξεργαστές.

Πως θα δουλέψει ο αλγόριθμος στο πιο πάνω παράδειγμα;

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
In-Degree:	0	2	1	1	2	2	1	2	2
print:									

Ο αλγόριθμος του Prim

- Για να υλοποιήσουμε τον αλγόριθμο Prim θα χρησιμοποιήσουμε παράλληλους πίνακες
 - A) **visited[n]** : Κορυφές από τις οποίες περάσαμε.
 - B) **closest[n]** : Η κοντινότερη κορυφή κάθε κόμβου στο δένδρο (μια δεδομένη στιγμή)
 - C) **distance[n]** : Η απόσταση του κάθε επί μέρους κόμβου στο (B)

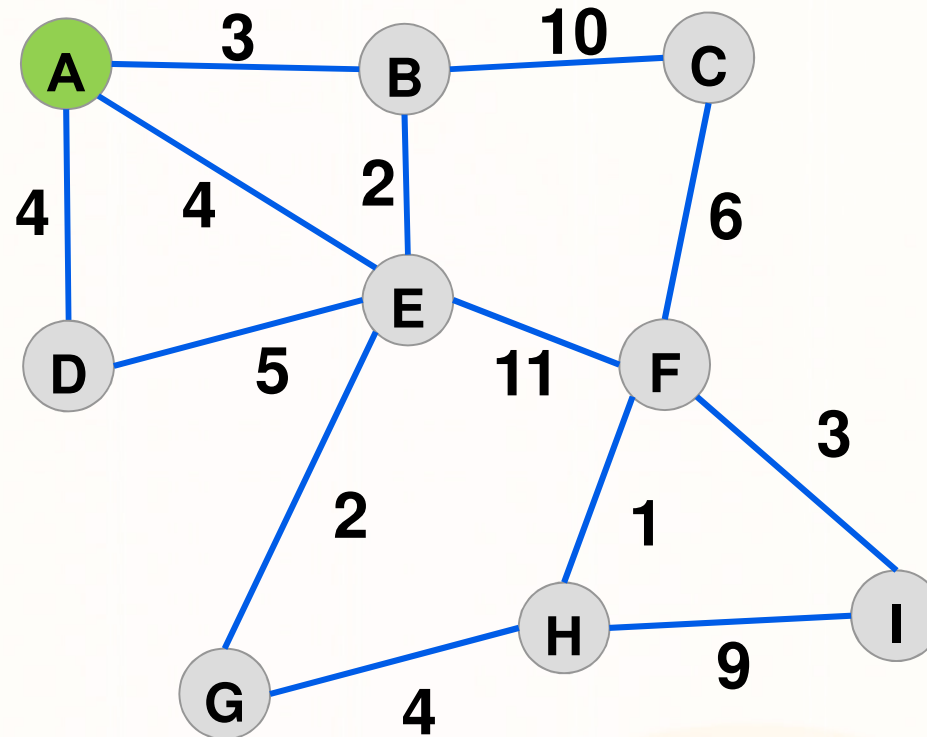
Αρχικοποίηση

	A	B	C	D	E	F
visited:	0	0	0	0	0	0

closest:	0	0	0	0	0	0
----------	---	---	---	---	---	---

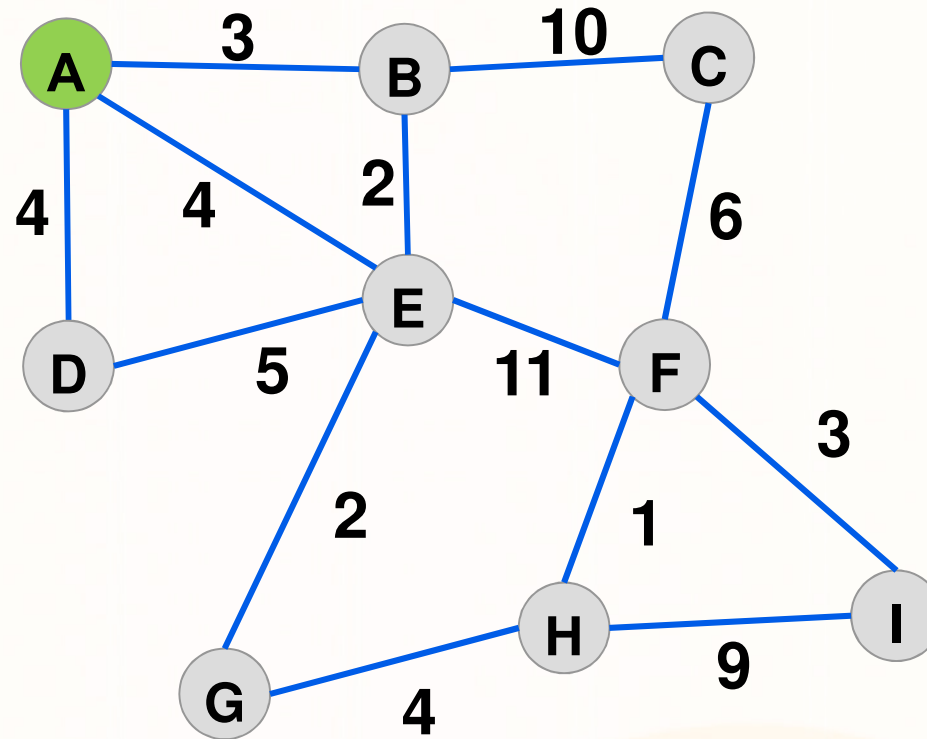
distance:	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Παράδειγμα Εκτέλεσης Prim



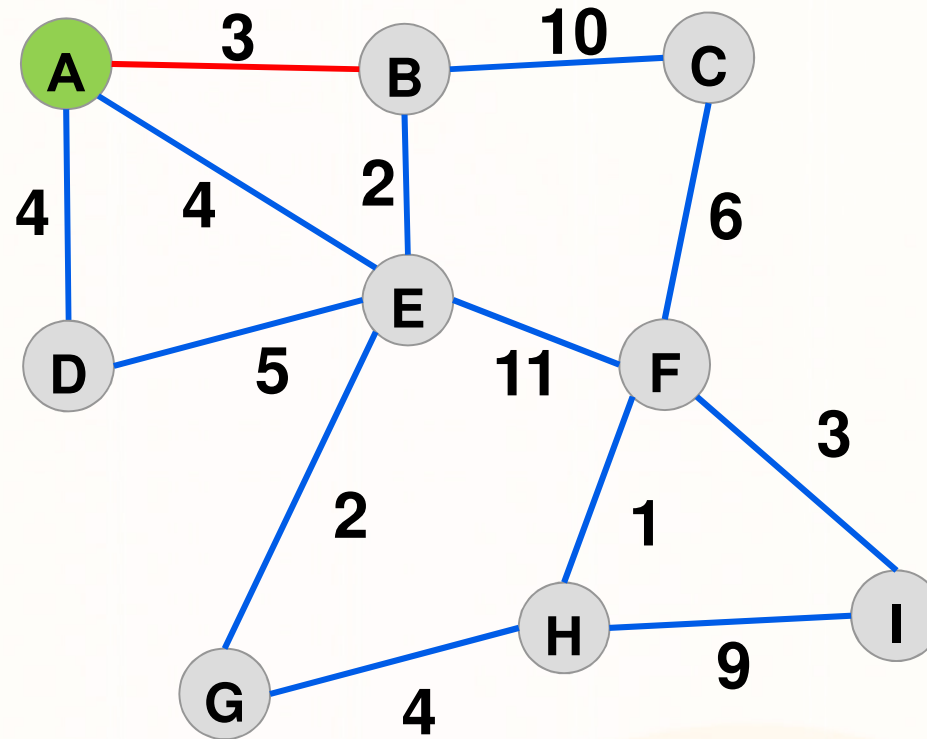
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited:	1	0	0	0	0	0	0	0	0
closest:	0	0	0	0	0	0	0	0	0
distance:	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Παράδειγμα Εκτέλεσης Prim (συν.)



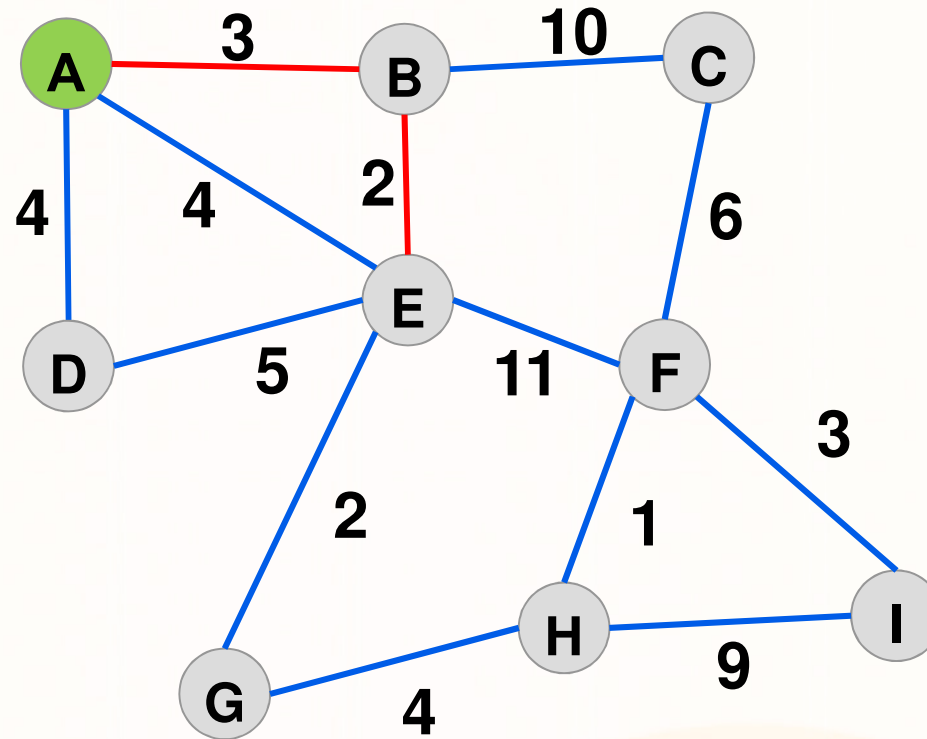
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited:	1	0	0	0	0	0	0	0	0
closest:	0	A	0	A	A	0	0	0	0
distance:	∞	3	∞	4	4	∞	∞	∞	∞

Παράδειγμα Εκτέλεσης Prim (συν.)



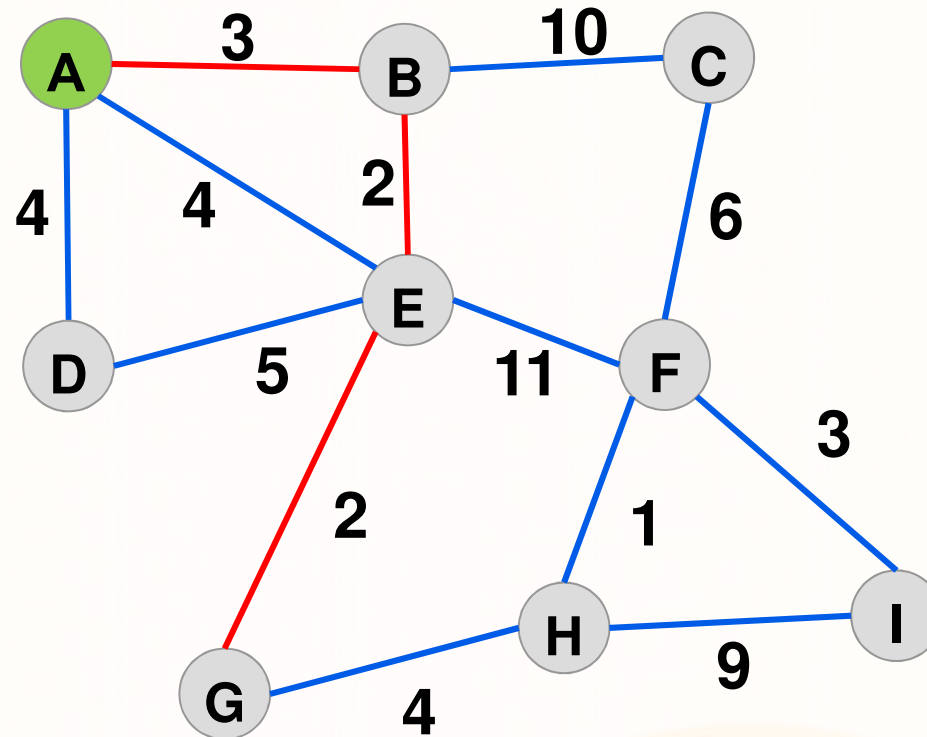
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited:	1	1	0	0	0	0	0	0	0
closest:	0	A	B	A	B	0	0	0	0
distance:	∞	3	10	4	2	∞	∞	∞	∞

Παράδειγμα Εκτέλεσης Prim (συν.)



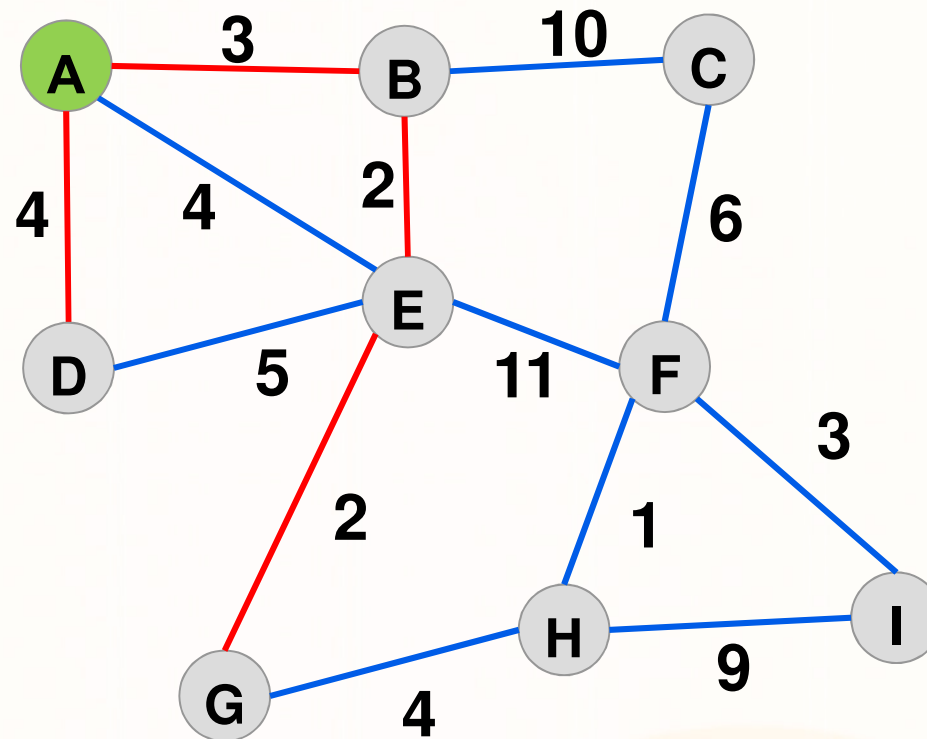
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited:	1	1	0	0	1	0	0	0	0
closest:	0	A	B	A	B	E	E	0	0
distance:	∞	3	10	4	2	11	2	∞	∞

Παράδειγμα Εκτέλεσης Prim (συν.)



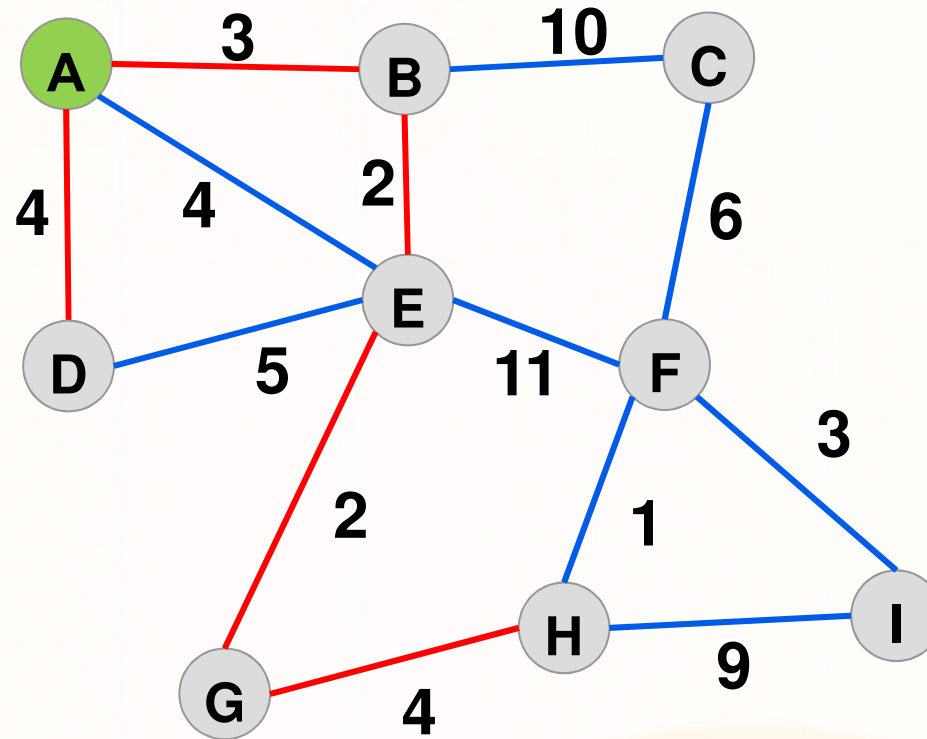
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited:	1	1	0	0	1	0	1	0	0
closest:	0	A	B	A	B	E	E	G	0
distance:	∞	3	10	4	2	11	2	4	∞

Παράδειγμα Εκτέλεσης Prim (συν.)



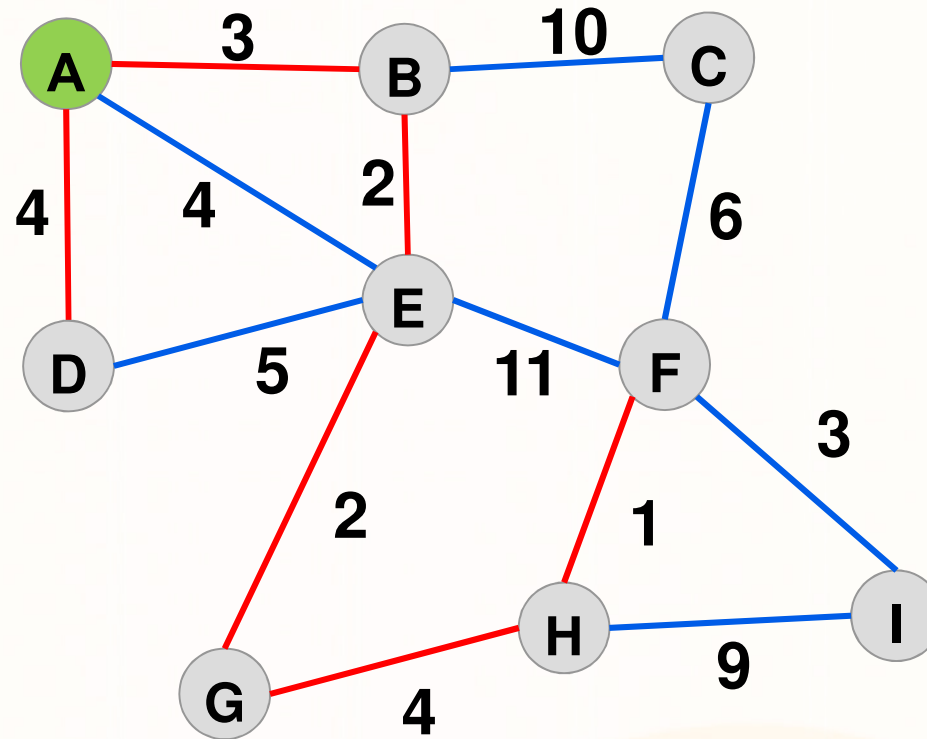
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited:	1	1	0	1	1	0	1	0	0
closest:	0	A	B	A	B	E	E	G	0
distance:	∞	3	10	4	2	11	2	4	∞

Παράδειγμα Εκτέλεσης Prim (συν.)



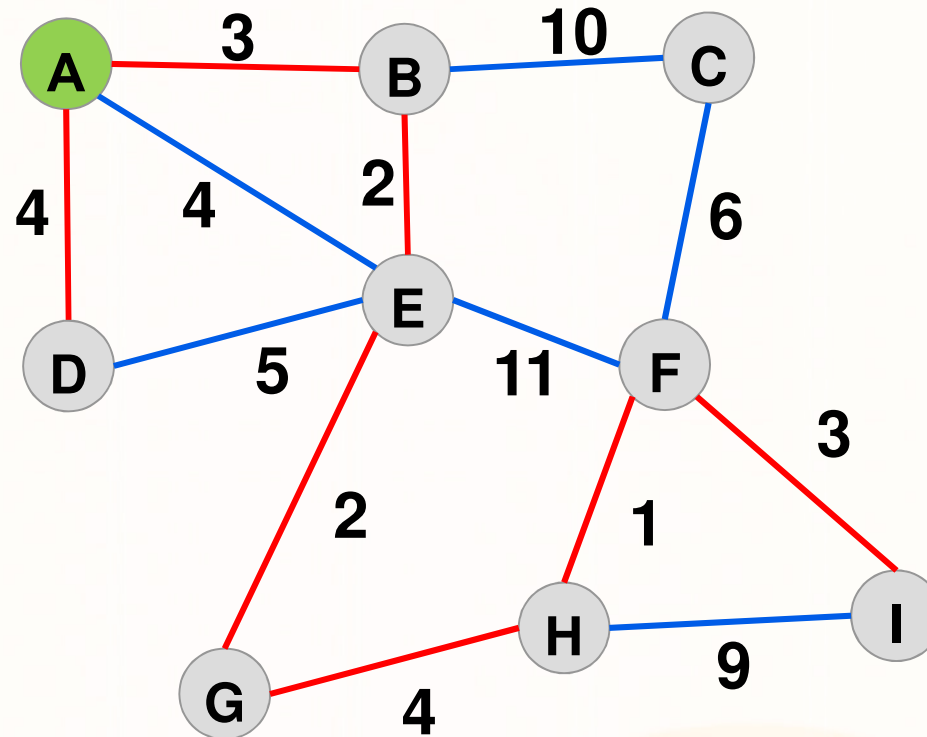
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited:	1	1	0	1	1	0	1	1	0
closest:	0	A	B	A	B	H	E	G	H
distance:	∞	3	10	4	2	1	2	4	9

Παράδειγμα Εκτέλεσης Prim (συν.)



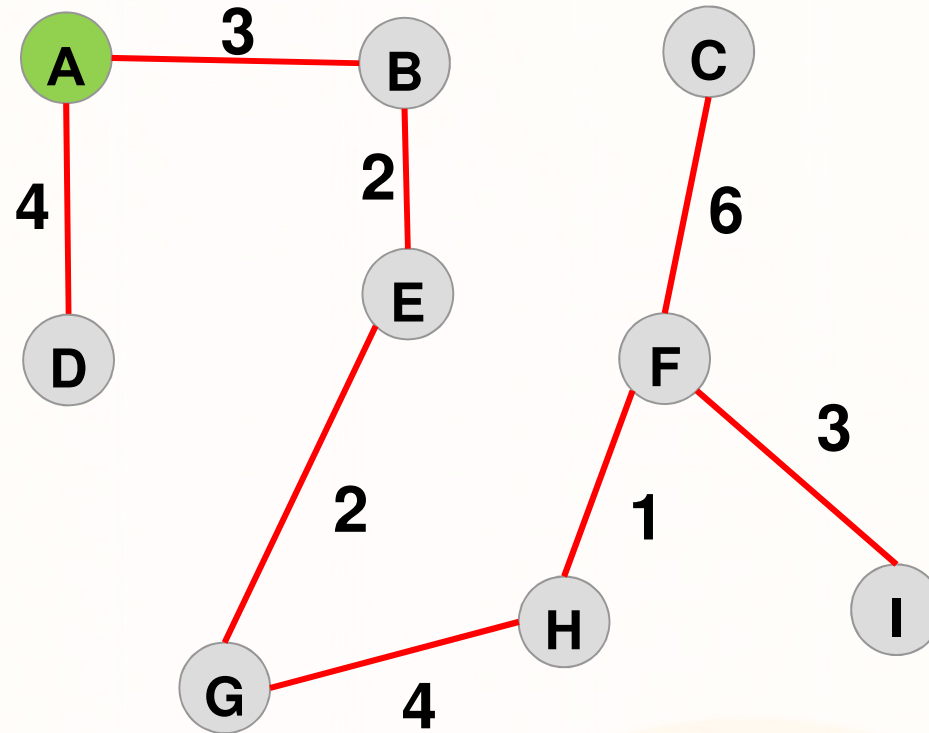
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited:	1	1	0	1	1	1	1	1	0
closest:	0	A	F	A	B	H	E	G	F
distance:	∞	3	6	4	2	1	2	4	3

Παράδειγμα Εκτέλεσης Prim (συν.)



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited:	1	1	0	1	1	1	1	1	1
closest:	0	A	F	A	B	H	E	G	F
distance:	∞	3	6	4	2	1	2	4	3

Παράδειγμα Εκτέλεσης Prim (συν.)

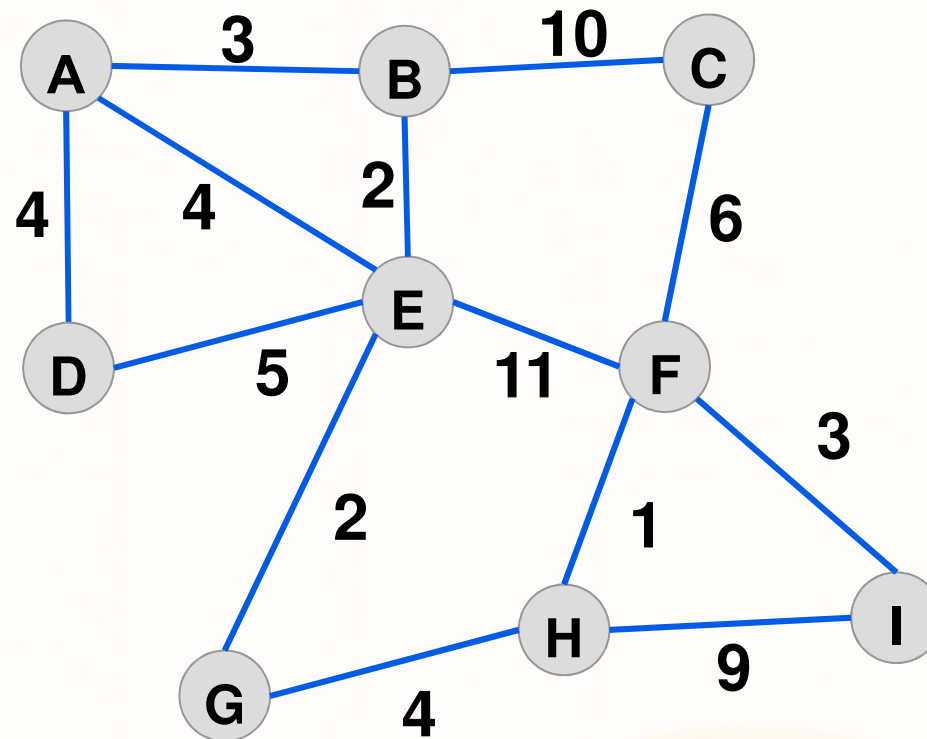


	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited:	1	1	1	1	1	1	1	1	1
closest:	0	A	F	A	B	H	E	G	F
distance:	∞	3	6	4	2	1	2	4	3

Ο αλγόριθμος του Kruskal

- Ακόμα ένας άπληστος (greedy) αλγόριθμος που υπολογίζει το Ελάχιστο Γεννητορικό Δένδρο (ΕΓΔ).
- Ενώ ο αλγόριθμος του Prim επεξεργάζεται μια-μια τις κορυφές, ο αλγόριθμος του Kruskal επεξεργάζεται μια-μια τις ακμές του γράφου.
- Επίσης, ενώ σε κάθε βήμα του αλγόριθμου του Prim οι επιλεγμένες ακμές σχηματίζουν ένα δένδρο, στην περίπτωση του αλγόριθμου Kruskal, σχηματίζουν ένα δάσος (ένα σύνολο από δένδρα).
- **Κεντρική ιδέα.**
 - Αρχικά το δάσος T είναι άδειο.
 - Επεξεργαζόμαστε μια-μια τις ακμές, **σε αύξουσα σειρά βάρους**.
 - Αν η εισαγωγή της e στο T **δεν προκαλεί κύκλο**, τότε προσθέτουμε την e στο T , δηλαδή $T := T \cup \{e\}$.

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

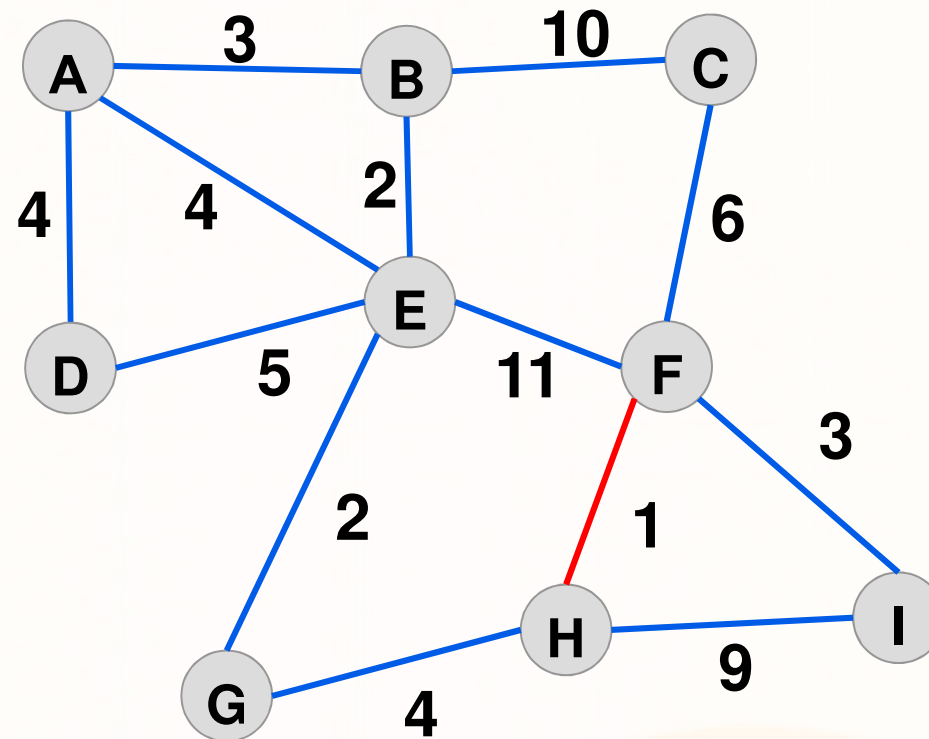


Ταξινομημένες Ακμές

{ F-H=1, B-E=2, E-G=2, A-B=3,
F-I=3, A-D=4, A-E=4, G-H=4,
D-E=5, C-F=6, H-I=9, B-C=10,
E-F=11 }

TID	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

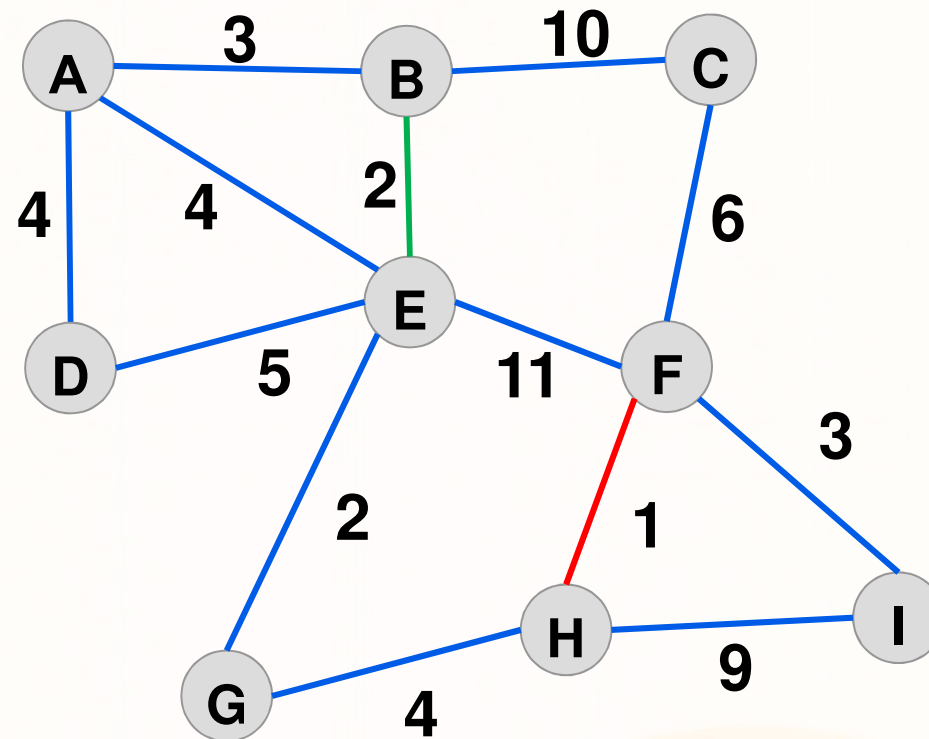


Ταξινομημένες Ακμές

{ **F-H=1**, B-E=2, E-G=2, A-B=3,
F-I=3, A-D=4, A-E=4, G-H=4,
D-E=5, C-F=6, H-I=9, B-C=10,
E-F=11 }

TID	0	1	2	3	4	5	6	5	8
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

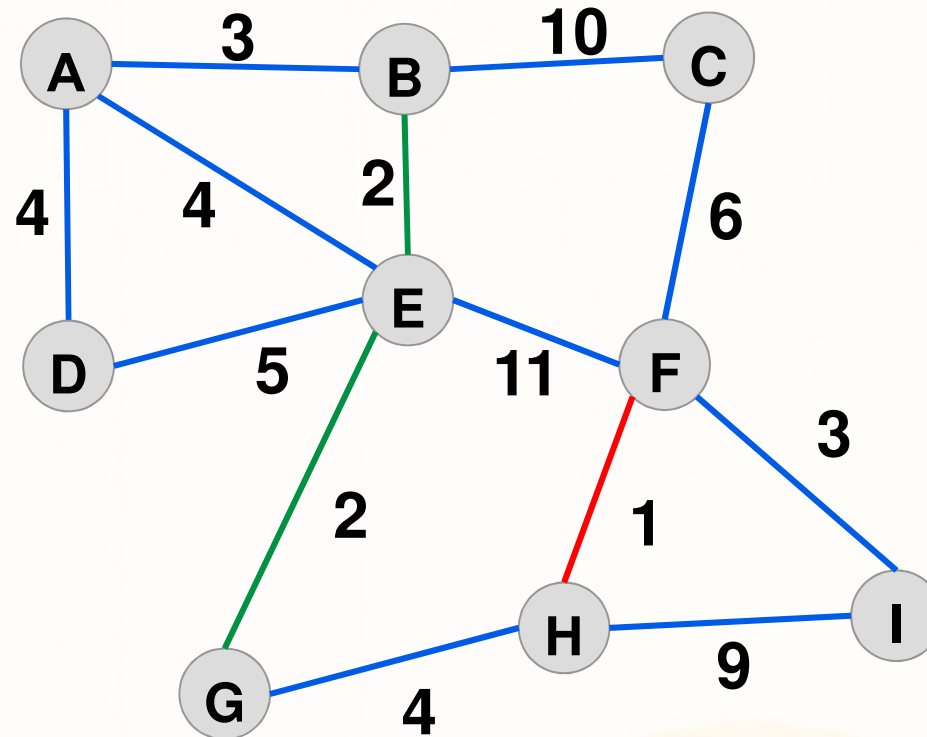


Ταξινομημένες Ακμές

{ **F-H=1**, **B-E=2**, E-G=2, A-B=3,
F-I=3, A-D=4, A-E=4, G-H=4,
D-E=5, C-F=6, H-I=9, B-C=10,
E-F=11 }

TID	0	1	2	3	1	5	6	5	8
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

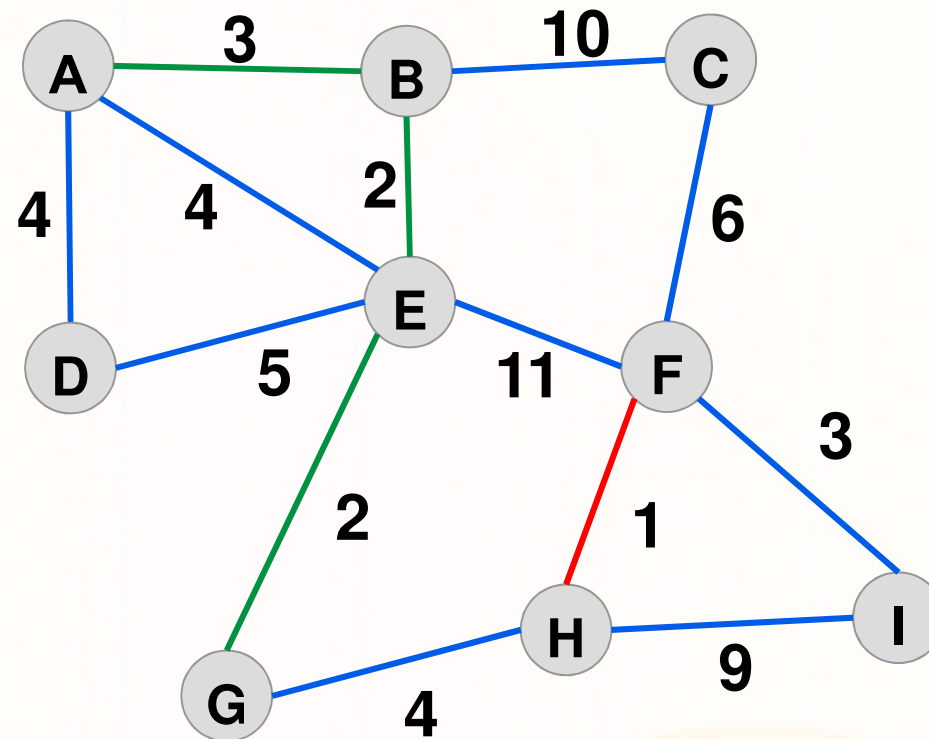


Ταξινομημένες Ακμές

{ **F-H=1**, **B-E=2**, **E-G=2**, A-B=3,
F-I=3, A-D=4, A-E=4, G-H=4,
D-E=5, C-F=6, H-I=9, B-C=10,
E-F=11 }

TID	0	1	2	3	1	5	1	5	8
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

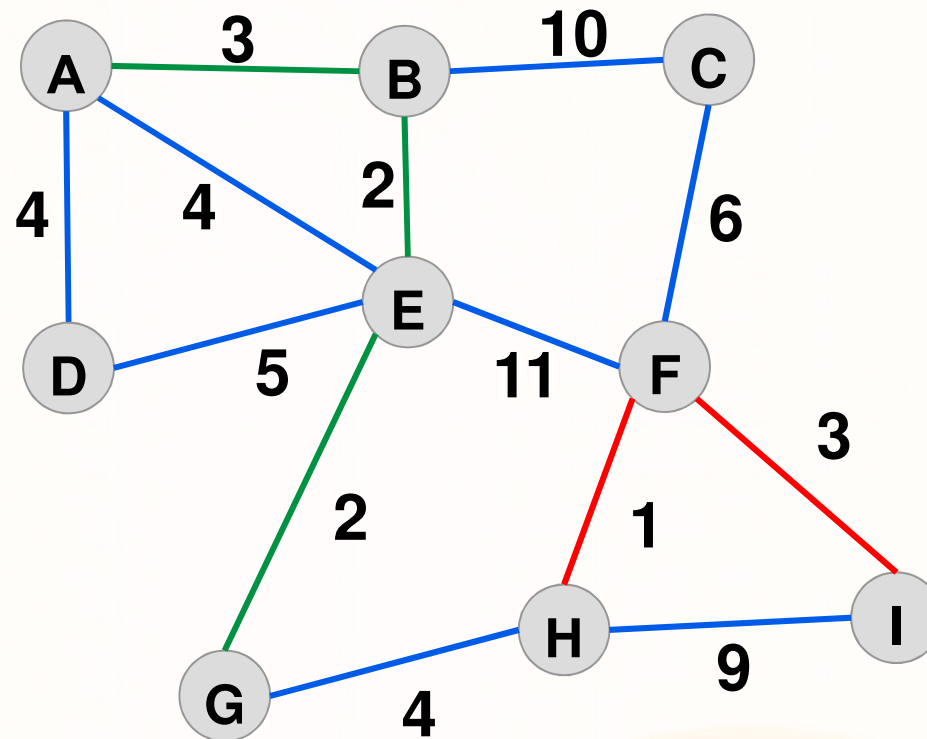


Ταξινομημένες Ακμές

{ **F-H=1**, **B-E=2**, **E-G=2**, **A-B=3**,
F-I=3, A-D=4, A-E=4, G-H=4,
D-E=5, C-F=6, H-I=9, B-C=10,
E-F=11 }

TID	1	1	2	3	1	5	1	5	8
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

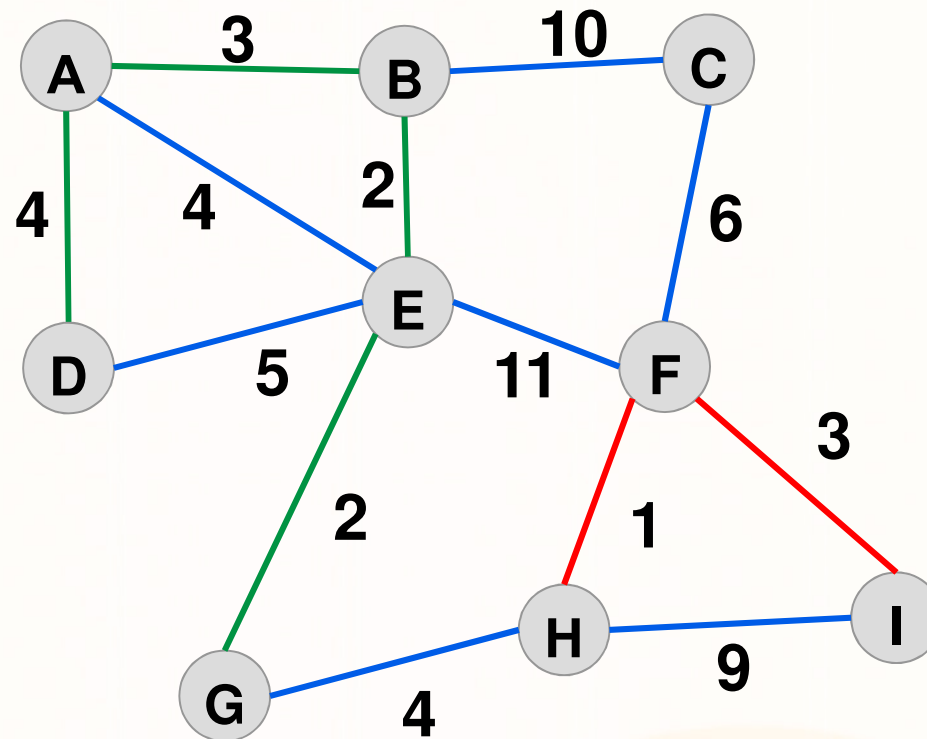


Ταξινομημένες Ακμές

{ **F-H=1**, **B-E=2**, **E-G=2**, **A-B=3**,
F-I=3, A-D=4, A-E=4, G-H=4,
D-E=5, C-F=6, H-I=9, B-C=10,
E-F=11 }

TID	1	1	2	3	1	5	1	5	5
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

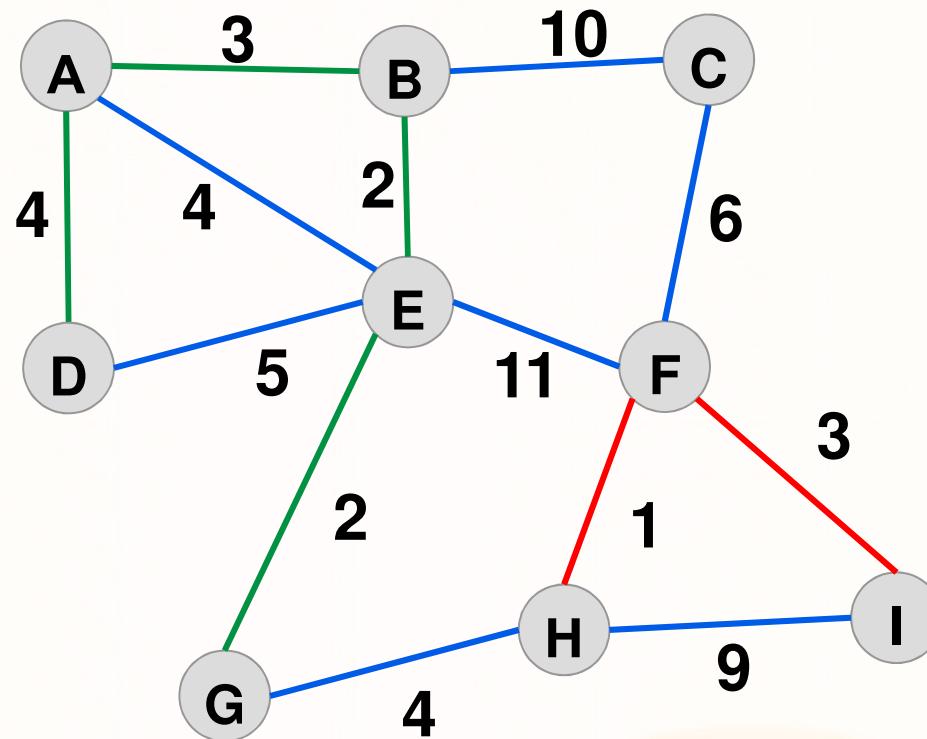


Ταξινομημένες Ακμές

{ **F-H=1**, **B-E=2**, **E-G=2**, **A-B=3**,
F-I=3, **A-D=4**, **A-E=4**, **G-H=4**,
D-E=5, **C-F=6**, **H-I=9**, **B-C=10**,
E-F=11 }

TID	1	1	2	1	1	5	1	5	5
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

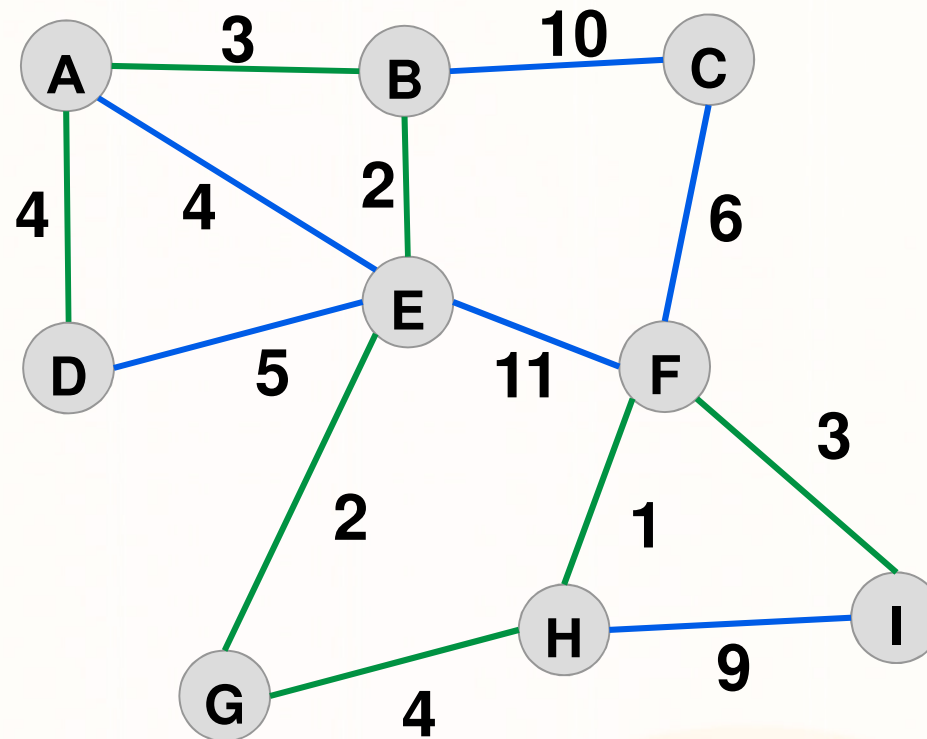


Ταξινομημένες Ακμές

{ **F-H=1**, **B-E=2**, **E-G=2**, **A-B=3**,
F-I=3, **A-D=4**, **A-E=4**, **G-H=4**,
D-E=5, **C-F=6**, **H-I=9**, **B-C=10**,
E-F=11 }

TID	1	1	2	1	1	5	1	5	5
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

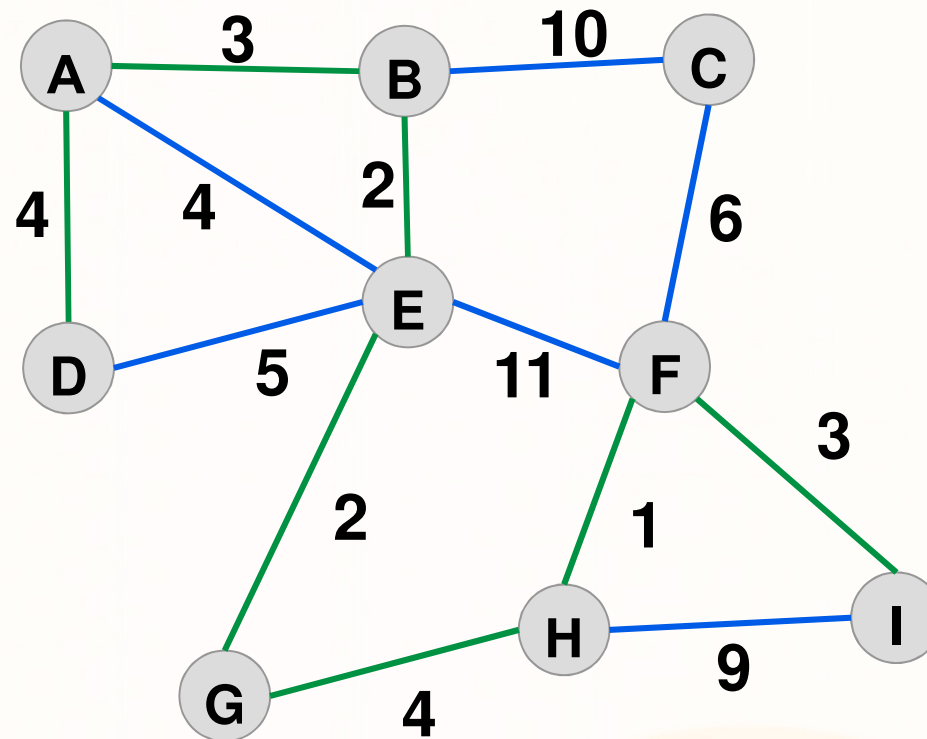


Ταξινομημένες Ακμές

{ **F-H=1**, **B-E=2**, **E-G=2**, **A-B=3**,
F-I=3, **A-D=4**, **A-E=4**, **G-H=4**,
D-E=5, C-F=6, H-I=9, B-C=10,
E-F=11 }

TID	1	1	2	1	1	1	1	1	1
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

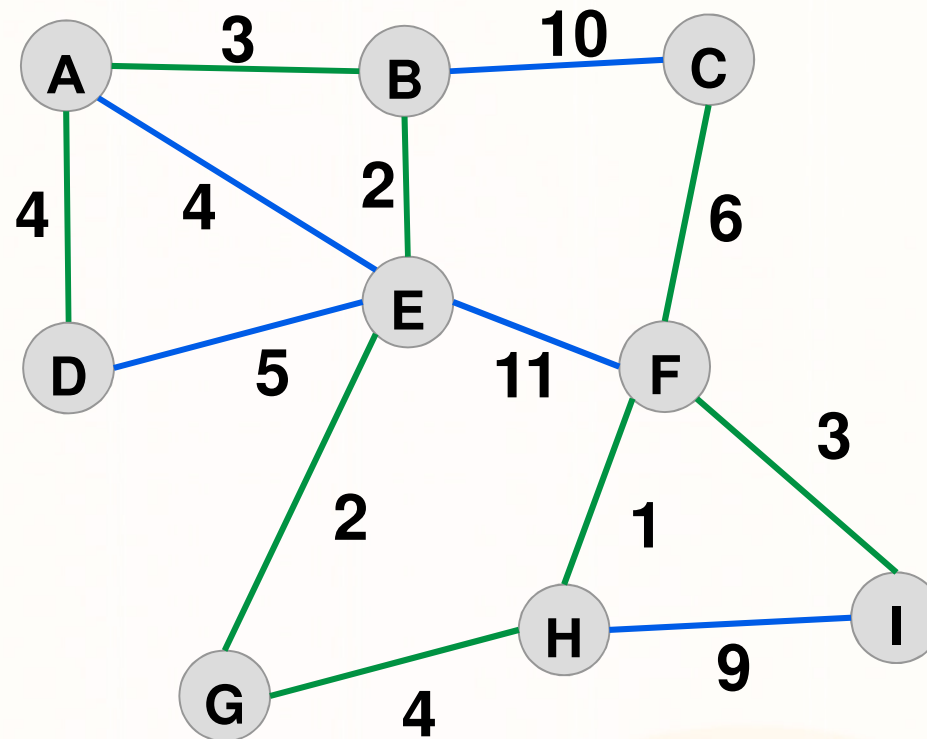


Ταξινομημένες Ακμές

{ **F-H=1**, **B-E=2**, **E-G=2**, **A-B=3**,
F-I=3, **A-D=4**, **A-E=4**, **G-H=4**,
D-E=5, **C-F=6**, **H-I=9**, **B-C=10**,
E-F=11 }

TID	1	1	2	1	1	1	1	1	1
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal

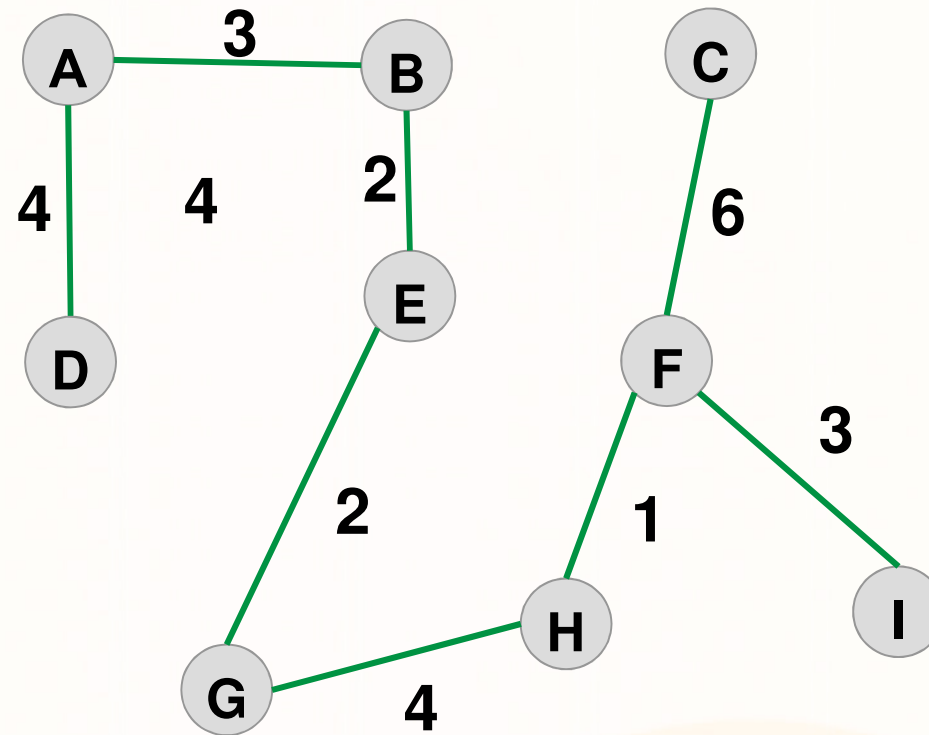


Ταξινομημένες Ακμές

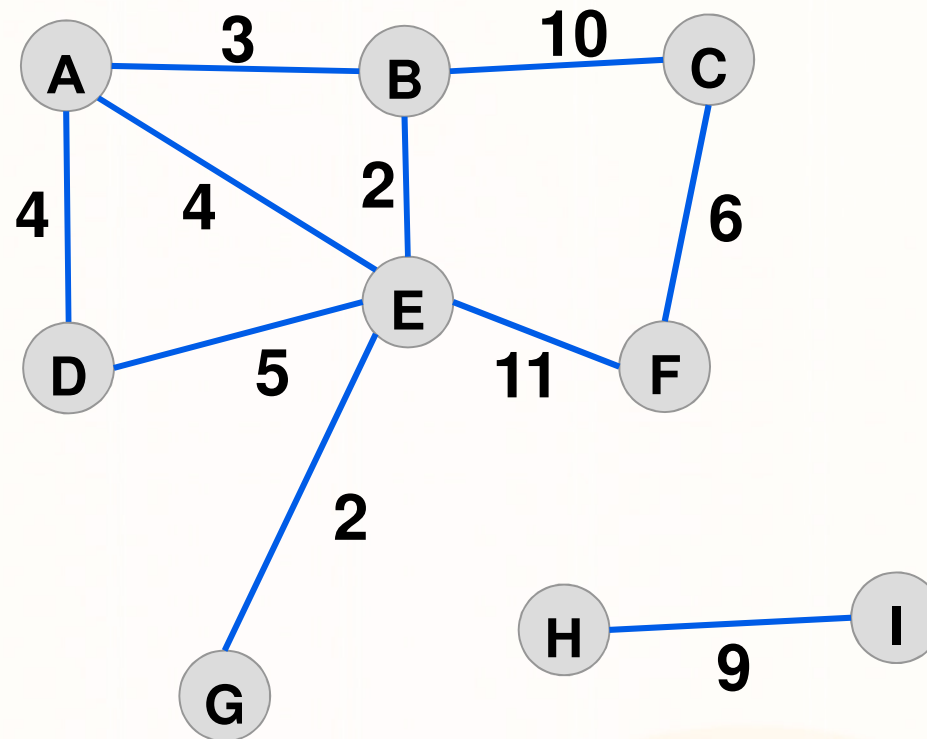
{ **F-H=1**, **B-E=2**, **E-G=2**, **A-B=3**,
F-I=3, **A-D=4**, **A-E=4**, **G-H=4**,
D-E=5, **C-F=6**, **H-I=9**, **B-C=10**,
E-F=11 }

TID	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal



Παράδειγμα Εκτέλεσης Kruskal



Ταξινομημένες Ακμές

{B-E=2, E-G=2, A-B=3, A-D=4, A-E=4, D-E=5, C-F=6, H-I=9, B-C=10, E-F=11 }

TID	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	B	C	D	E	F	G	H	I