Διάλεξη 18: Αλγόριθμοι Ταξινόμησης Ι

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

- Οι αλγόριθμοι ταξινόμησης:

  A. SelectionSort – Ταξινόμηση με Επιλογή

  B. InsertionSort – Ταξινόμηση με Εισαγωγή

Διδάσκων: Παναγιώτης Ανδρέου

Αλγόριθμοι ταξινόμησης

Δοθέντων μιας **συνάρτησης f (ordering function)** και ενός **συνόλου στοιχείων**

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

η ταξινόμηση συνίσταται στη **μετάθεση** των στοιχείων ώστε να μπουν σε μια σειρά

$$x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n}$$

η οποία να ικανοποιεί

$$f(x_{k_1}) \leq f(x_{k_2}) \leq ... \leq f(x_{k_n})$$ **αύξουσα σειρά**

ή

$$f(x_{k_1}) \geq f(x_{k_2}) \geq ... \geq f(x_{k_n})$$ **φθίνουσα σειρά**

- Ταξινόμηση Ονομάτων: f("Maria") < f("Michalis"), δηλαδή η συνάρτηση f συγκρίνει τις δυο λέξεις αλφαριθμητικά.

Θα εξετάσουμε αλγόριθμους ταξινόμησης με κύριο γνώμονα την αποδοτικότητά τους (χρόνος εκτέλεσης, χρήση μνήμης).

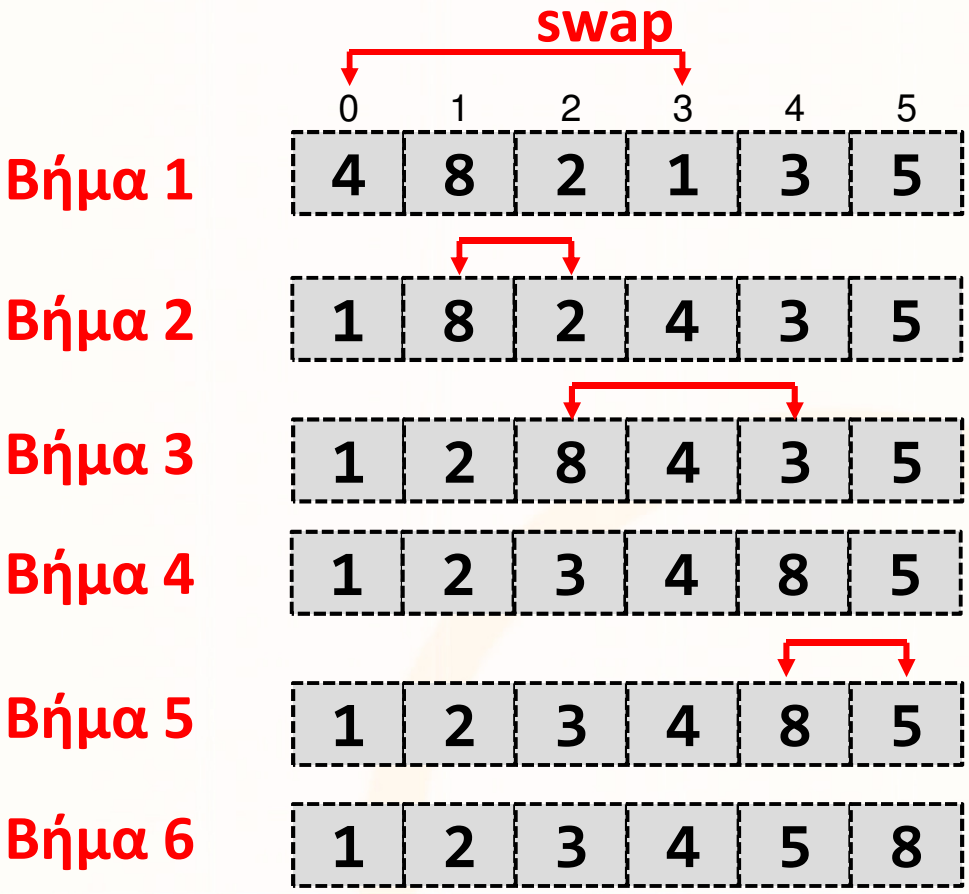
Α. Ταξινόμηση με Επιλογή - Selection Sort

- Η Ταξινόμηση με Επιλογή (Selection Sort) βασίζεται στα ακόλουθα τρία βήματα:

1. επιλογή του ελάχιστου στοιχείου
2. ανταλλαγή με το i-οστό στοιχείο (i είναι μια μεταβλητή που αυξάνεται κατά ένα).
3. επανάληψη των βημάτων 1 και 2 για τα υπόλοιπα στοιχεία.

Ταξινόμηση με επιλογή: SelectionSort

- SelectionSort: ο αλγόριθμος αυτός ταξινομεί μία λίστα με στοιχεία. Σε κάθε βήμα i βρίσκει το i-οστό πιο μικρό στοιχείο και το τοποθετεί στην θέση i.
- Παράδειγμα: `int x = {4, 8, 2, 1, 3, 5};`



Ταξινόμηση με επιλογή: SelectionSort (συν.)

Πρότυπο Συνάρτησης

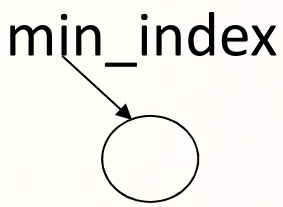
```
void selectionSort(int x[],     //ο πίνακας
                   int length)  //το μέγεθος του x
```

Αλγόριθμος

- Αρχικοποίησε μία μεταβλητή min_index η οποία θα αποθηκεύει τη θέση του ελάχιστου αριθμού
- Με ένα βρόγχο for που θα ελέγχει ένα ένα τα στοιχεία του πίνακα (i<length) κάνε τα εξής:
  - Θέσε σαν min_index το i
  - Ψάξε ένα-ένα τα στοιχεία με ένα δεύτερο εσωτερικό βρόγχο αρχίζοντας από j=i
    - Αν το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση j είναι μικρότερο από το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση min_index τότε θέσε min_index = j
  - Με την έξοδο από το βρόγχο, αντάλλαξε τα στοιχεία που βρίσκονται στη θέση i με το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση min_index

SelectionSort: Παράδειγμα Εκτέλεσης

Θέση	0	1	2	3	4	5
Αρχικός Πίνακας	*34*	*8*	*64*	*51*	*32*	*33*
Με i=0	8	34	64	51	32	33
Με i=1	8	32	64	51	34	33
Με i=2	8	32	33	51	34	64
Με i=3	8	32	33	34	51	64
Με i=4	8	32	33	34	51	64



Στοιχείο που θα εισαχθεί στην θέση i

SelectionSort: Πρόγραμμα στην C

```
void SelectionSort(int x[],
                   int n){
  int min_index;
  int tmp;
  for(int i=0; i<n-1; i++){
    min_index = i;

    for(int j=i+1; j<n; j++){
      if(x[j]<x[min_index])
        min_index=j;
    }

    tmp = x[i];
    x[i] = x[min_index];
    x[min_index]=tmp;
  }
}
```

Αρχικοποίηση θέσης μικρότερου στοιχείου

Βρες το μικρότερο στοιχείο

Αντάλλαξε το μικρότερο στοιχείο με το τρέχον στοιχείο στη θέση [i]

SelectionSort: Ανάλυση Χρόνου Εκτέλεσης

```
void SelectionSort(){
   …
   for (i=0; i<n-1; i++){
      for (j=i+1; j<n; j++){
         sum++;
      }                          Εσωτερικός Βρόγχος
   }                             Εξωτερικός Βρόγχος
}
```

- **Εσωτερικός Βρόγχος:** $IL = \sum_{j=i+1}^{n} 1 = n - (i+1) + 1 = n - i$

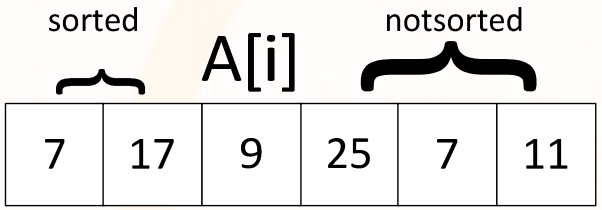
- **Εξωτερικός Βρόγχος:** $OL = \sum_{i=0}^{n-1} IL = \sum_{i=0}^{n} (n - i)$

$$= n\sum_{i=0}^{n} 1 - \sum_{i=0}^{n} i = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$$

Β. Ταξινόμηση με Εισαγωγή - Insertion Sort

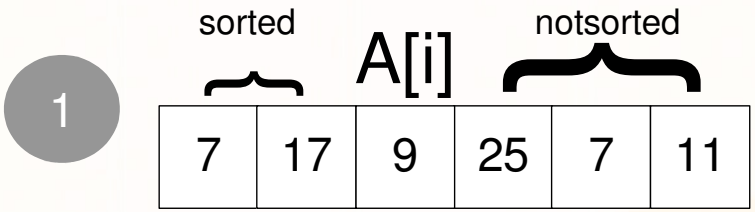
- Η ***Ταξινόμηση με Εισαγωγή*** **(Insert Sort)** εισάγει ένα-ένα τα στοιχεία του συνόλου που εξετάζεται, στη σωστή τους θέση.

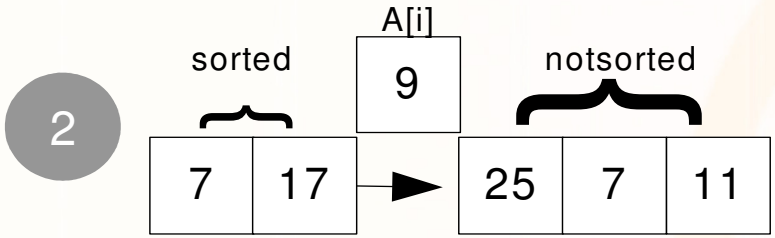
- Στη φάση *i*:
  1. υποθέτουμε πως ο πίνακας *A*[0..(*i*-1)] είναι ταξινομημένος,
  2. εισάγουμε το στοιχείο *A*[*i*] στην ακολουθία *A*[0..(i-1)] στη σωστή θέση. Αυτό επιτυγχάνεται μετακινώντας όλα τα στοιχεία που είναι μεγαλύτερα του *A*[*i*] μια θέση δεξιά.

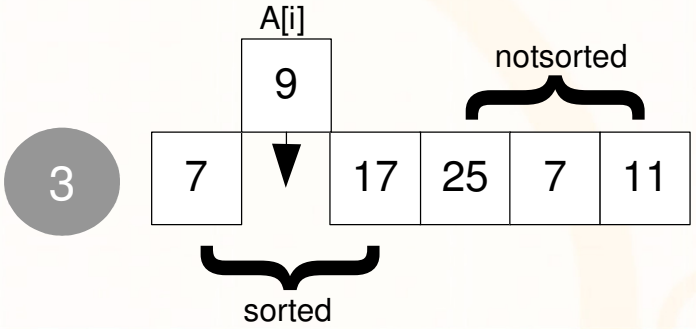


Β. Ταξινόμηση με Εισαγωγή - Insertion Sort (συν.)

- Στη φάση *i*:
  1. υποθέτουμε πως ο πίνακας *A*[0..(*i*-1)] είναι ταξινομημένος,
  2. εισάγουμε το στοιχείο *A*[*i*] στην ακολουθία *A*[0..(i-1)] στη σωστή θέση. Αυτό επιτυγχάνεται μετακινώντας όλα τα στοιχεία που είναι μεγαλύτερα του *A*[*i*] μια θέση δεξιά.

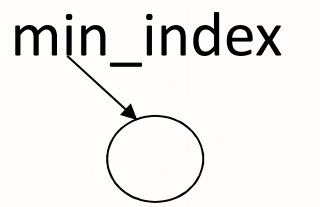






InsertionSort: Παράδειγμα Εκτέλεσης

Θέση	0	1	2	3	4	5
Αρχικός Πίνακας	*34*	*8*	*64*	*51*	*32*	*21*
Με i=1	**8**	**34**	64	51	32	21
Με i=2	**8**	**34**	**64**	51	32	21
Με i=3	**8**	**34**	**51**	**64**	32	21
Με i=4	**8**	**32**	**34**	**51**	**64**	21
Με i=5	**8**	**21**	**32**	**34**	**51**	**64**



Στοιχείο που θα εισαχθεί στην θέση i

InsertionSort: Πρόγραμμα στην C

```
void InsertionSort(int A[], int n){
  int index, i, j;
  for (i=1; i < n; i++) {
    index = A[i];

    for (j=i; j>0; j--){


      if (A[j-1] <= index) { break; }
      A[j] = A[j-1];
    }

     A[j] = index;
  }
}
```

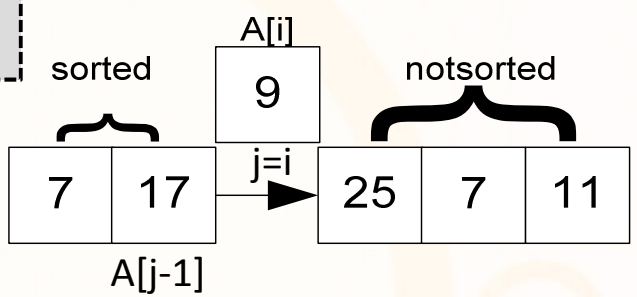
Τρέχον στοιχείο εισαγωγής

μετακίνηση στοιχείων προς δεξιά

θέλουμε να μετακινήσουμε μόνο τα A[j-1] > index

τοποθέτηση στοιχείου

index=9



Insertion Sort: Παράδειγμα Εκτέλεσης 2

BEFORE:[8,4,8,43,3,5,2,] (Το κόκκινο δείχνει τα ταξινομημένα στοιχεία)

i:1(index:4) >8 (“>” Δείχνει τις μετακινήσεις)
[4,8,8,43,3,5,2,] (Νέος Πίνακας)

i:2(index:8) (Τίποτα δεν μετακινείται)
[4,8,8,43,3,5,2,]

i:3(index:43) (Τίποτα δεν μετακινείται)
[4,8,8,43,3,5,2,]

i:4(index:3) >43>8>8>4
[3,4,8,8,43,5,2,]

i:5(index:5) >43>8>8
[3,4,5,8,8,43,2,]

i:6(index:2) >43>8>8>5>4>3
[2,3,4,5,8,8,43,]

AFTER:[2,3,4,5,8,8,43,]

InsertionSort: Ανάλυση Χρόνου Εκτέλεσης

```
void InsertionSort(){
    …
    for (i=1; i<n; i++){
        for (j=i; j>0; j--){
            sum++;
        }
    }
}
```

Εσωτερικός Βρόγχος

Εξωτερικός Βρόγχος

- **Εσωτερικός Βρόγχος:** $IL = \sum_{j=0}^{i} 1 = i$
- **Εξωτερικός Βρόγχος:** $OL = \sum_{i=1}^{n} IL = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\in \Theta(n^2)$$

Σύγκριση InsertionSort και SelectionSort

- Υπάρχουν δυο κριτήρια: **Βήματα** (μέχρι να βρω ένα στοιχείο) και **Μετακινήσεις (**όταν το βρω, πόσα swap κάνω) .
- Ο αλγόριθμος **Selection sort** απαιτεί πάντα **$O(n^2)$ βήματα** (δεν είναι δυνατή η γρήγορη έξοδος από τους βρόχους), έτσι η βέλτιστη περίπτωση είναι η ίδια με τη χείριστη περίπτωση.
- Στον αλγόριθμο **Insertion Sort**, είναι δυνατό να βγούμε από το δεύτερο βρόχο γρήγορα. Στη βέλτιστη περίπτωση (ο πίνακας είναι ήδη ταξινομημένος), ο χρόνος εκτέλεσης είναι της τάξης **$\Omega(n)$ βήματα**.
- Παρά τούτου, το **Selection Sort** είναι πιο αποδοτικός αν κρίνουμε τους αλγόριθμους με βάση τον αριθμό των **μετακινήσεων (swaps**) που απαιτούν:
  - το **selection sort απαιτεί $O(n)$** μετακινήσεις,
  - το **insertion sort, απαιτεί $O(n^2)$** μετακινήσεις (στη χείριστη περίπτωση όπου ο αρχικός πίνακας είναι ταξινομημένος σε φθίνουσα σειρά).