

Διάλεξη 19: Κατανομή Πόρων – Κόψιμο Τούρτας

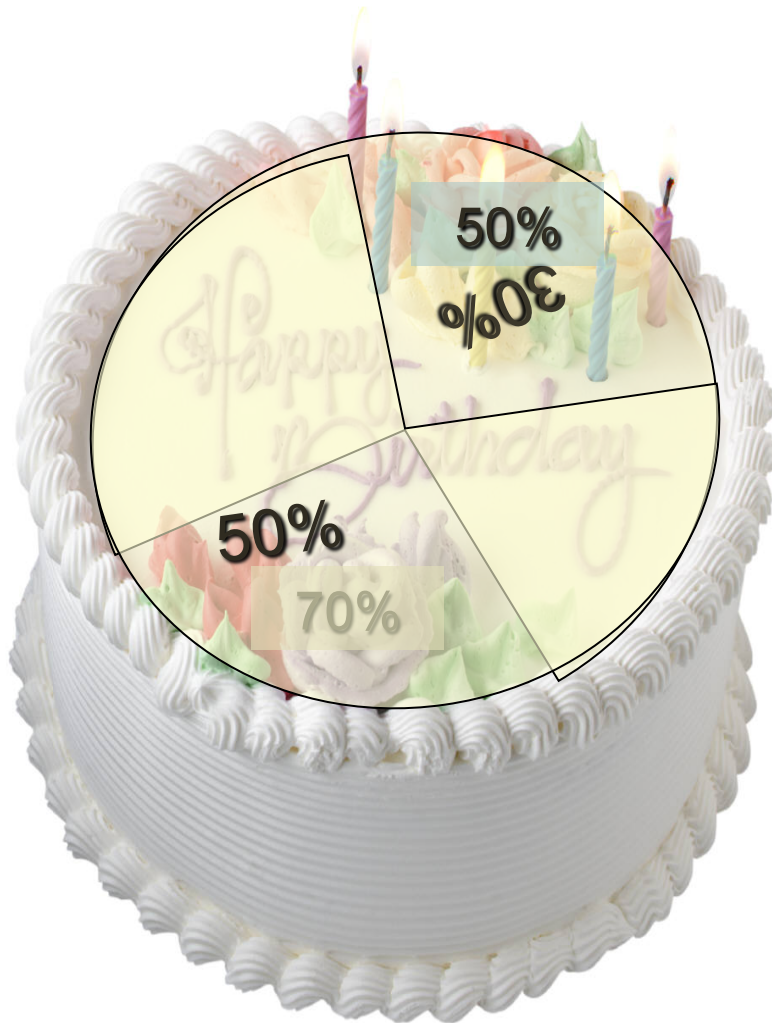
ΕΠΛ 432: Κατανεμημένοι Αλγόριθμοι



Τι θα δούμε σήμερα

- Ορισμός Προβλήματος
- Συνθήκη Δικαιοσύνης
- Αλγόριθμος 2 επεξεργασιών (Cut & Choose)
- Αλγόριθμος 3 επεξεργασιών (Trimming)
- Αλγόριθμος 4 επεξεργασιών (Divide & Conquer)

Το Πρόβλημα (In Real Life)



- Η Alice και ο Bob θέλουν να μοιραστούν μια τούρτα
- Η Alice προτιμά το κομμάτι με τη το λιλά λουλούδι (Εκτίμηση Κομματιού=70%)
- Ο Bob προτιμά το κίτρινο λουλούδι (Εκτίμηση Λουλουδιού=50%)
- **Κάθε άτομο αποτιμά την τούρτα με τις δικές του προτιμήσεις!**

Το Πρόβλημα στην Πληροφορική

- Η τούρτα αντιπροσωπεύει έναν πόρο που διαμοιράζεται μεταξύ χρηστών (ή επεξεργαστών)
 - Χρονοπρογραμματισμός διεργασιών
 - Διαμοιρασμός του χρόνου της CPU
 - Διαμοιρασμός του εύρους ζώνης της σύνδεσης με το δίκτυο
- Η Alice και ο Bob αντιπροσωπεύουν τους χρήστες
 - Κάθε χρήστης μπορεί να εκτιμά ένα συγκεκριμένο κομμάτι από την τούρτα (του πόρου) με διαφορετικό τρόπο.
 - Δεν είναι γνωστό πώς ο χρήστης εκτιμά διαφορετικά μέρη: Ο χρήστης μπορεί να αιτηθεί να **«κόψει»** κομμάτια της τούρτας σε συγκεκριμένες αναλογίες.
- **Σκοπός:** Να χωριστεί ο πόρος **«δίκαια»** μεταξύ των χρηστών.

Δικαιοσύνη

- **Στόχος:** Κάθε χρήστης πρέπει να **αισθάνεται ικανοποιημένος** με το κομμάτι της τούρτας που του αναλογεί
- **Ικανοποίηση Χρήστη:** Αν υπάρχουν N χρήστες τότε ένας χρήστης είναι ικανοποιημένος με μια κοπή τούρτας εάν έχει την "αίσθηση" ότι του αναλογεί τουλάχιστον το $1/N$ της τούρτας.
- **Δίκαιη Διαίρεση Τούρτας:** Η διαίρεση της τούρτας με την οποία **όλοι οι χρήστες να είναι ικανοποιημένοι.**

Άλλες μορφές Ικανοποίησης Χρηστών

- **Απλό Μοντέλο**: Κάθε χρήστης πιστεύει ότι λαμβάνει ένα κομμάτι της τούρτας με θετική τιμή.
- **Ελευθερία-Ζήλιας**: κάθε χρήστης πιστεύει ότι έχει τουλάχιστον τόσο μεγάλο κομμάτι όσο οι άλλοι χρήστες
- **Δυνατή Ελευθερία-Ζήλιας**: κάθε χρήστης πιστεύει ότι έχει μεγαλύτερο κομμάτι από τους άλλους χρήστες.
- **Super Ελευθερία-Ζήλιας**: κάθε χρήστης πιστεύει ότι κάθε χρήστης έχει το πολύ ένα ίσο κομμάτι.

Επίλυση Κοπής-Τούρτας

- Θεωρούμε ότι η τούρτα είναι ένα διάστημα $I = [0,1]$.
 - Κομμάτι της τούρτας: ένα υποδιάστημα στο $[0,1]$, και
 - Τμήμα της τούρτας: είναι μια συλλογή από κομμάτια
- Κάθε χρήστης χρησιμοποιεί μια **συνάρτηση αποτίμησης** για να εκτιμήσει ένα κομμάτι
 - Δεν γνωρίζει τη συνάρτηση αποτίμησης των άλλων χρηστών.
- Υπάρχει ένας **συντονιστής S** (ο πρόεδρος) ο οποίος **ελέγχει την κοπή της τούρτας και αναθέτει κομμάτια στους χρήστες**
 - **Δεν γνωρίζει τη συνάρτηση αποτίμησης των χρηστών.**
- **Πολυπλοκότητα:** Ορίζεται από τον αριθμό των κοπών που χρειαζόμαστε για να επιτευχθεί δίκαιη κατανομή της τούρτας.

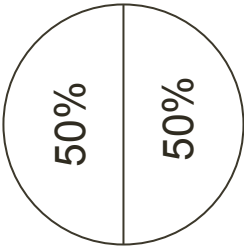
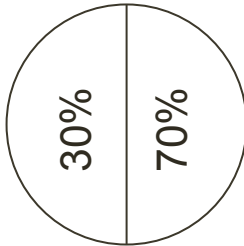
Κάτω Φράγματα στις «Κοπές»

- Απλό Μοντέλο: Χρειαζόμαστε $\Omega(N \log N)$ κοπές (η πιο αδύνατη συνθήκη)
- Μοντέλο Ελεύθερο-Ζήλιας: Επίσης $\Omega(N \log N)$ κοπές
- Δυνατή και Super Ελευθερία-Ζήλιας: Χρειάζονται $\Omega(N^2)$ κοπές

Αλγόριθμος 2 επεξεργαστών (Κόψε & Διάλεξε)

- Έστω ότι έχουμε τον συντονιστή S και δύο χρήστες $U1, U2$
- Βήμα 1: Ο S ζητά από τον $U1$ να κόψει την τούρτα σε δύο ίσα μέρη
- Βήμα 2: Ο S ζητά από τον $U2$ να επιλέξει το κομμάτι με την μεγαλύτερη αξία για εκείνον
- Βήμα 3: Ο S ζητά από τον $U1$ να πάρει το κομμάτι που έμεινε

Παράδειγμα Εκτέλεσης

User A	User B
	

- Έστω ότι έχουμε δύο χρήστες A και B
- S ζητά από τον A να κόψει την τούρτα σε 2 ίσα μέρη
- S ζητά από τον B να διαλέξει το κομμάτι με την μεγαλύτερη αξία.
- Ο S ζητά από τον U1 να πάρει το κομμάτι που έμεινε

Απόδειξη Δικαιοσύνης

- Ο Α κόβει την τούρτα σε 2 ίσα κομμάτια (σύμφωνα με την συνάρτηση αποτίμησής του) K_1 και K_2
 - $K_1(A) = \frac{1}{2}$
 - $K_2(A) = \frac{1}{2}$
- Ο Β αποτιμά τα κομμάτια διαφορετικά
 - $K_1(B) = x$
 - $K_2(B) = 1-x$
- Αφού ο Β επιλέγει το K_2 έπεται
 - $K_2(B) \geq K_1(B) \Rightarrow 1-x \geq x \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$
 - Άρα $K_2(B) \geq \frac{1}{2}$
- Επομένως ο Α πιστεύει ότι θα πάρει $K_1(A)=1/2$ της τούρτας και ο Β $K_2(B) \geq 1/2$ της τούρτας \Rightarrow Και οι δύο ικανοποιημένοι

Πολυπλοκότητα Αλγορίθμου

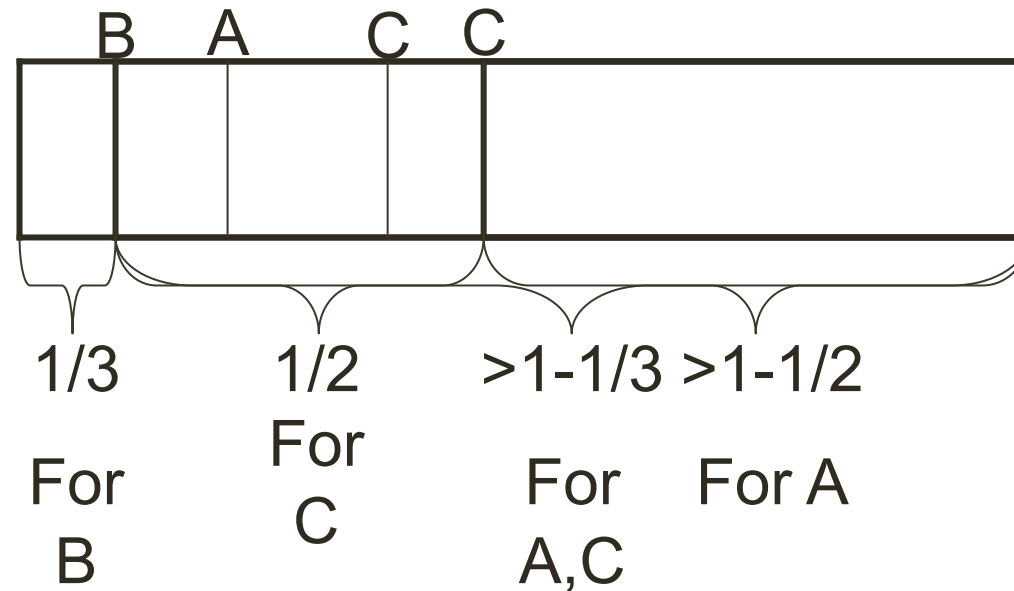
- Ο αλγόριθμος 2 Κόψε & Διάλεξε χρειάζεται μόνο **μια κοπή** (βέλτιστος)
- **Πως θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα με 3 επεξεργαστές;**

Αλγόριθμος 3 επεξεργαστών (Κλάδεμα)

- Έστω ότι έχουμε τον συντονιστή S και τρεις χρήστες $U1, U2, U3$
- Βήμα 1: Ο S ζητά από όλους να κόψουν ένα κομμάτι που κατά τη γνώμη τους αντιστοιχεί στο $1/3$ της τούρτας
- Βήμα 2: Ο S ζητά από τον χρήστη που έκοψε το πιο μικρό κομμάτι να το πάρει
- Βήμα 3: Ο S ζητά από τους υπόλοιπους χρήστες να εφαρμόσουν τον αλγόριθμο Κόψε & Διάλεξε στο κομμάτι που έμεινε

Παράδειγμα Εκτέλεσης

- Έστω ότι έχουμε τους χρήστες A, B, C



Απόδειξη Δικαιοσύνης

- Αρχικά όλοι κόβουν την τούρτα στο σημείο που θεωρούν ότι αξίζει $1/3$. Επομένως ο B θεωρεί ότι πήρε κομμάτι
 - $K1(B) = 1/3$
- Αφού το κομμάτι του ήταν το πιο μικρό σημαίνει ότι η υπόλοιπη τούρτα αξίζει $> 1-1/3$ για τους A και C
- Ο C ακολούθως μοιράζει στα δύο το υπόλοιπο της τούρτας άρα για τον C το κάθε κομμάτι αξίζει
 - $K2(C)=K3(C)>1/2 (1-1/3) \Rightarrow K2(C)=K3(C)>1/3$
- Αφού ο A επιλέγει το K3 έπεται
 - $K3(A) \geq \frac{1}{2} (1-1/3) > 1/3$
- Επομένως οι A και C πιστεύουν ότι θα πάρουν $>1/3$ της τούρτας και ο B $1/3$ της τούρτας \Rightarrow Και οι τρεις ικανοποιημένοι

Αλγόριθμος N επεξεργαστών (Κλάδεμα)

- Έστω ότι έχουμε τον συντονιστή S και N χρήστες U_1, \dots, U_N

- Βήμα 1: Ο S ζητά από όλους να κόψουν ένα κομμάτι που κατά τη γνώμη τους αντιστοιχεί στο $1/N$ της τούρτας
- Βήμα 2: Ο S ζητά από τον χρήστη που έκοψε το πιο μικρό κομμάτι να το πάρει
- Βήμα 3: Ο S ζητά από τους υπόλοιπους χρήστες να επαναλάβουν τον αλγόριθμο για $N-1$ στο υπόλοιπο κομμάτι της τούρτας

Πολυπλοκότητα Αλγορίθμου Κλαδέματος

- Χρειαζόμαστε $N, N-1, N-2, \dots, 1$ κοπές

- Επομένως

$$\text{Αριθμός Κοπών} = (N(N+1)/2) - 1 = O(N^2)$$

- Υπάρχει πιο αποδοτικός αλγόριθμος;

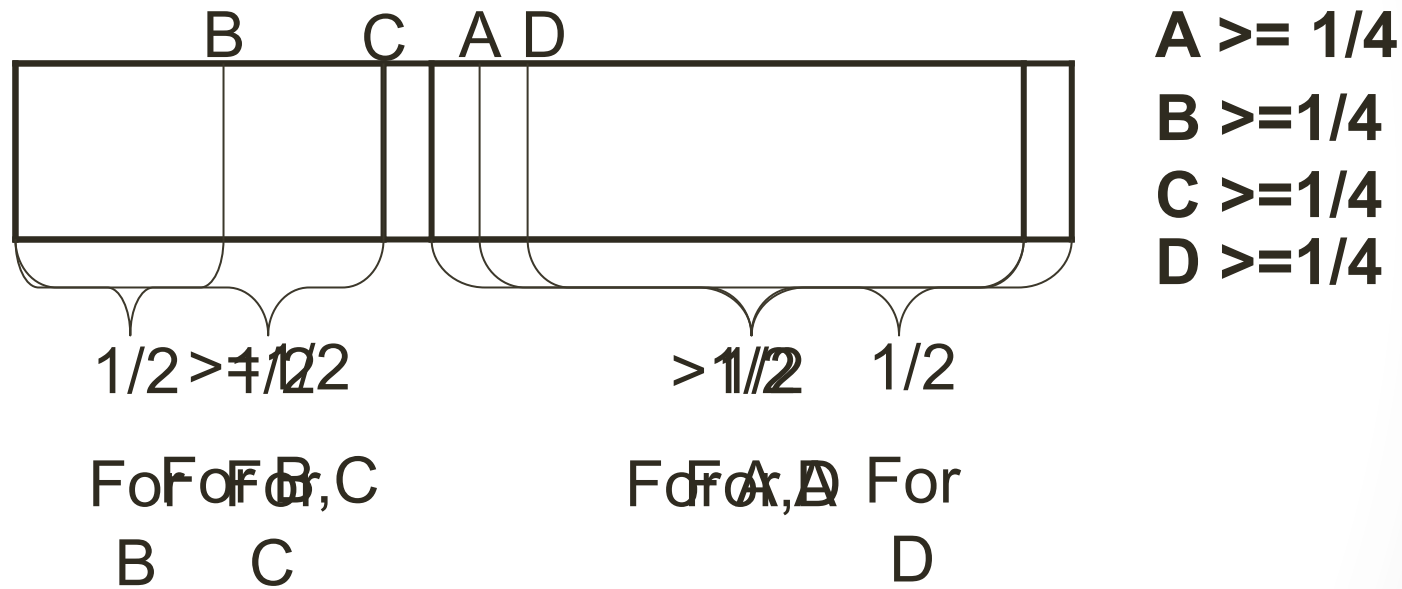
Αλγόριθμος N επεξεργαστών (Διαίρει & Βασίλευε)

- Έστω ότι έχουμε τον συντονιστή S και N χρήστες U_1, \dots, U_N

- Βήμα 1: Ο S ζητά από όλους να κόψουν ένα κομμάτι που κατά τη γνώμη τους αντιστοιχεί στο $1/2$ της τούρτας
- Βήμα 2: Ο S ζητά από τους $N/2$ χρήστες με τις μικρότερες κοπές να επαναλάβουν τον αλγόριθμο στο **αριστερό «μισό»** της τούρτας
- Βήμα 3: Ο S ζητά από τους υπόλοιπους $N/2$ χρήστες να επαναλάβουν τον αλγόριθμο στο **δεξί «μισό»** της τούρτας

Παράδειγμα Εκτέλεσης

- Για $N=4$



Πολυπλοκότητα Διαίρει & Βασίλευε

- Χρειαζόμαστε N κοπές σε κάθε γύρο εκτέλεσης των βημάτων
- Σε $\log N$ γύρους κάθε επεξεργαστής θα είναι μόνος του σε κάποιο κομμάτι.
- Επομένως

$$\text{Αριθμός Κοπών} = O(N \log N)$$

Ερωτήσεις;

