

Διάλεξη 5: Κάτω Φράγμα για Αλγόριθμους Εκλογής Προέδρου

ΕΠΛ 432: Κατανεμημένοι Αλγόριθμοι



Κάτω Φράγμα στον Αριθμό Μηνυμάτων

- Ένας οποιοσδήποτε αλγόριθμος εκλογής προέδρου A ο οποίος
 1. Δουλεύει σε ασύγχρονο δακτύλιο
 2. Είναι ομοιόμορφος
 3. Εκλέγει σαν πρόεδρο τον επεξεργαστή με το μέγιστο AT
 4. Εγγυάται ότι όλοι μαθαίνουν τον AT του προέδρουέχει πολυπλοκότητα μηνυμάτων $\Omega(n \lg n)$.
- Συνθήκη 1: Απαραίτητη για να ισχύει το κάτω φράγμα
- Συνθήκη 2: Απαραίτητη για την συγκεκριμένη απόδειξη (το φράγμα ισχύει έστω κι αν ο αλγόριθμος δεν είναι ομοιόμορφος)
- Συνθήκες 3-4 τίθενται χωρίς βλάβη της γενικότητας
 - Όποιος αλγόριθμος δεν τις ικανοποιεί μπορεί να μετατραπεί σε έναν που τις ικανοποιεί με $O(n)$ επιπρόσθετα μηνύματα

Ανοικτές Εκτελέσεις

- Ανοικτή Εκτέλεση: Μια εκτέλεση είναι ανοικτή αν υπάρχει μια ακμή στην οποία δεν παραλαμβάνονται καθόλου μηνύματα
- Ανοικτή Ακμή: Η ακμή στην οποία δεν παραλαμβάνονται μηνύματα.
- Ανοικτή Εκτέλεση \neq Νόμιμη Εκτέλεση
 - Είναι **πρόθεμα νόμιμης εκτέλεσης**, μπορεί δηλαδή να επεκταθεί σε νόμιμη εκτέλεση
 - Μπορεί να είναι **πεπερασμένη**
 - Μπορεί να περιέχει **επεξεργαστές που δεν τερμάτισαν**

Βασικό αποτέλεσμα

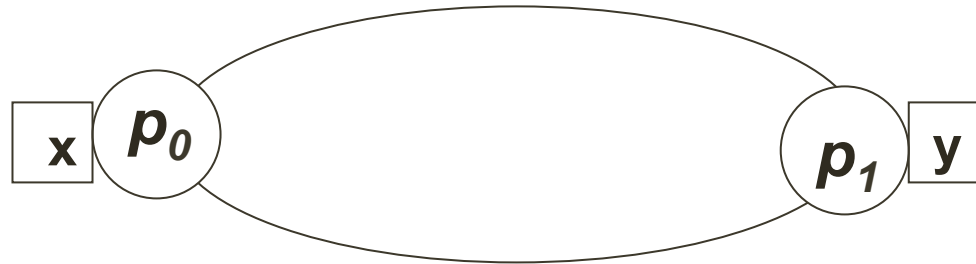
Θεώρημα: Για κάθε n που είναι **δύναμη του 2** και για κάθε σύνολο S από n ΑΤ, υπάρχει δακτύλιος με επεξεργαστές που έχουν αυτούς τους ΑΤ, πάνω στον οποίο κάθε **ομοιόμορφος ασύγχρονος αλγόριθμος** εκλογής προέδρου έχει μια **ανοικτή εκτέλεση** στην οποία **στέλνονται τουλάχιστον** $M(n)$ μηνύματα όπου:

- Για $n=2$: $M(2) = 1$, και
- Για $n>2$: $M(n) = 2M(n/2) + (n/2 - 1)/2$

Ιδέα Κάτω Φράγματος

- Το κάτω φράγμα χαρακτηρίζεται από την αναδρομική σχέση $M(n)$:
 - Λύνοντας την σχέση πέρνουμε ότι $M(n) = \Theta(n \lg n)$
- Απόδειξη με επαγωγή
 - Διπλασιάζουμε το μέγεθος του δακτυλίου σε κάθε βήμα \Rightarrow θα κάνουμε επαγωγή πάνω στον εκθέτη του 2
- Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν ανοικτές εκτελέσεις που είναι ακριβές σε μηνύματα. Θα ξεκινούμε με 2 μικρούς δακτύλιους με πολλά μηνύματα ($2 * M(n/2)$) και με αυτούς θα κατασκευάζουμε μεγαλύτερο δακτύλιο που θα χρειάζεται $n/4$ επιπλέον μηνύματα να σταλούν.

Βάση επαγωγής



- Βασική περίπτωση: $n = 2$
- Υποθέτουμε ότι $x > y$
- Λόγω της Συνθήκης 3, ο p_0 θα εκλεγεί πρόεδρος
- Λόγω της Συνθήκης 4, ο p_0 πρέπει να στείλει τουλάχιστον ένα μήνυμα στον p_1 , για να μάθει ότι το AT του προέδρου είναι x
- Κόβουμε την εκτέλεση μετά την παραλαβή του μηνύματος για να πάρουμε μια ανοικτή εκτέλεση.

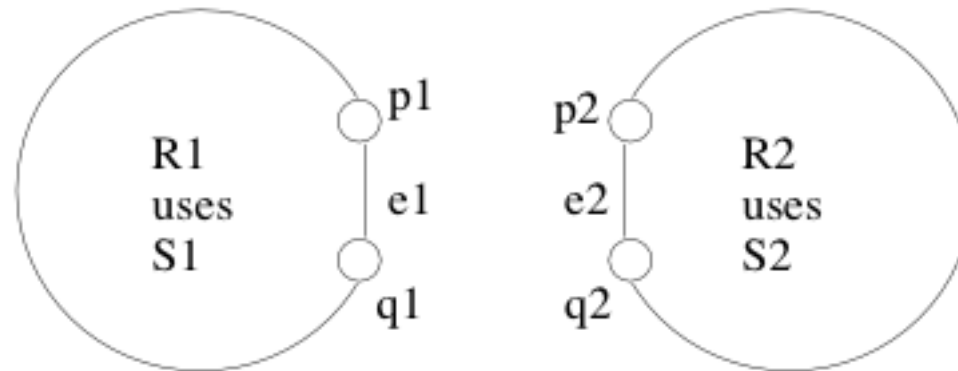
Επαγωγική Υπόθεση

- Έστω ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $n=2^{k-1}$, για $k>2$
- Δηλαδή:
 - Μπορούμε να βρούμε μια ανοικτή εκτέλεση σε ένα δακτύλιο με $n=2^{k-1}$ διαφορετικές ταυτότητες όπου αποστέλλονται τουλάχιστον

$$M(n) = 2M(n/2) + (n/2 - 1)/2$$

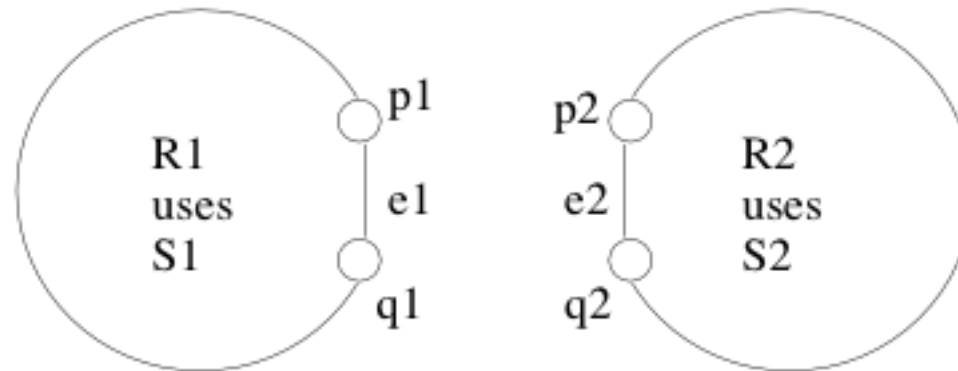
Επαγωγικό Βήμα

- Θέλουμε να δείξουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $n=2^k$, για $k>2$
- Διαχώρισε το σύνολο AT S σε δύο ίσα σύνολα, S_1 και S_2
 - Αφού $|S|=2^k$, $|S_1|=|S_2|=2^k/2=2^{k-1}$
- Δημιουργούμε δύο δακτύλιους, R_1 και R_2 από τα S_1 και S_2 :



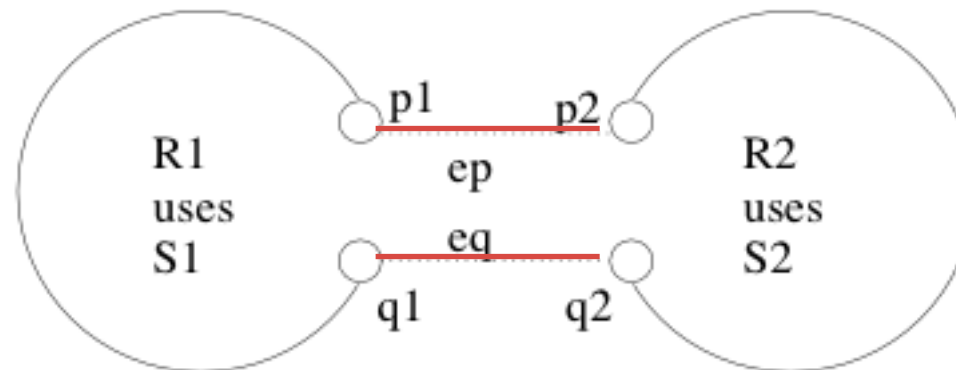
Εφαρμογή Επαγωγικής Υπόθεσης

- Από την επαγωγική υπόθεση έπεται:
 - Υπάρχει μια ανοικτή εκτέλεση α_1 για τον R_1 στην οποία αποστέλλονται τουλάχιστον $M(n/2)$ μηνύματα και η $e_1 = (p_1, q_1)$ είναι μια ανοικτή ακμή.
 - Υπάρχει μια ανοικτή εκτέλεση α_2 για τον R_2 στην οποία αποστέλλονται τουλάχιστον $M(n/2)$ μηνύματα και η $e_2 = (p_2, q_2)$ είναι μια ανοικτή ακμή.



Ένωση δύο Δακτυλίων

- Ενώνουμε τους δακτύλιους R_1 και R_2 στις ανοικτές ακμές τους για να δημιουργήσουμε τον μεγαλύτερο δακτύλιο R
 - Παρατήρηση: Ο νέος δακτύλιος έχει $n=2^k$ ΑΤ
- Στόχος: Να παράξουμε εκτέλεση στον R με $M(n)$ μηνύματα...



Ένωση δύο Εκτελέσεων

- Πρώτα κατασκευάζουμε μια εκτέλεση $\alpha_1\alpha_2$ που περιλαμβάνει τις δύο εκτελέσεις πάνω στους δυο δακτύλιους
- Πρώτα τρέξε α_1 : Λόγω της **ομοιομορφίας (συνθήκη 2)** οι επεξεργαστές στα αριστερά δεν μπορούν να ξεχωρίσουν αν βρίσκονται στον R_1 ή στον R . Έτσι θα συμπεριφερθούν το ίδιο και θα στείλουν $M(n/2)$ μηνύματα στον R .
- Ακολούθως τρέξε την α_2 : Λόγω της **ομοιομορφίας (συνθήκη 2)** οι επεξεργαστές στα δεξιά δεν μπορούν να ξεχωρίσουν αν βρίσκονται στον R_2 ή στον R . Έτσι θα συμπεριφερθούν το ίδιο και θα στείλουν $M(n/2)$ μηνύματα στον R .

Επέκταση Εκτέλεσης

- Τώρα έχουμε $2 * M(n/2)$ μηνύματα.
- Στόχος: Επέκταση της εκτέλεσης ώστε να πάρουμε μια ανοικτή εκτέλεση και να αποσταλούν επιπλέον $(n/2 - 1)/2$ μηνύματα.
- Υπάρχουν 3 περιπτώσεις:
 1. Να μην ξεμπλοκάρω καμιά από τις 2 ακμές e_p ή e_q
 - Αυτό θα αποτρέψει την αποστολή καινούριων μηνυμάτων
 2. Να ξεμπλοκάρω και τις 2 ακμές e_p ή e_q
 - Αυτό θα αποτρέψει την κατασκευή ανοικτής εκτέλεσης
 3. Να ξεμπλοκάρω μια από τις 2 ακμές e_p ή e_q
 - Αυτό θα μας οδηγήσει στην επιθυμητή ανοικτή εκτέλεση

Ήσυχη Διάταξη

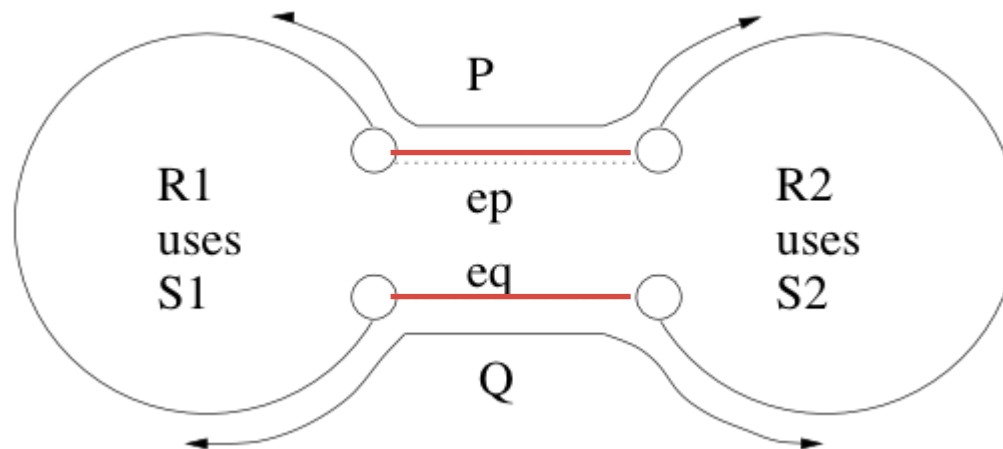
- Χωρίς να ξεμπλοκάρουμε τις ακμές κάθε επέκταση της εκτέλεσης $\alpha_1\alpha_2$ οδηγεί σε μια ήσυχη διάταξη όπου:
 - Κανένας επεξεργαστής δεν θα στείλει άλλο μήνυμα πριν παραλάβει μήνυμα, και
 - Δεν υπάρχουν μετεπιβιβαζόμενα μηνύματα εκτός πάνω στις ακμές e_p και e_q
- Έστω α_3 η επέκταση της $\alpha_1\alpha_2$ που οδηγεί σε ήσυχη διάταξη

Επέκταση σε Τερματική Διάταξη

- Η εκτέλεση $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ μπορεί να επεκταθεί από μια εκτέλεση α_4'' έτσι ώστε η εκτέλεση $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4''$ να μας οδηγεί σε τερματική κατάσταση.
- Τουλάχιστον $n/2$ μηνύματα αποστέλλονται στην α_4''
 - Κάθε ένας από τους επεξεργαστές στο μισό μέρος του R που δεν περιέχει τον πρόεδρο πρέπει να πάρει μήνυμα με το AT του προέδρου (λόγω της συνθήκης 4)
 - Πριν από την α_4'' δεν υπήρξε καμιά επικοινωνία μεταξύ των μερών
- *Η $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4''$ μπορεί να μην είναι ανοικτή αφού μπορεί να αποστέλλονται μηνύματα από e_p και e_q . Άρα δεν είναι η εκτέλεση που ψάχνουμε.*

Κατασκευή Ανοικτής Εκτέλεσης

- Τι συμβαίνει κατά τη αποστολή μηνυμάτων από τις ακμές e_p και e_q κατά την εκτέλεση $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4''$;
- Οι επεξεργαστές που λαμβάνουν αυτά τα μηνύματα «ξυπνούν» από την ήσυχη κατάσταση που βρίσκονταν στο τέλος της α_3
 - Πρώτοι ξυπνούν οι επεξεργαστές που γειτνιάζουν τις e_p και e_q
 - P, Q : σύνολα επεξεργαστών που ξυπνούν από μηνύματα που προέρχονται από την e_p και e_q αντίστοιχα.



Κατασκευή Ανοικτής Εκτέλεσης

- Παίρνουμε τώρα ένα πρόθεμα, έστω α_4' , της εκτέλεσης α_4'' όπου έχουν αποσταλεί μόνο $(n/2)-1$ μηνύματα.
 - Τα σύνολα P και Q δεν περιέχουν κοινούς επεξεργαστές (Γιατί;)
 - Περιέχουν συνολικά λιγότερους από $n/2$ επεξεργαστές
 - Ένας δακτύλιος περιέχει ακριβώς $n/2$ επεξεργαστές
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι τα μισά από τα μηνύματα αυτά, $((n/2)-1)/2$, στέλνονται από μέλη του P στην εκτέλεση α_4'

Κατασκευή Ανοικτής Εκτέλεσης

- Έστω α_4 τώρα είναι ένα πρόθεμα τις α_4' που περιέχει μόνο τα γεγονότα που συμβαίνουν από επεξεργαστές στο σύνολο P
- Ισχυρισμός: Οι επεξεργαστές στο P δεν μπορούν να ξεχωρίσουν την εκτέλεση $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ από την εκτέλεση $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4'$ (Γιατί;)
 - Αφού οι P και Q είναι ξένα οι επεξεργαστές στο P δεν θα λάβουν μηνύματα από κανένα στο Q και έτσι δεν θα αντιληφθούν ότι είναι ανενεργοί στην εκτέλεση $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$
 - Άρα οι επεξεργαστές στο P θα συμπεριφερθούν το ίδιο στην $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ όπως και στην $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4'$

Κατασκευή Ανοικτής Εκτέλεσης

- Λόγω **ασυγχρονίας (συνθήκη 1)** μπορούμε να πάρουμε την εκτέλεση $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$
- Αφού οι επεξεργαστές του P δεν ξεχωρίζουν την α_4 από την α_4' τότε θα στείλουν $((n/2)-1)/2$ μηνύματα στην α_4
- Επομένως η εκτέλεση $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ είναι αυτή που αναζητούμε
 - Συνολικά στέλνονται $2M(n/2)+(n/2 -1)/2$
 - Στέλνονται $M(n/2)$ κατά την α_1
 - Στέλνονται $M(n/2)$ κατά την α_2
 - Στέλνονται $((n/2)-1)/2$ κατά την α_4
 - Είναι ανοικτή εκτέλεση αφού δεν στέλνονται μηνύματα στην e_q

Επισκόπηση

- Κατασκευάσαμε μια ανοικτή εκτέλεση η οποία μπορεί να επεκταθεί σε κάποια νόμιμη εκτέλεση αλγορίθμου εκλογής προέδρου.

$$- \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \rightarrow \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4' \rightarrow \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4''$$

- Αυτό συνεπάγεται ότι:

Μπορούμε να πάρουμε μια ανοικτή εκτέλεση με τουλάχιστον $n \lg n$ μηνύματα για οποιονδήποτε αλγόριθμο εκλογής προέδρου στο ασύγχρονο μοντέλο ανταλλαγής μηνυμάτων

Ερωτήσεις;

