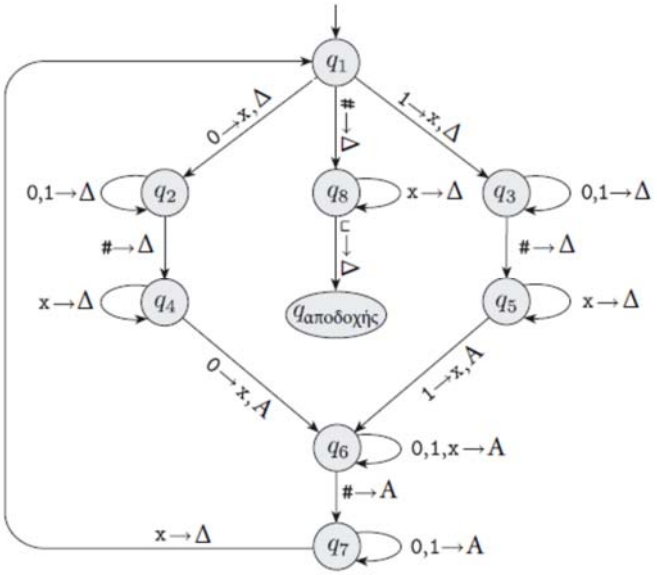
Φροντιστήριο 8 – Λύσεις

Άσκηση 1

Θεωρήστε την πιο κάτω Μηχανή Turing.



Σε κάθε σκέλος, να προσδιορίσετε την ακολουθία των φάσεων τις οποίες διατρέχει η μηχανή όταν δέχεται τη διδόμενη λέξη.

(α) 11

(β) 1#1

(γ) 1##1

Λύση

Θεωρούμε ότι όλες οι μεταβάσεις που απουσιάζουν, οδηγούν στην κατάσταση απόρριψης $q_{απόρριψη}$. Για παράδειγμα $\delta(q_3,⊔) = (q_{απόρριψη},⊔, Δ)$

(α) $q_1 11 \rightarrow xq_3 1 \rightarrow x1q_3 \rightarrow x1⊔q_{reject}$

(β) $q_1 1\#1 \rightarrow xq_3\#1 \rightarrow x\#q_5 1 \rightarrow x\#q_5 1 \rightarrow xq_6\#x \rightarrow q_7 x\#x$

$\rightarrow xq_1\#x \rightarrow x\#q_8 x \rightarrow x\#xq_8 \rightarrow x\#x⊔q_{αποδοχή}$

(γ) $q_1 1\#\#1 \rightarrow xq_3\#\#1 \rightarrow x\#q_5\#1 \rightarrow x\#\#q_{απόρριψη}1$

Άσκηση 2

Να εξηγήσετε γιατί η ακόλουθη ΤΜ δεν είναι καλά ορισμένη.

$M_{εσφαλμένη}$ = 'Για είσοδο *p*, *p* ένα πολυώνυμο των μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_k$:

1. **Βρίσκουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ακέραιων τιμών των $x_1, x_2, \ldots, x_k$.**

2. **Υπολογίζουμε την τιμή του *p* για κάθε ένα από αυτούς**
3. **Αν για κάποιο συνδυασμό το *p* ισούται με 0, *αποδεχόμαστε*, διαφορετικά, *απορρίπτουμε.'***

<u>Λύση</u>

Η περιγραφή αυτή δεν είναι νόμιμη αφού τόσο το πρώτο όσο και το δεύτερο βήμα αναφέρονται σε εργασίες οι οποίες απαιτούν μη πεπερασμένο χρόνο για να ολοκληρωθούν. Συγκεκριμένα οι δυνατοί συνδυασμοί ακέραιων τιμών για τις μεταβλητές x_1, x_2, …, x_k είναι άπειροι. Επομένως, το βήμα 1 της $M_{εσφαλμένη}$ που θέτει ως στόχο την εύρεση αυτών των συνδυασμών δεν θα τερματίσει ποτέ και η ροή της εκτέλεσης δεν θα προχωρήσει ποτέ στα βήματα 2 και 3.

(Τα βήματα σε αφ'υψηλού περιγραφές μηχανών Turing, όπως επίσης και στην περιγραφή αλγορίθμων, οφείλουν να τερματίζουν μέσα σε πεπερασμένο χρόνο.)

<u>Άσκηση 3</u>

Να διατυπώσετε μια λεπτομερή περιγραφή κάποιας TM που να διαγιγνώσκει την ακόλουθη γλώσσα. Στη συνέχεια να αναπτύξετε την περιγραφή σας σε μια τυπική περιγραφή.

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{η } w \text{ περιέχει διπλάσια 0 από 1}\}$$

<u>Λύση</u>

Η λεπτομερής περιγραφή της ζητούμενης TM έχει ως εξής:

M = 'Με δεδομένο w:

1. Αν w = ε, τότε αποδέξου τη λέξη.
2. Προχώρησε δεξιά μέχρι να βρεις το πρώτο 1. Αν δεν βρεις κάποιο 1 προχώρησε στο Βήμα 5. Διαφορετικά, διάγραψε το 1 και επέστρεψε στην αρχή της ταινίας.
3. Προχώρησε δεξιά μέχρι να βρεις το πρώτο 0. Αν δεν βρεις κάποιο 0 απόρριψε τη λέξη. Διαφορετικά διάγραψε το 0.
4. Προχώρησε δεξιά μέχρι να βρεις το επόμενο 0. Αν δεν βρεις κάποιο 0 απόρριψε τη λέξη. Διαφορετικά διάγραψε το 0, επέστρεψε στην αρχή της ταινίας και επανάλαβε από το Βήμα 2.
5. Επέστρεψε στην αρχή της ταινίας.
6. Διάσχισε την ταινία. Αν βρεις κάποιο 0 απόρριψε διαφορετικά αποδέξου τη λέξη.

Μετατρέπουμε την πιο πάνω περιγραφή σε μια τυπική περιγραφή ως εξής:

$M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_{αποδοχή}, q_{απόρριψη}\},$	οι καταστάσεις
$\{0,1\},$	το αλφάβητο εισόδου
$\{0,1, \sqcup, X\},$	το αλφάβητο ταινίας
$\delta,$	συνάρτηση μεταβάσεων
$q_1,$	η αρχική κατάσταση
$q_{αποδοχή},$	η κατάσταση αποδοχής
$q_{απόρριψη}$	η κατάσταση απόρριψης
)	

όπου η συνάρτηση μεταβάσεων δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	Σύμβολο ταινίας				
Κατάσταση	**0**	**1**	**#**	**X**	⊔
q_1	q_2,#,Δ	q_3,#,Δ	q_{rej},⊔,Δ	q_{rej},⊔,Δ	q_{acc},⊔,Δ
q_2	q_2,0,Δ	q_2,1,Δ	q_{rej},⊔,Δ	q_{rej},⊔,Δ	q_4,0,A
q_3	q_3,0,Δ	q_3,1,Δ	q_{rej},⊔,Δ	q_{rej},⊔,Δ	q_4,1,A
q_4	q_4,0,A	q_4,1,A	q_5,#,Δ	q_4,X,A	q_4,⊔,A
q_5	q_6,0,Δ	q_7,X,A	q_{rej},⊔,Δ	q_5,X,Δ	q_{acc},⊔,Δ
q_6	q_6,0,Δ	q_7,X,A	q_{rej},⊔,Δ	q_6,X,Δ	q_{rej},⊔,Δ
q_7	q_7,0,A	q_7,1,A	q_8,#,Δ	q_7,X,A	q_7,⊔,A
q_8	q_9,X,Δ	q_8,1,Δ	q_{rej},⊔,Δ	q_8,X,Δ	q_{rej},⊔,Δ
q_9	q_4,X,A	q_9,1,Δ	q_{rej},⊔,Δ	q_9,X,Δ	q_{rej},⊔,Δ

Επεξήγηση: Οι καταστάσεις q_1, q_2, και q_3 χρησιμοποιούνται για να γράψουν το σύμβολο # στην αρχή της ταινίας (δίνοντας μας έτσι τη δυνατότητα να την αναγνωρίζουμε) και να μεταφέρουν το στοιχείο που χάθηκε από την πρώτη θέση στο τέλος της ταινίας. Το μονοπάτι q_1, q_2, q_4 χρησιμοποιείται στην περίπτωση που το πρώτο σύμβολο της ταινίας είναι το 0 (στην περίπτωση αυτή γράφουμε 0 στο τέλος της ταινίας όπως διαφαίνεται στη μετάβαση (q_2, q_4)), ενώ το μονοπάτι q_1, q_3, q_4 χρησιμοποιείται στην περίπτωση που το πρώτο σύμβολο της ταινίας είναι το 1.

Στη συνέχεια έχουμε τα εξής:

Κατάσταση q_4: Γράψαμε # στην αρχή της ταινίας και μεταφέραμε το στοιχείο της θέσης αυτής στο τέλος της ταινίας. Θα επιστρέψουμε στην αρχή της ταινίας.

Κατάσταση q_5: Επιστρέψαμε στην αρχή της ταινίας και ψάχνουμε το πρώτο 1, προσπερνώντας όποια X συναντήσουμε. Αν φτάσουμε στο τέλος της ταινίας (σύμβολο ⊔) χωρίς να εντοπίσουμε 0 ή 1 προχωρούμε στην κατάσταση αποδοχής.

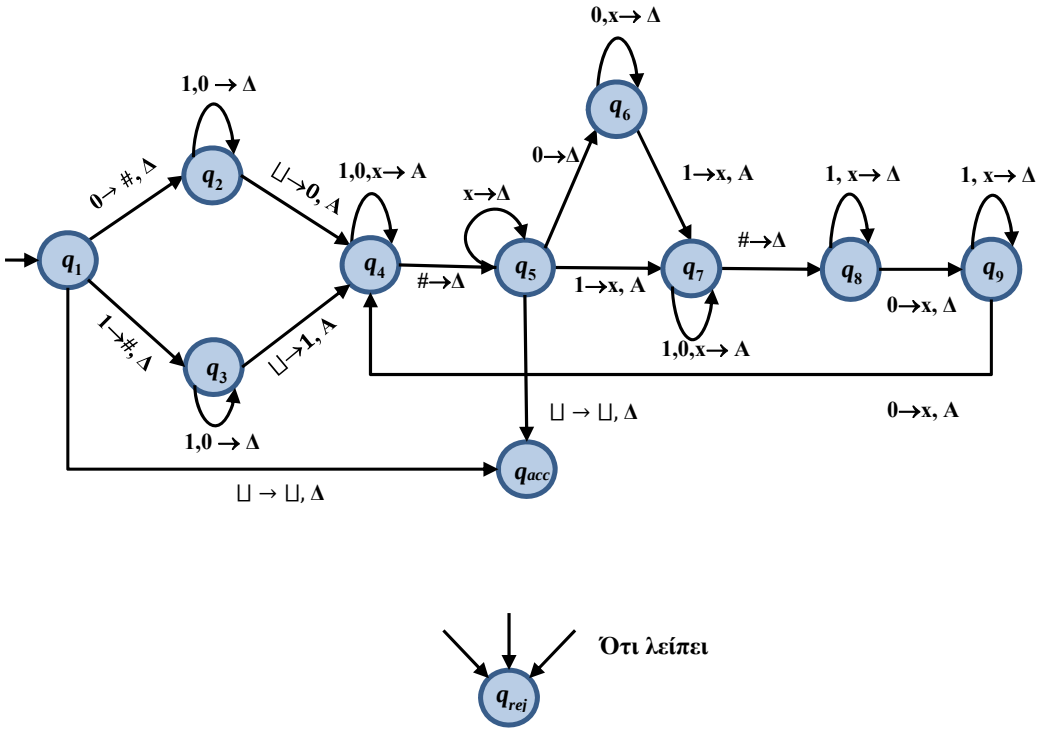
Κατάσταση q_6: Έχουμε διαβάσει τουλάχιστον ένα 0 και ψάχνουμε ένα 1. Προσπερνούμε όποια X και 0 συναντήσουμε.

Κατάσταση q_7: Έχουμε βρει και διαγράψει ένα 1 και θα επιστρέψουμε στην αρχή της ταινίας.

Κατάσταση q_8: Επιστρέψαμε στην αρχή της ταινίας και ξεκινούμε μια διάσχιση για να βρούμε και να διαγράψουμε δύο 0.

Κατάσταση q_9: Έχουμε βρει και διαγράψει ένα 0 και συνεχίζουμε τη διάσχιση μέχρι να βρούμε και να διαγράψουμε ακόμη ένα 0.

Ακολουθεί η μηχανή σχηματικά. Από αυτήν παραλείπονται όλες οι ακμές που οδηγούν στην κατάσταση απόρριψης.



<u>Άσκηση 4</u>

Μια μηχανή Turing αριστερής επαναφοράς είναι παρόμοια με μια συνήθη TM με τη διαφορά ότι η συνάρτηση μεταβάσεων έχει τη μορφή

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\Delta, E\}$$

Αν δ(q,a) = (r,b,E), τότε, όποτε η ταινία βρίσκεται στην κατάσταση q και διαβάζει το σύμβολο a, μεταβαίνει στην κατάσταση r, γράφει στην ταινία το σύμβολο b και επαναφέρει την κεφαλή της στο αριστερότερο άκρο της ταινίας. Επομένως, η μηχανή μπορεί να μετακινήσει την κεφαλή της είτε μία θέση προς τα δεξιά είτε στην αρχή της ταινίας (και όχι μία θέση προς τα αριστερά). Να δείξετε ότι αυτή η παραλλαγή των TM είναι ισοδύναμη με το απλό μοντέλο.

<u>Λύση</u>

- Η μία κατεύθυνση είναι εύκολη. Συγκεκριμένα, είναι εύκολο να δείξουμε ότι οι απλές μηχανές Turing μπορούν να προσομοιώσουν τις μηχανές Turing αριστερής επαναφοράς: Η ισοδύναμη απλή μηχανή θα πρέπει να ξεκινήσει σημαδεύοντας το σύμβολο στην πρώτη θέση της ταινίας και, στη συνέχεια, να αντικαταστήσει κάθε μετάβαση δ(q,a) = (r,b,E) με μια ακολουθία μεταβάσεων η οποία θα μετακινήσει την κεφαλή αριστερά μέχρι την πρώτη θέση (σεσημασμένο στοιχείο) αφήνοντας τα στοιχεία που διαβάζει ανέπαφα.
- Για την αντίθετη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται μια απλή μηχανή Turing και θέλουμε να κατασκευάσουμε μια ισοδύναμη μηχανή Turing αριστερής επαναφοράς. Για να το πετύχουμε, θα πρέπει να εντοπίσουμε μια μέθοδο μέσω της οποίας να προσομοιώσουμε τη μετακίνηση 'μια θέση αριστερά από την

παρούσα' χρησιμοποιώντας την αριστερή επαναφορά. Έχοντας στη διάθεσή μας μια τέτοια μέθοδο, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε κάθε κίνηση 'Α' της απλής μηχανής με τη συγκεκριμένη μέθοδο στη μηχανή αριστερής επαναφοράς. Η ζητούμενη μέθοδος υλοποιείται από τον πιο κάτω αλγόριθμο:

Υπογραμμίζουμε την πρώτη θέση, έτσι ώστε να γνωρίζουμε που βρίσκεται η αρχή της ταινίας. Έστω ότι θέλουμε να μετακινήσουμε την κεφαλή της ταινίας μια θέση αριστερά από την παρούσα θέση:

1. Αν το στοιχείο είναι υπογραμμισμένο, τότε βρισκόμαστε στην αρχή της ταινίας και δεν χρειάζεται να κάνουμε τίποτα.
2. Διαφορετικά, τοποθετούμε το σύμβολο ^ πάνω από το στοιχείο της παρούσας θέσης.
3. Μετακινούμαστε στην αρχή της ταινίας (κίνηση αριστερής επαναφοράς Ε) και τοποθετούμε το σύμβολο * πάνω από αυτή.
4. Μετακινούμαστε στην αρχή της ταινίας και προχωρούμε μέχρι να βρούμε τη θέση με το *.
5. Προχωρούμε μια θέση δεξιά.
6. Αν η θέση στην οποία βρισκόμαστε είναι σεσημασμένη με ^, τότε η θέση που ψάχνουμε είναι η θέση με το *.
7. Διαφορετικά, αν η θέση στην οποία βρισκόμαστε δεν είναι σεσημασμένη τη σημαδεύουμε με *, επανερχόμαστε στην αρχή, προχωρούμε μέχρι να βρούμε το πρώτο στοιχείο με * και σβήνουμε το *. Επαναλαμβάνουμε από το βήμα 4.

Η βασική ιδέα του αλγόριθμου είναι να σημαδέψει τη θέση από την οποία ξεκινούμε με ^ και στη συνέχεια, ξεκινώντας από την αρχή, να σημαδεύει μια-μια θέσεις με *, πρώτα την πρώτη, μετά τη δεύτερη, και ούτω καθεξής, μέχρι η θέση που είναι σημαδεμένη με * να βρίσκεται μια θέση αριστερά από τη θέση που είναι σημαδεμένη με ^. Τότε, η θέση που ψάχνουμε είναι αυτή που έχει το *.