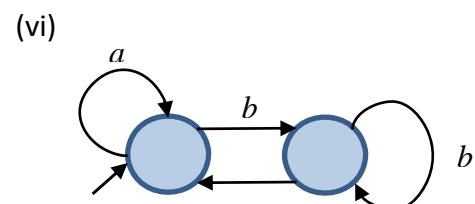
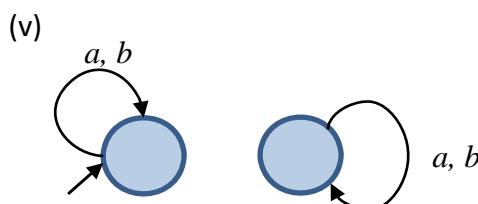
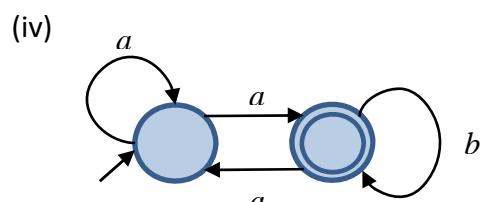
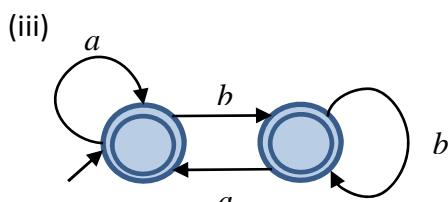
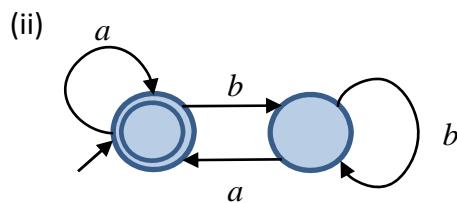
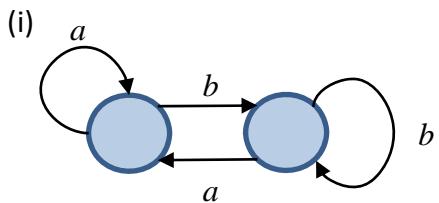


Φροντιστήριο 2 – Λύσεις

Άσκηση 1

Ποια από τα πιο κάτω αυτόματα αποτελούν DFA επί του αλφάβητου $\{a,b\}$. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



Λύση

- (i) Όχι, δεν υπάρχει αρχική κατάσταση.
- (ii) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.
- (iii) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.
- (iv) Όχι, στην αρχική κατάσταση ξεκινούν δυο ακμές με σύμβολο a και καμιά με b .
- (v) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.
- (vi) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.

Άσκηση 2

Για κάθε μια από τις πιο κάτω γλώσσες, να κατασκευάσετε αυτόματο επί του αλφάβητου $\{a,b\}$ που να την αναγνωρίζει. Σε κάθε περίπτωση να δείχνετε (1) τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου και (2) το διάγραμμα καταστάσεων.

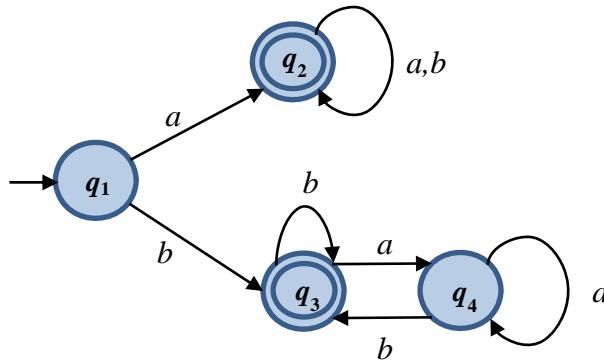
- (α) $\{w \mid \eta \text{ w αρχίζει από } a \text{ ή τελειώνει σε } b\}$
- (β) $\{w \mid \eta \text{ w περιέχει την υπολέξη } aba\}$
- (γ) $\{w \mid \eta \text{ w αρχίζει με την υπολέξη } aba\}$
- (δ) $\{w \mid \eta \text{ w τελειώνει με την υπολέξη } aba\}$
- (ε) $\{w \mid \eta \text{ w δεν περιέχει την υπολέξη } aba\}$

Λύση

(α) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a,b\}, \delta, \{q_1\}, \{q_2, q_3\})$ όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a	b
q_1	q_2	q_3
q_2	q_2	q_2
q_3	q_4	q_3
q_4	q_4	q_3

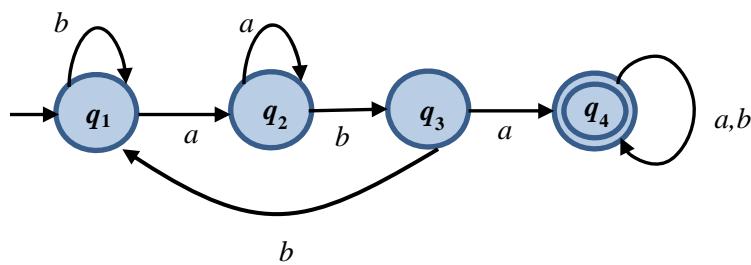
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(β) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a,b\}, \delta, \{q_1\}, \{q_4\})$ όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_2	q_3
q_3	q_4	q_1
q_4	q_4	q_4

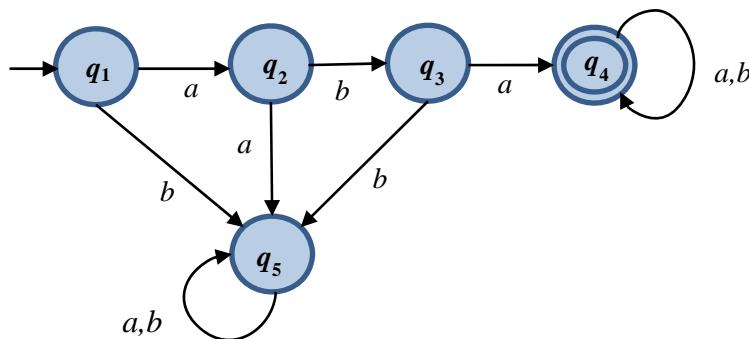
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(γ) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a,b\}, \delta, \{q_1\}, \{q_4\})$ όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a	b
q_1	q_2	q_5
q_2	q_5	q_3
q_3	q_4	q_5
q_4	q_4	q_4
q_5	q_5	q_5

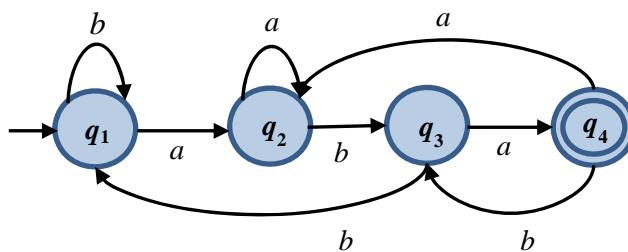
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(δ) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a,b\}, \delta, \{q_1\}, \{q_4\})$ όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_2	q_3
q_3	q_4	q_1
q_4	q_2	q_3

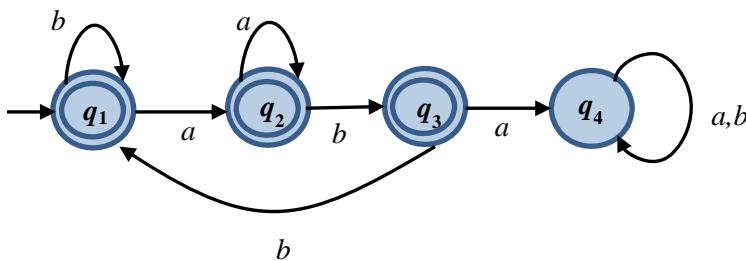
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(ε) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a,b\}, \delta, \{q_1\}, \{q_1, q_2, q_3\})$ όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_2	q_3
q_3	q_4	q_1
q_4	q_4	q_4

Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την τομή. Δηλαδή, αν οι γλώσσες A και B είναι κανονικές τότε και η γλώσσα $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ και } w \in B\}$ είναι κανονική.

Λύση

Η απόδειξη είναι κατασκευαστική. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αν υπάρχουν DFA που αναγνωρίζουν τις γλώσσες A και B , τότε υπάρχει DFA που αναγνωρίζει τη γλώσσα $A \cap B$.

Ας υποθέσουμε ότι τα αυτόματα $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ και $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ αναγνωρίζουν τις γλώσσες A και B αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε το $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ως εξής:

- $Q = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2\}$
- Σ : το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό των M_1 και M_2 .
- Για κάθε $(r_1, r_2) \in Q$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \in Q \mid r_1 \in F_1 \text{ και } r_2 \in F_2\} = F_1 \times F_2$

Σημειώνουμε ότι το αυτόματο αυτό είναι όμοιο με το αυτόματο που κατασκευάσαμε στη διαφάνεια 2-24 για αναγνώριση της γλώσσας $A \cup B$. Διαφέρει μόνο στο σύνολο αποδοχής, όπου θεωρούμε ότι μια κατάσταση $(r_1, r_2) \in Q$ είναι τελική αν και μόνο αν οι δύο καταστάσεις r_1 και r_2 είναι τελικές στα δύο επιμέρους αυτόματα.

Απομένει να επιβεβαιώσουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη w επί του αλφάβητου Σ $w \in L(M)$ αν και μόνο αν $w \in L(M_1) \cap L(M_2)$.

Ας υποθέσουμε ότι $w = w_1 w_2 \dots w_n \in L(M)$. Τότε, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων r_0, r_1, \dots, r_n του Q που ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $r_0 = q_0$
2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$, για $i = 0, \dots, n-1$, και
3. $r_n \in F$

Επομένως, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $(s_0, t_0), (s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$ του Q όπου για κάθε i , $s_i \in Q_1$, $t_i \in Q_2$ και όπου η ακολουθία αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $(s_0, t_0) = (q_1, q_2)$
2. $\delta_1(s_i, w_{i+1}) = s_{i+1}$, $\delta_2(t_i, w_{i+1}) = t_{i+1}$ για $i = 0, \dots, n - 1$, και
3. $s_n \in F_1$, $t_n \in F_2$.

Κατά συνέπεια, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων s_0, s_1, \dots, s_n , του Q_1 που ικανοποιεί τις συνθήκες

1. $s_0 = q_1$
2. $\delta_1(s_i, w_{i+1}) = s_{i+1}$, για $i = 0, \dots, n - 1$, και
3. $s_n \in F_1$

και παρόμοια, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων t_0, t_1, \dots, t_n , του Q_2 που ικανοποιεί τις συνθήκες

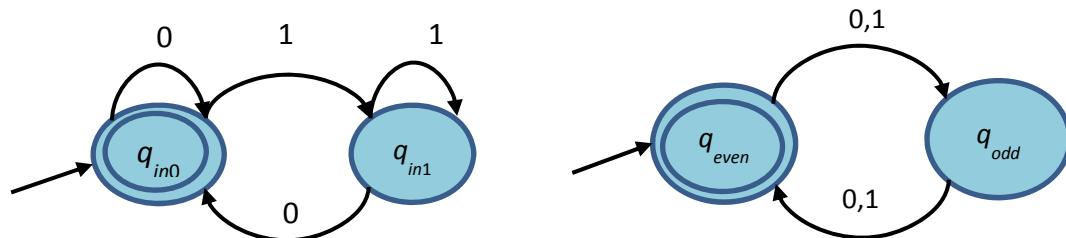
1. $t_0 = q_2$
2. $\delta_2(t_i, w_{i+1}) = t_{i+1}$, για $i = 0, \dots, n - 1$, και
3. $t_n \in F_2$

Αυτό συνεπάγεται ότι $w \in L(M_1)$ και $w \in L(M_2)$. Επομένως, αν $w \in L(M)$ τότε $w \in L(M_1) \cap L(M_2)$.

Αντιστρέφοντας τα πιο πάνω επιχειρήματα, λαμβάνουμε ότι αν $w \in L(M_1) \cap L(M_2)$ τότε $w \in L(M)$, και το ζητούμενο έπεται.

Άσκηση 4

Χρησιμοποιώντας την κατασκευή σας από την Άσκηση 3, να σχεδιάσετε το διάγραμμα καταστάσεων αυτομάτου που αναγνωρίζει την τομή των γλωσσών των δύο πιο κάτω αυτομάτων.



Λύση

