Φροντιστήριο 11 - Λύσεις

<u>Άσκηση 1</u>

Να αποδείξετε ότι η κλάση P είναι κλειστή ως προς τις πράξεις της ένωσης, της συναρμογής και του συμπληρώματος.

<u>Λύση</u>

Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

(α) Ένωση: Αν οι $Λ_1$ και $Λ_2$ είναι γλώσσες της P, τότε και η $Λ_1 \cup Λ_2$ ανήκει στην P.

(β) Συναρμογή: Αν οι $Λ_1$ και $Λ_2$ είναι γλώσσες της P, τότε και η $Λ_1 Λ_2$ ανήκει στην P.

(γ) Συμπλήρωμα: Αν η Λ είναι γλώσσα της P, τότε και η $Σ^* – Λ$ ανήκει στην P.

(α) Έστω $Λ_1$ και $Λ_2$ γλώσσες της P. Από τον ορισμό της κλάσης P, υπάρχουν TM, έστω M_1 και M_2 οι οποίες διαγιγνώσκουν τις $Λ_1$ και $Λ_2$, αντίστοιχα, σε πολυωνυμικό χρόνο. Για να δείξουμε ότι και η $Λ_1 \cup Λ_2$ ανήκει στην P θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει TM η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα $Λ_1 \cup Λ_2$ σε πολυωνυμικό χρόνο. Η ζητούμενη μηχανή είναι η εξής:

M := "Για είσοδο w
1. Τρέξε την M_1 στην w. Αν η M_1 αποδεχτεί, τότε αποδεχόμαστε.
2. Διαφορετικά, τρέξε την M_2 στην w. Αν η M_2 αποδεχτεί, τότε αποδεχόμαστε
3. Διαφορετικά, απορρίπτουμε."

<u>Ορθότητα:</u> Η M αποδέχεται αν και μόνο αν η w είναι αποδεκτή από την M_1 ή την M_2. Επομένως, από τον ορισμό των M_1 και M_2, η M αποδέχεται αν και μόνο αν η $w \in Λ_1 \cup Λ_2$.

<u>Χρόνος εκτέλεσης:</u> Αφού οι M_1 και M_2 έχουν πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης, τόσο το Βήμα 1 όσο και το Βήμα 2 εκτελούνται σε πολυωνυμικό χρόνο. Συνεπώς, η M διαγιγνώσκει τη γλώσσα $Λ_1 \cup Λ_2$ σε πολυωνυμικό χρόνο.

(β) Έστω $Λ_1$ και $Λ_2$ γλώσσες της P. Από τον ορισμό της κλάσης P, υπάρχουν TM, έστω M_1 και M_2 οι οποίες διαγιγνώσκουν τις $Λ_1$ και $Λ_2$, αντίστοιχα, σε πολυωνυμικό χρόνο. Για να δείξουμε ότι και η $Λ_1Λ_2$ ανήκει στην P θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει TM η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα $Λ_1Λ_2$ σε πολυωνυμικό χρόνο. Η ζητούμενη μηχανή είναι η εξής:

M := "Για είσοδο w
Για κάθε δυνατό σπάσιμο της w σε δύο μέρη w = xy
1. Τρέξε την M_1 στην x. Αν η M_1 αποδεχτεί, τότε προχώρα στο βήμα 2, διαφορετικά επανάλαβε το βήμα για το επόμενο σπάσιμο της w.
2. Τρέξε την M_2 στην y. Αν η M_2 αποδεχτεί, τότε αποδεχόμαστε, διαφορετικά, επανέλαβε από το βήμα 2 για το επόμενο σπάσιμο της w.
3. Αν τα δυνατά σπασίματα έχουν εξαντληθεί, τότε απόρριψε."

<u>Ορθότητα:</u> Η M αποδέχεται αν και μόνο αν υπάρχει σπάσιμο w = xy όπου η x είναι αποδεκτή από την M_1 και η y από την M_2. Επομένως, από τον ορισμό των M_1 και M_2, η M αποδέχεται την w αν και μόνο αν υπάρχει σπάσιμο w = xy όπου $x \in Λ_1$ και $y \in Λ_2$.

Χρόνος εκτέλεσης: Αφού οι M_1 και M_2 έχουν πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης, τόσο το Βήμα 1 όσο και το Βήμα 2 εκτελούνται σε πολυωνυμικό χρόνο. Επιπλέον, αφού υπάρχουν ακριβώς n + 1 δυνατά σπασίματα της w, όπου n = |w|, η M θα εκτελέσει O(n) επαναλήψεις των δύο βημάτων και επομένως είναι σε θέση να διαγνώσει τη γλώσσα $Λ_1Λ_2$ σε πολυωνυμικό χρόνο.

(γ) Έστω Λ γλώσσα της P. Από τον ορισμό της κλάσης P, υπάρχει TM, έστω M η οποία διαγιγνώσκει τη Λ σε πολυωνυμικό χρόνο. Για να δείξουμε ότι και $Σ^* – Λ$ ανήκει στην P θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει TM η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα $Σ^* – Λ$ σε πολυωνυμικό χρόνο. Η ζητούμενη μηχανή είναι η εξής:

M’ := “Για είσοδο w
1. Τρέξε την M στην w. Αν η M αποδεχτεί, τότε απορρίπτουμε.
2. Διαφορετικά, αποδεχόμαστε.”

Ορθότητα: Η M’ αποδέχεται την w αν και μόνο αν η M δεν αποδέχεται την w. Επομένως, η M’ αποδέχεται αν και μόνο αν η $w \notin Λ$ ή $w \in Σ^* – Λ$.

Χρόνος εκτέλεσης: Αφού η M έχει πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης η M’ έχει επίσης πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης και το ζητούμενο έπεται.

Άσκηση 2

Ένας γράφος ονομάζεται *k*-χρωματίσιμος αν είναι δυνατό να χρωματίσουμε τους κόμβους του με *k* διαφορετικά χρώματα έτσι ώστε κανένα ζεύγος από γειτονικούς κόμβους να μην έχει το ίδιο χρώμα.

(α) Να δείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα ανήκει στην κλάση NP.

{ ⟨G, *k*⟩ | ο G είναι ένας *k*-χρωματίσιμος γράφος}

(β) Να δείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα ανήκει στην κλάση P.

{ ⟨G⟩ | ο G είναι ένας 2-χρωματίσιμος γράφος}

Λύση

(α) Μια γλώσσα Λ ανήκει στην NP αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις:

(i) Η Λ επιδέχεται επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου.

(ii) Υπάρχει TM μη-ντετερμινιστικού πολυωνυμικού χρόνου που διαγιγνώσκει τη Λ.

Πιο κάτω αποδεικνύονται και οι δύο προτάσεις.

Απόδειξη 1:

Ακολουθεί αλγόριθμος V που αποτελεί επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

V := “Για είσοδο ⟨G, *k*⟩ όπου ο G είναι ένας γράφος και *k* ένας ακέραιος
και επιπρόσθετα X, ένα χρωματισμό του γράφου G:

1. Αν κάθε ζεύγος από γειτονικούς κόμβους του G χρωματίζεται από διαφορετικό χρώμα μέσω του X, τότε αποδεχόμαστε.
2. Διαφορετικά, απορρίπτουμε.”

Ο χρόνος εκτέλεσης του επαληθευτή V είναι της τάξης $O(n^2)$ όπου n το πλήθος των κόμβων του γράφου, επομένως ο V αποτελεί επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

Απόδειξη 2:

Ακολουθεί μη ντετερμινιστική TM N που διαγιγνώσκει στη γλώσσα σε πολυωνυμικό χρόνο.

N := "Για είσοδο ⟨G, *k*⟩ όπου ο G είναι ένας γράφος και *k* ένας ακέραιος:

Επέλεξε μη ντετερμινιστικά ένα χρωματισμό X του γράφου G

1. Αν κάθε ζεύγος από γειτονικούς κόμβους του G χρωματίζεται με διαφορετικό χρώμα από τον X, τότε αποδεχόμαστε.
2. Διαφορετικά, απορρίπτουμε."

Ο χρόνος εκτέλεσης της TM N είναι της τάξης $O(n^2)$ όπου n το πλήθος των κόμβων του γράφου, επομένως η N αποτελεί μια μη ντετερμινιστική TM πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

(β) Θέλουμε να δείξουμε ότι η πιο κάτω γλώσσα ανήκει στο P.

{ ⟨G⟩ | ο G είναι ένας 2-χρωματίσιμος γράφος}

Από τον ορισμό της κλάσης P αυτό ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνο εκτέλεσης που επιλύνει το πρόβλημα. Ένας τέτοιος αλγόριθμος μπορεί πράγματι να κτιστεί χρησιμοποιώντας ως βάση κάποιο αλγόριθμο διάσχισης γράφων όπως, π.χ., αυτόν που παρουσιάζεται στον πιο κάτω σύνδεσμο:

http://www.cs.ucy.ac.cy/~annap/epl231/winter2010/tutorials/soltutorial9.pdf

Άσκηση 3

Έστω ότι το G αναπαριστά οποιοδήποτε μη κατευθυνόμενο γράφημα. Θεωρήστε τις γλώσσες:

ΒΡΑΧΕΙΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ = { ⟨G,s,t,k⟩ | το G περιέχει απλή διαδρομή από τον κόμβο s προς τον κόμβο t μήκους το πολύ k}

ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ = { ⟨G,s,t,k⟩ | το G περιέχει απλή διαδρομή από τον κόμβο s προς τον κόμβο t μήκους τουλάχιστον k}

(α) Να δείξετε ότι το πρόβλημα ΒΡΑΧΕΙΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ ανήκει στην κλάση P.

(β) Να δείξετε ότι το πρόβλημα ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ ανήκει στην κλάση NP.

(γ) Να δείξετε ότι το πρόβλημα ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ είναι NP-πλήρες.

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra. Επομένως, το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.

(β) Ακολουθεί αλγόριθμος V που αποτελεί επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

V := "Για είσοδο ⟨G, s, t, *k*⟩ όπου ο G είναι ένας γράφος, s, t κορυφές του γράφου, και *k*

ένας ακέραιος και επιπρόσθετα w μια ακολουθία από κόμβους του γράφου:

1. Αν w είναι μια απλή διαδρομή από τον κόμβο s στον κόμβο t η οποία έχει συνολικό μήκος τουλάχιστον k, τότε αποδεχόμαστε.
2. Διαφορετικά, απορρίπτουμε."

Ο χρόνος εκτέλεσης του επαληθευτή V είναι της τάξης O(n) όπου n το πλήθος των κόμβων του γράφου, επομένως ο V αποτελεί επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

(γ) Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα είναι NP πλήρες αρκεί να δείξουνε ότι ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε αυτό. Η αναγωγή θα γίνει από το πρόβλημα ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι αν υπάρχει πολυωνυμική λύση για το πρόβλημα ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ τότε υπάρχει πολυωνυμική λύση και για το πρόβλημα ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ.

Έστω ένας γράφος G με κορυφές s, t. Θέλουμε να αποφασίσουμε κατά πόσο υπάρχει Χαμιλτονιανή διαδρομή ανάμεσα στις κορυφές s και t.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει πολυωνυμική λύση για το πρόβλημα ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ. Αναθέτουμε βάρος 1 σε κάθε ακμή του γράφου (σε πολυωνυμικό χρόνο!) λαμβάνοντας τον γράφο G' και τρέχουμε τον αλγόριθμο του προβλήματος ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ στο δεδομένο (G', s, t, n-1) όπου n το πλήθος των κορυφών του γράφου. Αν ο αλγόριθμος αποδεχτεί τότε απαντούμε ότι ο αρχικός μας γράφος περιέχει Χαμιλτονιανή διαδρομή διαφορετικά, αν απορρίψει, τότε απαντούμε ότι ο γράφος δεν περιέχει Χαμιλτονιανή διαδρομή.

Ορθότητα: Παρατηρούμε τα εξής:

Ο γράφος G' περιέχει απλή διαδρομή από τον κόμβο s προς τον κόμβο t μήκους τουλάχιστον n-1

αν και μόνο αν

ο γράφος G' περιέχει απλή διαδρομή από τον κόμβο s προς τον κόμβο t μήκους ακριβώς n-1 (μια απλή διαδρομή δεν μπορεί να έχει μήκος > n – 1)

αν και μόνο αν

ο γράφος G περιέχει Χαμιλτονιανή διαδρομή.

Συμπέρασμα: Αν το πρόβλημα ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο τότε και το πρόβλημα ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως το πρόβλημα ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ είναι NP-πλήρες.

<u>Άσκηση 4</u>

Έστω Α ένα πρόβλημα που ανήκει στην κλάση NP. Σχολιάστε τις συνέπειες κάθε μιας από τις προτάσεις που ακολουθούν.

(α) Έχετε αποδείξει ένα θεώρημα σύμφωνα με το οποίο οποιοσδήποτε αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα Α απαιτεί χρόνο $\Theta(2^n)$, όπου *n* το μέγεθος του προβλήματος.

Αφού οποιοσδήποτε αλγόριθμος για το πρόβλημα απαιτεί χρόνο τουλάχιστον $\Theta(2^n)$ τότε δεν υπάρχει κανένας αλγόριθμος ο οποίος να λύνει το πρόβλημα σε πολυωνυμικό χρόνο. Συνεπώς, το πρόβλημα Α ανήκει στην NP αλλά όχι στην P.

Αφού, υπάρχει $A \in NP$, $A \notin P$ τα δύο σύνολα P και NP δεν μπορούν να είναι ίσα, επομένως το συμπέρασμα που εξάγεται από την πρόταση είναι ότι $P \neq NP$!!

(β) Έχετε κατασκευάσει ένα ντετερμινιστικό αλγόριθμο ο οποίος λύνει το πρόβλημα A σε πολυωνυμικό χρόνο.

Αφού το πρόβλημα A μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε $A \in P$.

(γ) Έχετε επιδείξει ότι το πρόβλημα SAT μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα A σε πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης.

Το γεγονός ότι το πρόβλημα SAT μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα A (σε πολυωνυμικό χρόνο), υπονοεί ότι οποιαδήποτε λύση του προβλήματος A μπορεί να μετατραπεί σε λύση του SAT. Κατά συνέπεια το A είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο και το SAT και, αφού το SAT είναι ένα NP-πλήρες πρόβλημα, τότε και το A είναι ένα NP-πλήρες πρόβλημα.

(δ) Έχετε κατασκευάσει ένα ντετερμινιστικό αλγόριθμο ο οποίος λύνει το πρόβλημα A σε πολυωνυμικό χρόνο και έχετε δείξει ότι το πρόβλημα A είναι NP-πλήρες.

Αφού το πρόβλημα A είναι NP-πλήρες είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα της κλάσης NP. Επομένως, η ύπαρξη ντετερμινιστικού αλγόριθμου που λύνει το πρόβλημα σε πολυωνυμικό χρόνο υπονοεί ότι όλα τα προβλήματα της NP μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο και το συμπέρασμα που εξάγεται από την πρόταση είναι ότι $P = NP$!