

## Σειρά Προβλημάτων 5

Ημερομηνία Παράδοσης: 28/04/17

### **Άσκηση 1 [15 μονάδες]**

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες είναι διαγνώσιμες.

- (α)  $\{ \langle R \rangle \mid \eta R \text{ είναι μια κανονική έκφραση η οποία παράγει μια μη-πεπερασμένη γλώσσα} \}$
- (β)  $\{ \langle G \rangle \mid \eta G \text{ είναι μια CFG η οποία παράγει τουλάχιστον μια λέξη επί του αλφάβητου } \{a,b\} \text{ της οποίας το πρώτο και το πέμπτο σύμβολο είναι τα ίδια} \}$

### **Άσκηση 2 [15 μονάδες]**

Έστω γλώσσες  $L_1, L_2, \dots, L_k$  επί του αλφάβητου  $\Sigma$  τέτοιες ώστε:

1. Για κάθε  $i \neq j$  ισχύει ότι  $L_i \cap L_j = \emptyset$ .
2.  $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k = \Sigma^*$
3. Για κάθε  $i$ , η γλώσσα  $L_i$  είναι αναγνωρίσιμη.

Να αποδείξετε ότι για κάθε  $i$ , η γλώσσα  $L_i$  είναι διαγνώσιμη.

### **Άσκηση 3 [25 μονάδες]**

(α) Να δείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα δεν είναι διαγνώσιμη.

$\{ \langle M \rangle \mid \eta M \text{ είναι μια TM με δύο ταινίες έτσι ώστε κατά τη διάρκεια του υπολογισμού της σε κάποια λέξη θα επιχειρήσει να γράψει ένα χαρακτήρα εκτός από το σύμβολο του διαστήματος στη δεύτερη ταινία της} \}$

(β) Η εταιρεία 211-Computer Corp, για να αυξήσει τις πωλήσεις της, αποφάσισε να δημιουργήσει μια εξελιγμένη εκδοχή της μηχανής Turing, την ΠΤ-TM, η οποία διαθέτει ήχους από πιάνο και τσέλο. Η μηχανή αυτή είναι όμοια με την αυθεντική Μηχανή Turing με τη διαφορά ότι οι καταστάσεις της χωρίζονται στις καταστάσεις 'πιάνο' και στις καταστάσεις 'τσέλο'. Κάθε φορά που η μηχανή αλλάζει κατάσταση τότε ακούγεται ήχος από πιάνο ή ήχος από τσέλο ανάλογα με την κατάσταση στην οποία βρίσκεται.

Να αποδείξετε ότι δοσμένης μιας ΠΤ-TM  $M$  και μιας λέξης  $w$  το πρόβλημα αν η  $M$  θα παίξει ήχος από τσέλο κατά την εκτέλεση της  $w$  είναι μη διαγνώσιμο.

### **Άσκηση 4 [20 μονάδες]**

Έστω  $\varphi$  ένας λογικός τύπος 3ΣΚΜ. Ένας συνδυασμός λογικών τιμών στις μεταβλητές του  $\varphi$  ονομάζεται *αληθοποιός ανισοτιμοδοσία* εάν ο συνδυασμός αυτός (1) κάνει τη  $\varphi$  αληθή και (2) κάθε φράση του  $\varphi$  περιέχει δύο λεξιγράμματα με αντίθετες τιμές. Με άλλα λόγια, μια αληθοποιός ανισοτιμοδοσία καθιστά τον τύπο  $\varphi$  αληθή χωρίς να αποδίδει σε καμιά φράση την τιμή TRUE και στα τρία λεξιγράμματά της.

(α) Δείξτε ότι η αντίθετη τιμοδοσία οποιασδήποτε αληθοποιούς ανισοτιμοδοσίας για τον  $\varphi$  είναι επίσης αληθοποιός ανισοτιμοδοσία.

(β) Έστω ΑΝΙΣΟΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ το σύνολο όλων των τύπων 3ΣΚΜ που επιδέχονται αληθοποιό ανισοτιμοδοσία. Δείξτε ότι, για να πάρουμε μια πολυωνυμικού χρόνου αναγωγή του προβλήματος 3SAT στο πρόβλημα ΑΝΙΣΟΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑ αρκεί να αντικαταστήσουμε κάθε φράση

$$C_i = (y_1 \vee y_2 \vee y_3)$$

με τις δύο φράσεις

$$(y_1 \vee y_2 \vee z_i) \quad \text{και} \quad (z_i \vee y_3 \vee b)$$

όπου  $z_i$  μια νέα μεταβλητή για τη φράση και  $b$  μια επιπρόσθετη νέα μεταβλητή, κοινή για όλες τις φράσεις.

(γ) Συμπεράνετε ότι το πρόβλημα της ΑΝΙΣΟΑΛΗΘΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑΣ είναι NP-πλήρες

### **Άσκηση 5 [25 μονάδες]**

Θεωρήστε το πιο κάτω πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού. Σας δίνεται ένα κατάλογος μαθημάτων  $C_1, \dots, C_k$ , και ένας κατάλογος φοιτητών  $S_1, \dots, S_l$ . Ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εξεταστεί σε κάποιο προκαθορισμένο και γνωστό υποσύνολο των μαθημάτων σε ωριαία διαγωνίσματα έτσι ώστε κανένας φοιτητής να μην είναι αναγκασμένος να συμμετάσχει σε δύο διαγωνίσματα που πραγματοποιούνται την ίδια ώρα. Το πρόβλημα έγκειται στο να προσδιοριστεί εάν υπάρχει πρόγραμμα εξετάσεων το οποίο να δεσμεύει μόνο  $h$  ώρες.

(α) Να διατυπώσετε αυτό το πρόβλημα υπό τη μορφή γλώσσας και να δείξετε ότι ανήκει στην κλάση NP.

(β) Να δείξετε ότι η γλώσσα που ορίσατε στο σκέλος (α) είναι NP-πλήρης μέσω αναγωγής από κάποια γνωστή NP-πλήρη γλώσσα.