

Σειρά Προβλημάτων 3

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/03/17

Άσκηση 1 [25 μονάδες]

Να δώσετε ασυμφραστικές γραμματικές που να παράγουν τις πιο κάτω γλώσσες:

$$(\alpha) \{ a^i b^j c^k d^m \mid i, j, k, m \geq 0 \text{ και } i + j = k + m \}$$

$$(\beta) \{ u x v x^{\text{rev}} \mid u, v, x \in \{0,1,2\}^+ \text{ και όλα τα στοιχεία του } v \text{ είναι μικρότερα από αυτά του } x \}$$

$$(\gamma) \{ x \# y \mid x, y \in \{a,b\}^* \text{ και η } x^{\text{rev}} \text{ είναι υπολέξη της } y \}$$

Άσκηση 2 [25 μονάδες]

Να κατασκευάσετε αυτόματα στοίβας για τις γλώσσες της Άσκησης 1. (Να κτίσετε τα αυτόματα κατευθείαν και όχι μέσω μετατροπής των ασυμφραστικών γραμματικών από την Άσκηση 1 σε αυτόματα.)

Άσκηση 3 [16 μονάδες]

Κατά τη διαδικασία της κωδικοποίησης, ένα μήνυμα (μια λέξη) από κάποιο αλφάβητο μετασχηματίζεται σε μια καινούρια λέξη, στο ίδιο ή κάποιο άλλο αλφάβητο (συνήθως το αλφάβητο $\{0,1\}$).

Θεωρήστε το αλφάβητο $\Sigma = \{A, C, G, T\}$ και την κωδικοποίηση που προκύπτει μέσω της συνάρτησης:

$$\text{code}(x) = \begin{cases} 01, & \text{if } x = A \\ 10, & \text{if } x = C \\ 11, & \text{if } x = G \\ 001, & \text{if } x = T \end{cases}$$

Με αυτή τη συνάρτηση, για παράδειγμα, το μήνυμα ATTGCA θα κωδικοποιηθεί ως 01 001 001 11 10 01.

(α) Η πιο πάνω στρατηγική κωδικοποίησης μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της γραμματικής που ακολουθεί:

$$M \rightarrow AM \mid CM \mid GM \mid TM \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow 01 \qquad C \rightarrow 10$$

$$G \rightarrow 11 \qquad T \rightarrow 001$$

Να κατασκευάσετε παραγωγές και τα αντίστοιχα συντακτικά δέντρα για τις λέξεις (ι) 001011001 και (ii) 0110110010111.

(β) Ένα χαρακτηριστικό που πρέπει να διαθέτει μια κωδικοποίηση είναι ότι κάθε λέξη πρέπει να έχει μια μοναδική κωδικοποίηση. Δηλαδή, κάθε κωδικός πρέπει να μπορεί να αποκωδικοποιηθεί με ακριβώς ένα τρόπο. Στην ορολογία των γραμματικών, μια γραμματική κωδικοποίησης πρέπει να είναι μονότροπη, δηλαδή, δεν πρέπει να υπάρχουν

περισσότερες από μια εξ' αριστερών παραγωγές για μια λέξη. Να αποφασίσετε κατά πόσο η γραμματική από το σκέλος (α) είναι μονότροπη αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(γ) Να δείξετε ότι η πιο κάτω γραμματική είναι πολύτροπη επιδεικνύοντας κάποια λέξη w στο $\{0,1\}^*$ η οποία να μπορεί να παραχθεί από την γραμματική μέσω δύο διαφορετικών εξ' αριστερών παραγωγών και να παρουσιάσετε τις σχετικές παραγωγές και τις λέξεις από το αλφάβητο Σ που κωδικοποιούνται ως w .

$$S \rightarrow AS \mid CS \mid GS \mid TS \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow 00$$

$$C \rightarrow 10$$

$$G \rightarrow 01$$

$$T \rightarrow 001$$

Άσκηση 4 [24 μονάδες]

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες δεν είναι ασυμφραστικές χρησιμοποιώντας το Λήμμα της Άντλησης για Ασυμφραστικές Γλώσσες

$$(\alpha) \{ uxn x^{\text{rev}} \mid u, v, x \in \{0,1,2\}^+ \text{ και } |u| = |v| \}$$

$$(\beta) \{ x x^{\text{rev}} x \mid x \in \{0,1\}^+ \}$$

$$(\gamma) \{ 0^n \mid n \text{ είναι πρώτος αριθμός} \}$$

Άσκηση 5

(α) **[10 μονάδες]** Έστω μια ασυμφραστική γλώσσα A και μια κανονική γλώσσα B . Να δείξετε ότι η γλώσσα $A \cap B$ είναι ασυμφραστική.

(β) **[Προαιρετική – 10 μονάδες]** Έστω μια ασυμφραστική γλώσσα A . Να δείξετε ότι το συμπλήρωμα της A , \bar{A} , δεν είναι απαραίτητα ασυμφραστική γλώσσα.