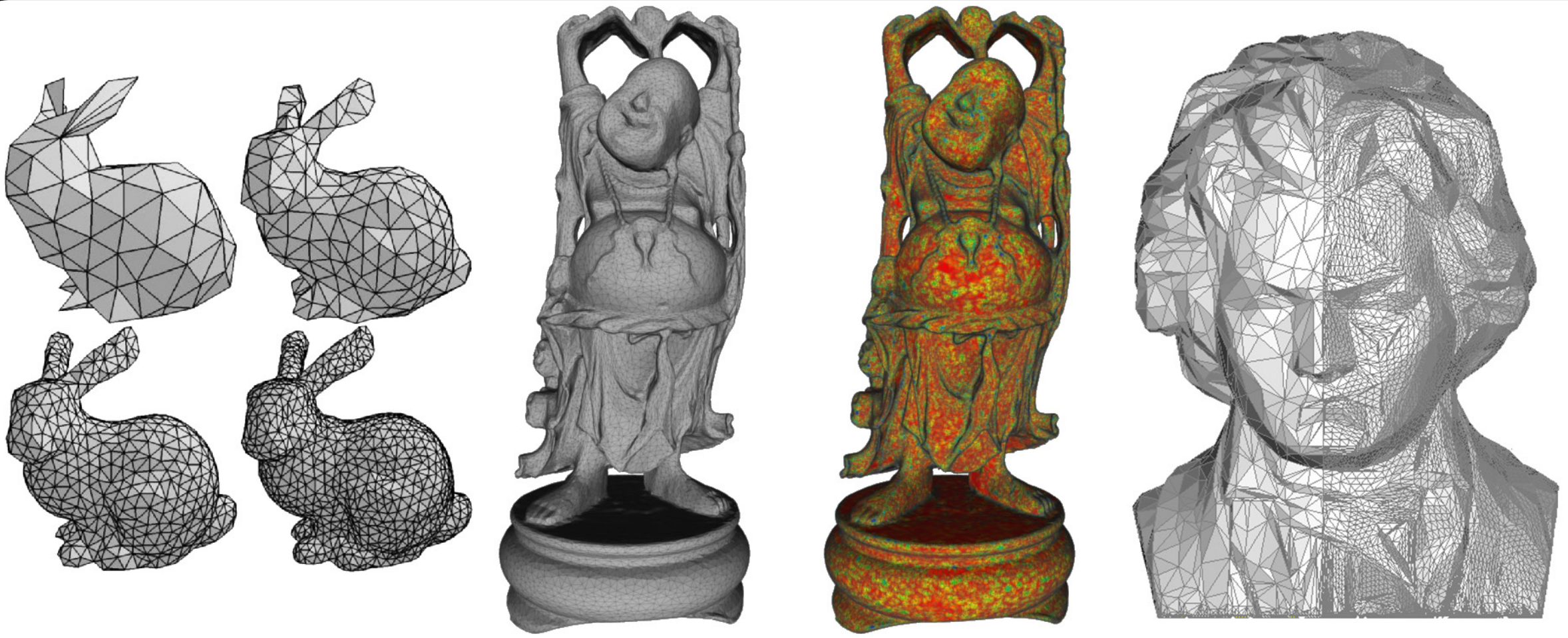




Γραφικά Υπολογιστών

Πολυγωνικά Μοντέλα

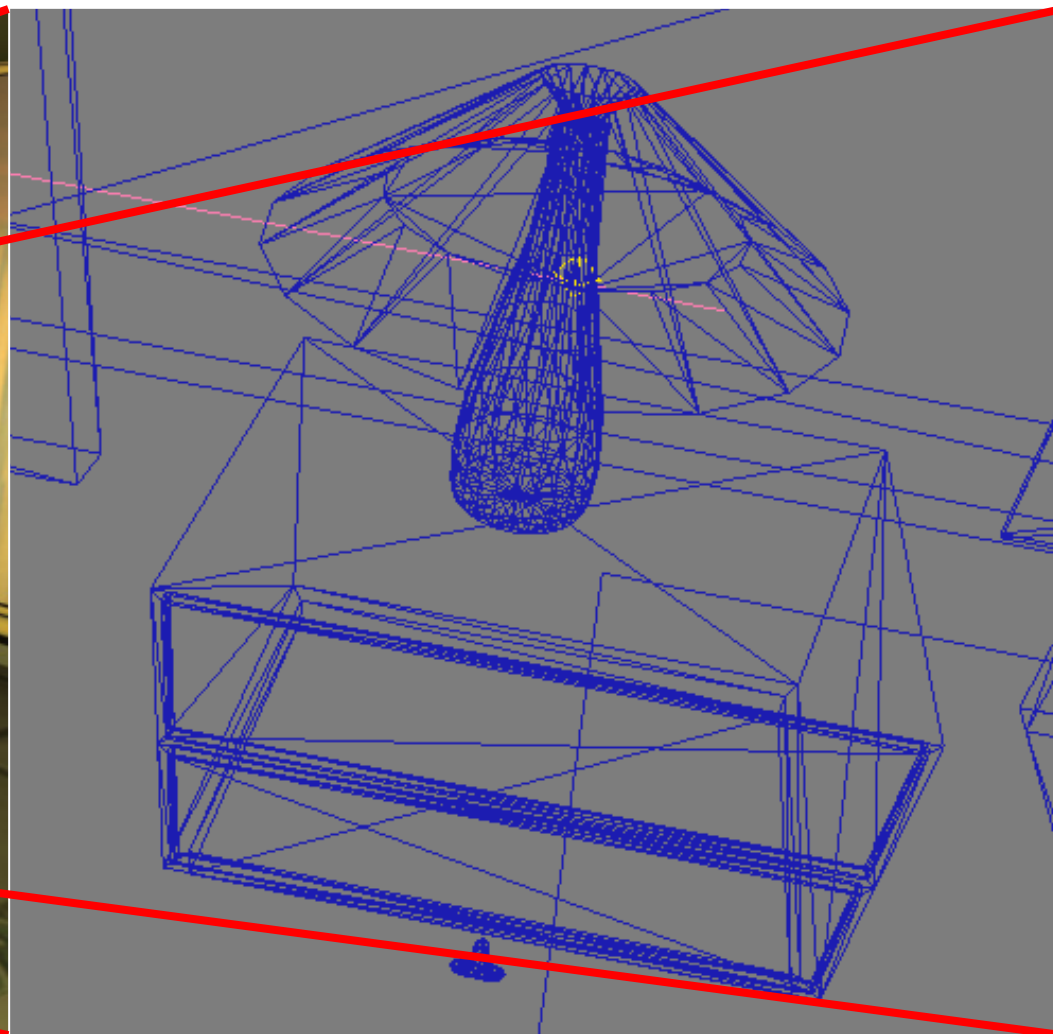
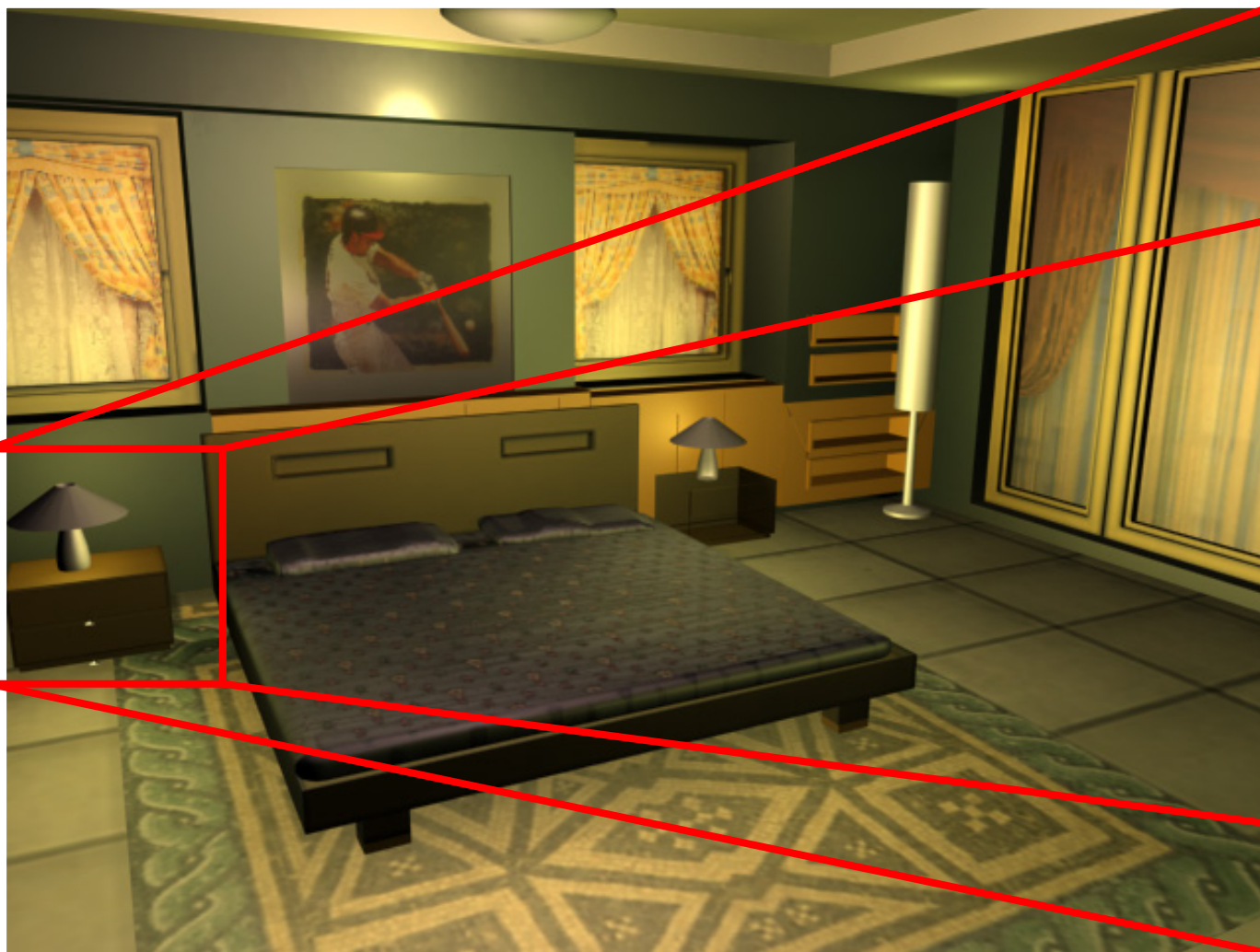
Andreas Aristidou

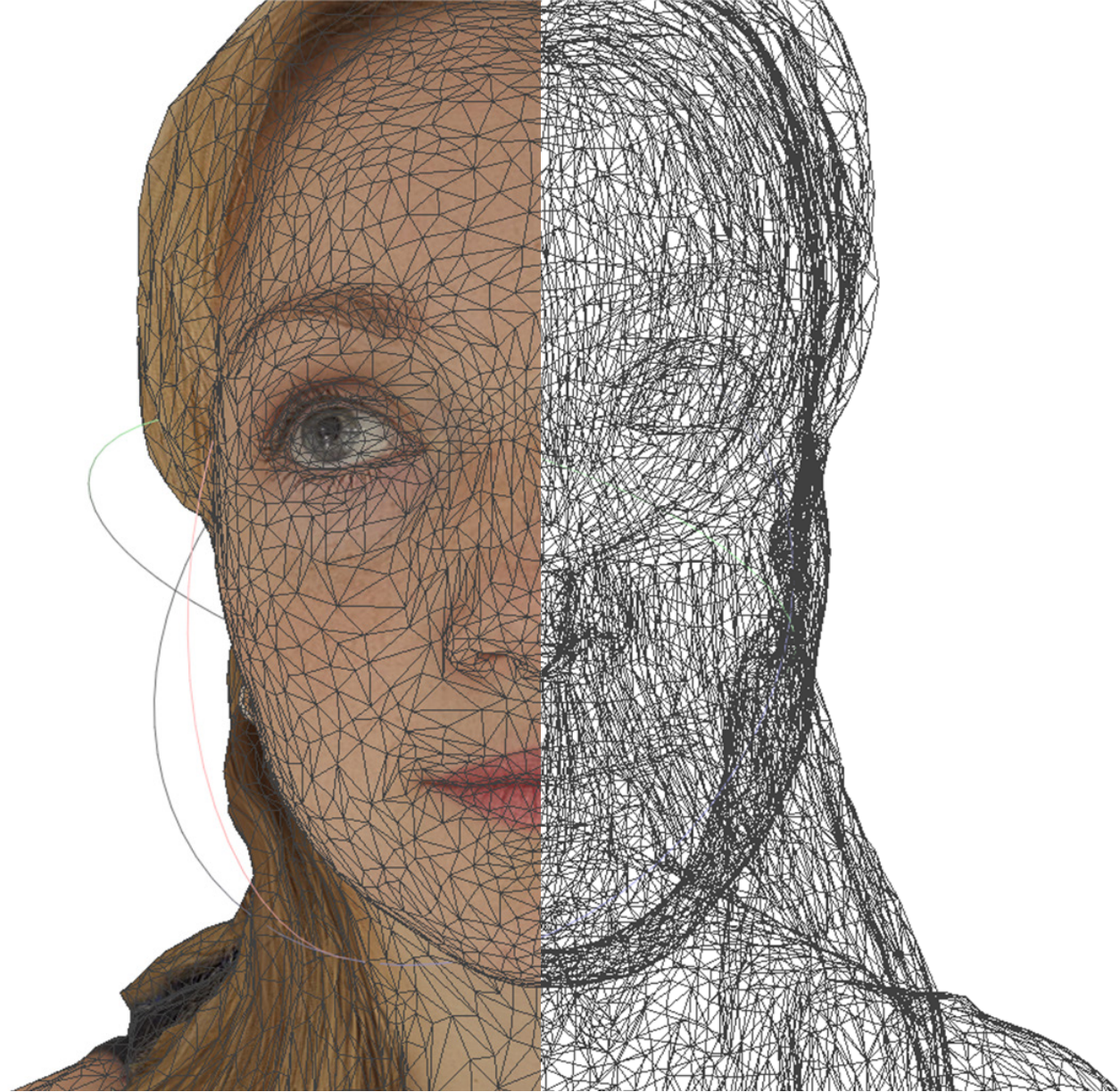
andarist@ucy.ac.cy

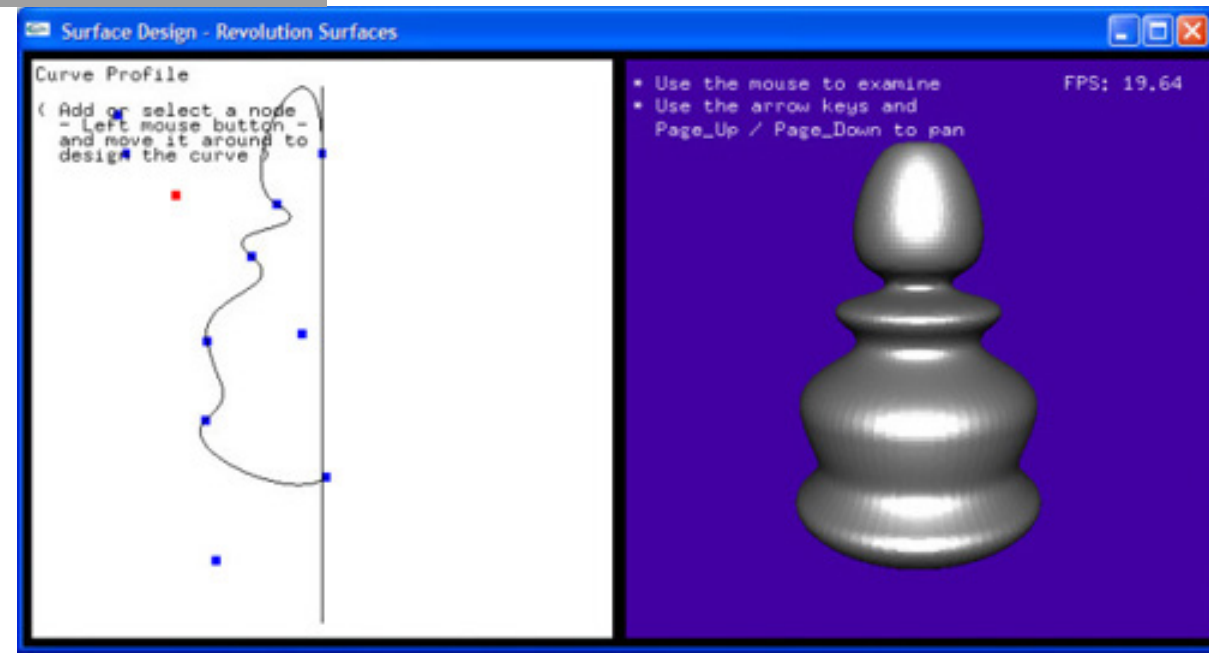
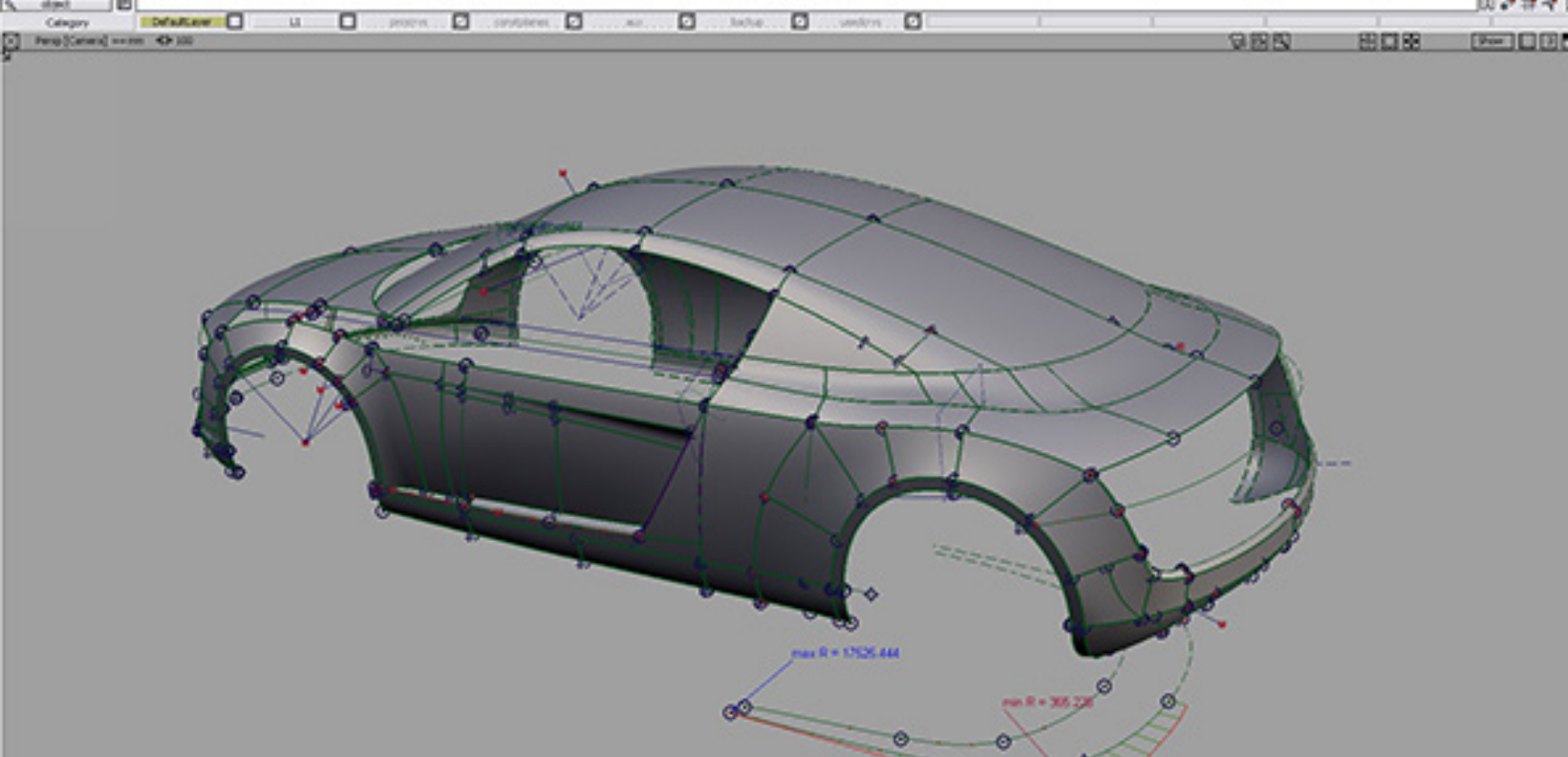
<http://www.andreasaristidou.com>

Περιεχόμενα

- Θα δούμε πώς διαμορφώνονται τα αντικείμενα σε 3Δ
 - Γραφική Μοντελοποίηση
 - Πολύγωνα
 - Πολύεδρα
 - Τετράεδρες επιφάνειες
 - Σαρωτικές αναπαραστάσεις
 - Εποικοδομητικές μέθοδοι στερεάς γεωμετρίας

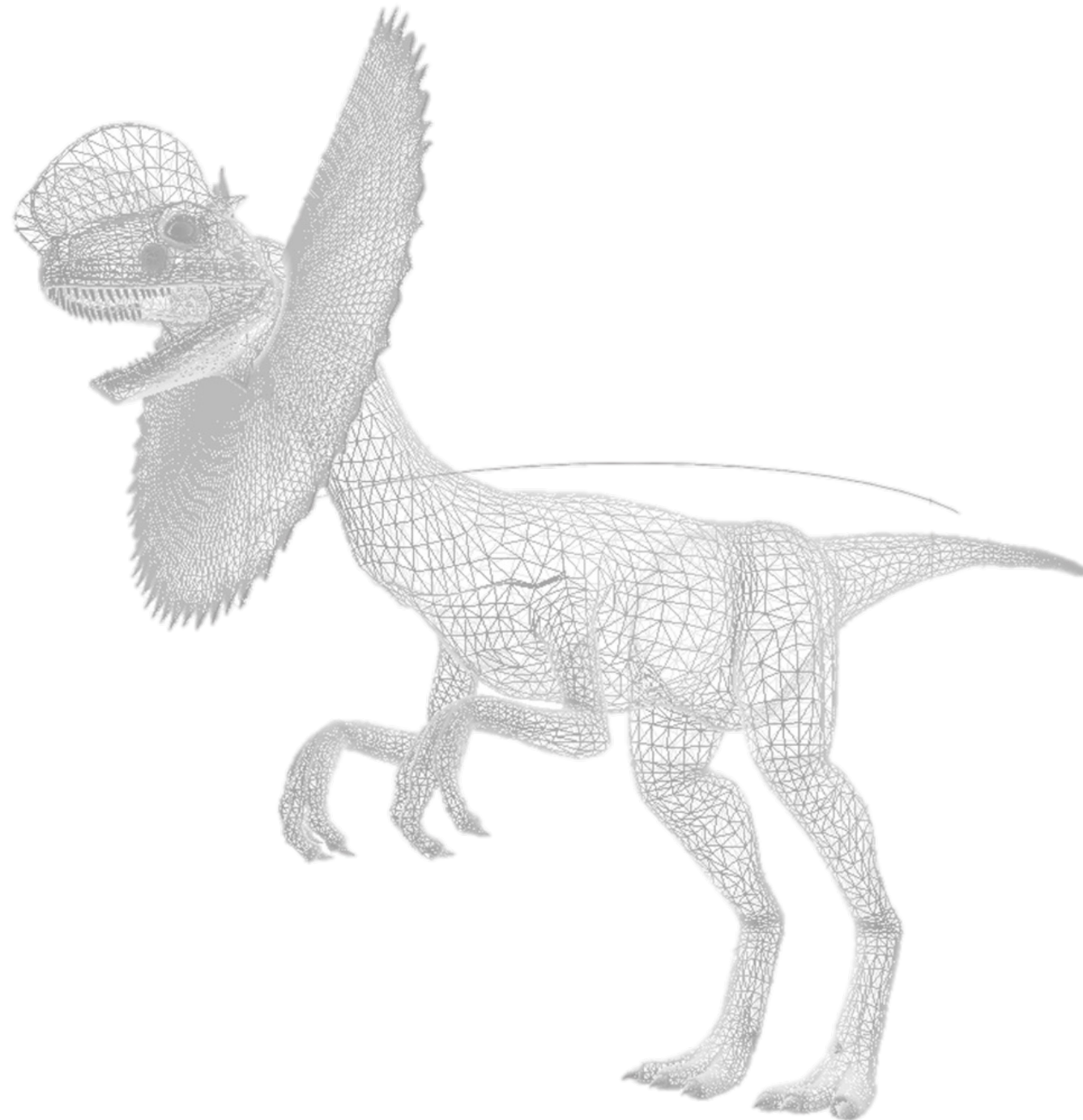




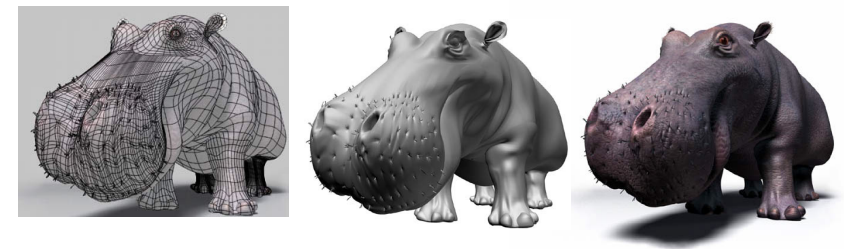


Αντικείμενα/Objects

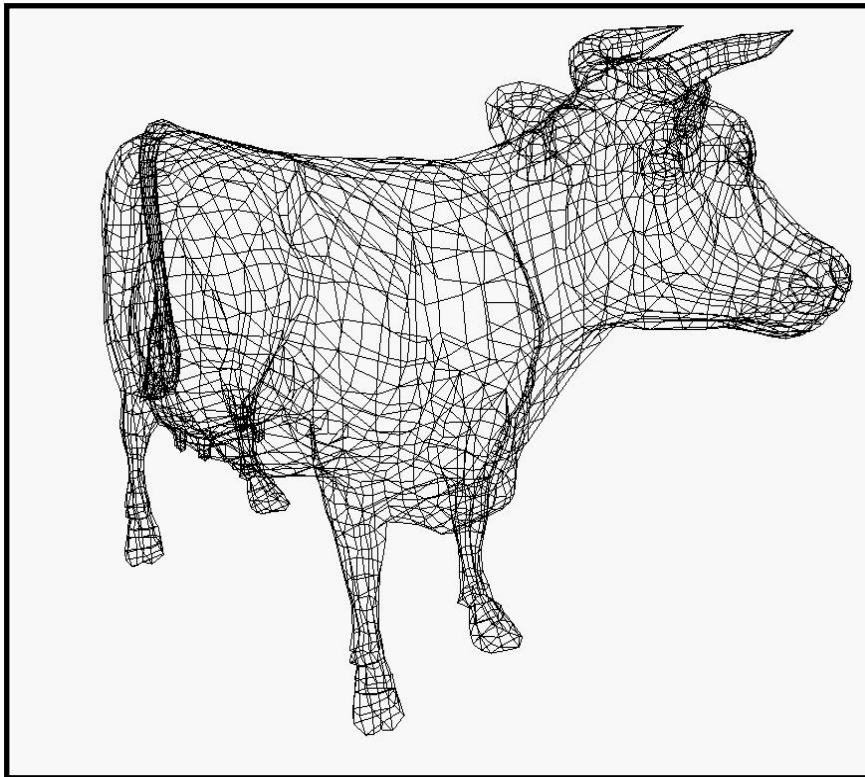
- Αντικείμενα αποτελούνται από γεωμετρία + υλικά
- **Γεωμετρία** - συνήθως ένα πλέγμα 3D
 - Προσεγγίζει μια συνεχή επιφάνεια με ένα σύνολο πολυγώνων (τρίγωνα + τετράκλινα)
 - Στην απόδοση (rendering), μπορούμε επίσης να αποδώσουμε μαθηματικά μοντέλα και όγκους
- **Υλικό** – περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο το φως αλληλεπιδρά με το αντικείμενο



Γεωμετρική μοντελοποίηση



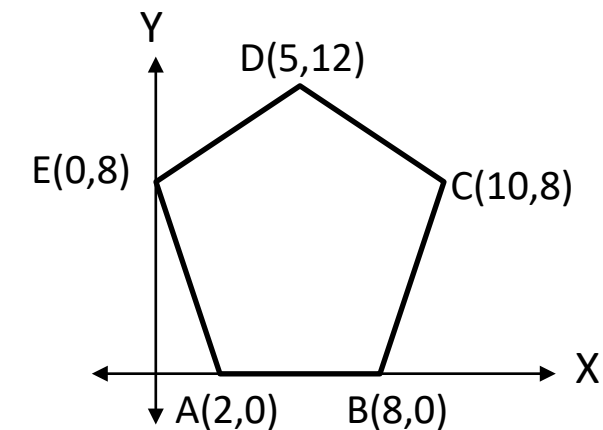
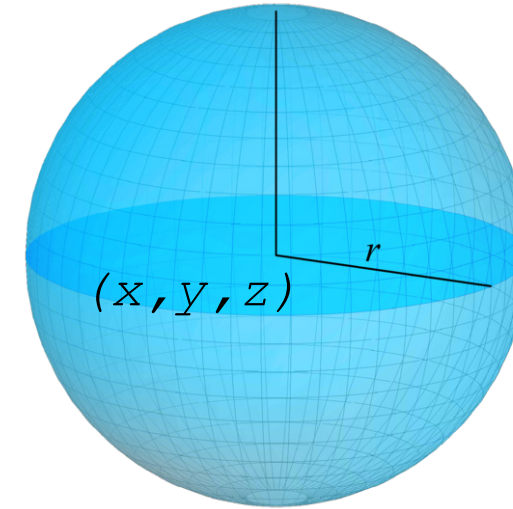
- Με συνδυασμό πολυγώνων μπορούμε να περιγράψουμε οποιοδήποτε σχήμα



Βέβαια ο αριθμός των πολυγώνων μπορεί να είναι πολύ μεγάλος

Γεωμετρική μοντελοποίηση

- Απλά αντικείμενα μπορούν να αναπαρασταθούν απευθείας:
 - Π.χ. μια σφαίρα χρειάζεται μόνο 4 τιμές (x, y, z, r)
- Για ένα πολύγωνο χρειάζονται οι συντεταγμένες των κορυφών του

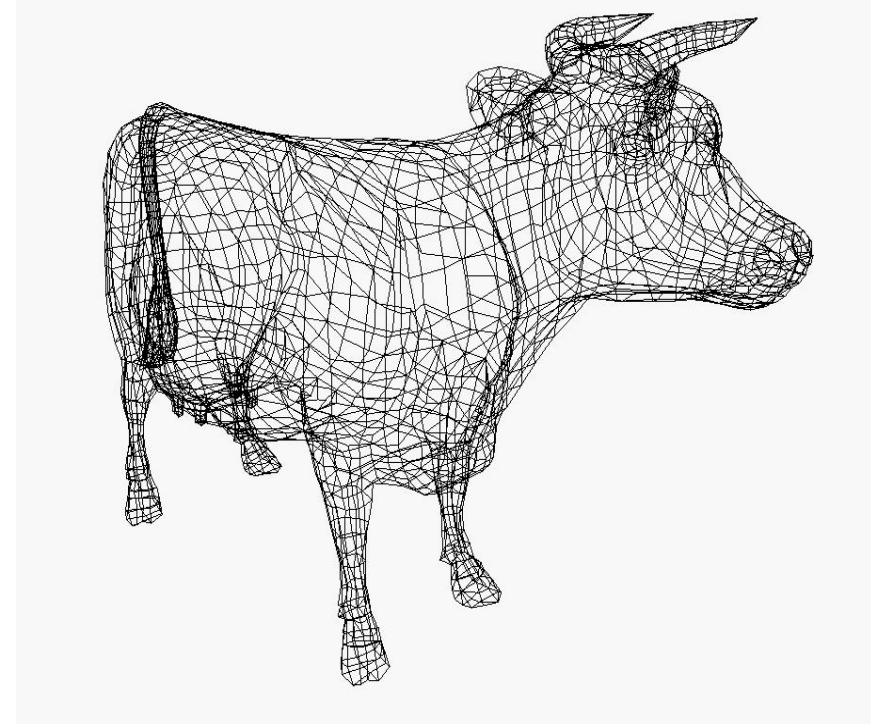


Πολύγωνα και πολύεδρα

A. Πολύγωνα

- Τύποι πολυγώνων
- Τομή πολυγώνου-ακτίνας
- Σημείο μέσα στο πολύγωνο

B. Πολύεδρα



Πολύγωνα

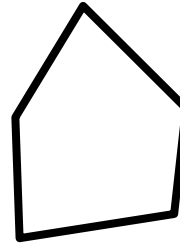
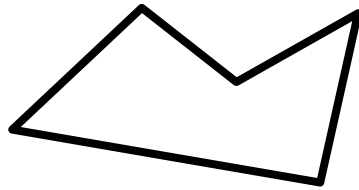
- Ένα **πολύγωνο** (polygon or face = επιφάνεια) ορίζετε σαν μια σειρά από n σημεία (κορυφές, vertices)

$$[p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}]$$
$$p_i = (x_i, y_i, z_i)$$

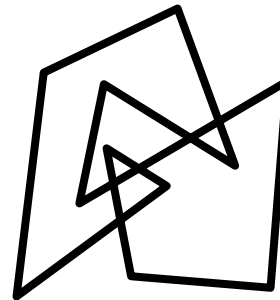
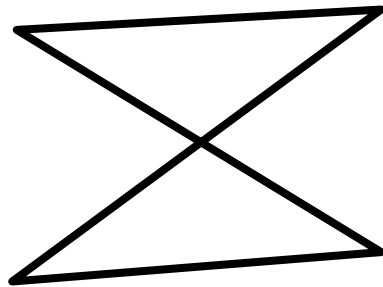
- Τα σημεία πρέπει να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο
- 3 σημεία ορίζουν ένα επίπεδο. Κάποιο τέταρτο σημείο δεν είναι κατ' ανάγκη στο ίδιο επίπεδο με τα άλλα 3.

Τύποι πολυγώνων

- Απλά - οι πλευρές τους δεν τέμνονται
 - κοίλα (concave), κυρτά (convex)



- Πολύπλοκα (complex)

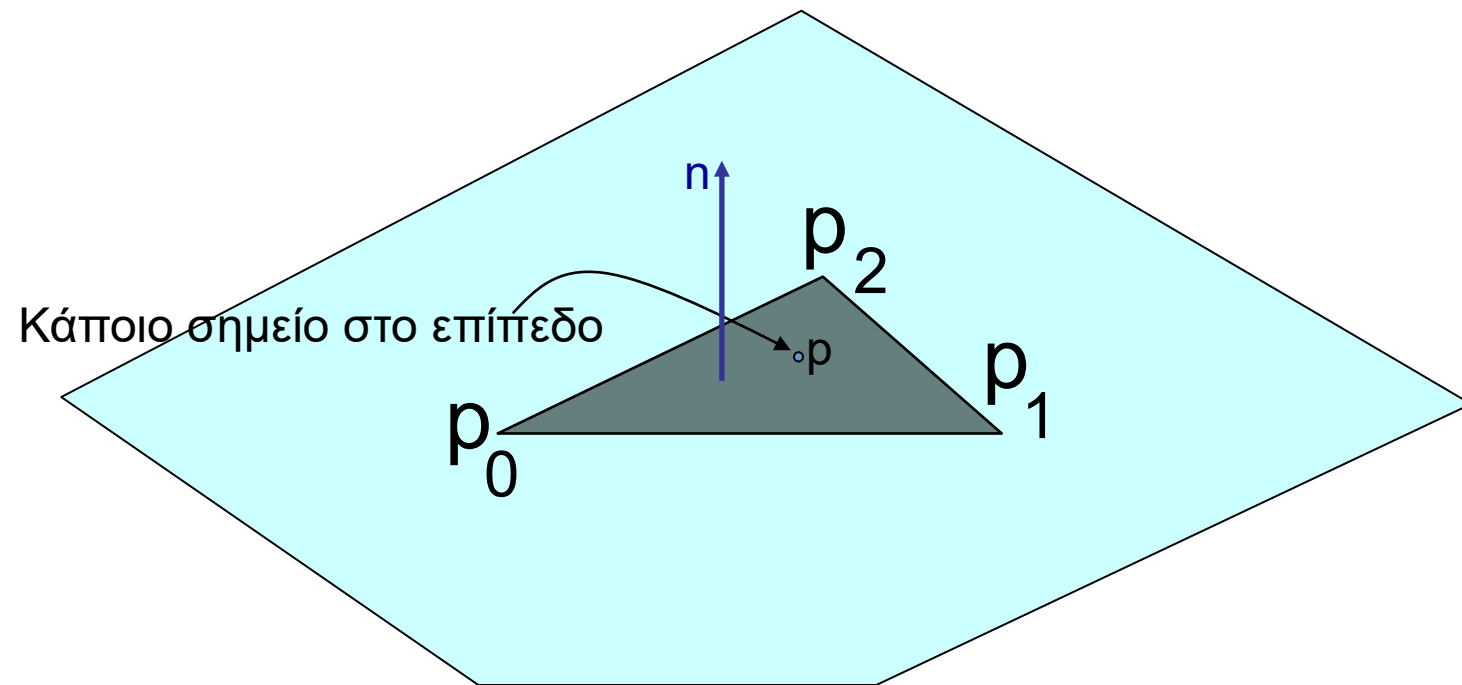


Εμάς μας ενδιαφέρουν κυρίως τα **απλά κυρτά** πολύγωνα μιας και οι αλγόριθμοι για αυτά είναι πιο απλοί και γρήγοροι. Επίσης μπορούν εύκολα να διασπαστούν σε τρίγωνα.

Εξίσωση του επιπέδου: Επανάληψη

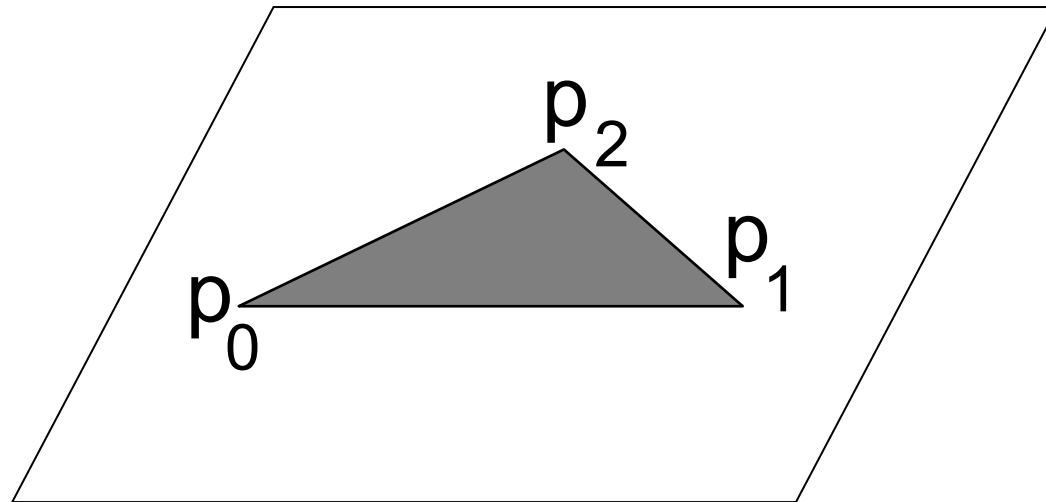
- a, b, c και d είναι **σταθερές** που ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο στο χώρο
- Τα $(a, b, c) = n$ ορίζουν την **κάθετο** στο επίπεδο
- Κάποιο σημείο $p(x, y, z)$ βρίσκεται στο επίπεδο αν και μόνο αν ικανοποιεί την εξίσωση:

$$ax + by + cz + d = 0$$

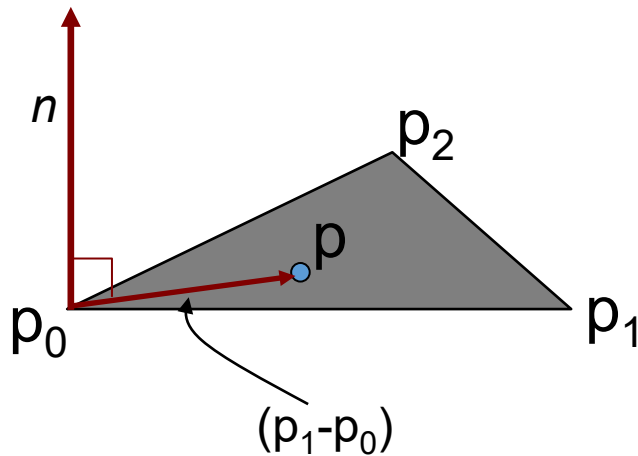
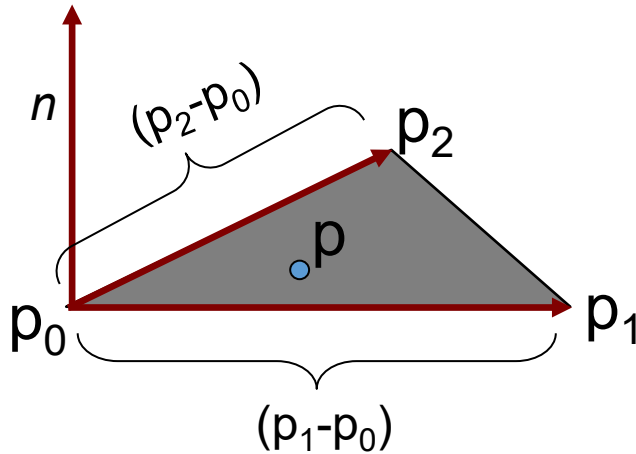


Εξίσωση επιπέδου: Επανάληψη

- Αν έχουμε **3 σημεία** μπορούμε να υπολογίσουμε την εξίσωση του επιπέδου:
 - Δημιουργούμε 2 διανύσματα και βρίσκουμε το εξωτερικό γινόμενο, αυτό μας δίνει το (a, b, c)
 - Αντικαθιστούμε οποιοδήποτε από τα 3 σημεία στην εξίσωση και μας δίνει το d .



Πως βρίσκουμε τα a,b,c & d: Επανάληψη



- Το εξωτερικό γινόμενο

$$n = (p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0)$$

ορίζει την κάθετο στο επίπεδο
με $n = (a, b, c)$

- Έχουμε 2 καθέτους (αντίστροφες κατευθύνσεις)
- Διανύσματα στο επίπεδο είναι κάθετα προς την κάθετο
- Από $ax + by + cz + d = 0$
 $\Rightarrow d = -(ax + by + cz)$ αν αντικ. το p_0
 $\Rightarrow d = n \cdot p_0 = -(n_1 \cdot x_0 + n_2 \cdot y_0 + n_3 \cdot z_0)$

Half-Space: Επανάληψη

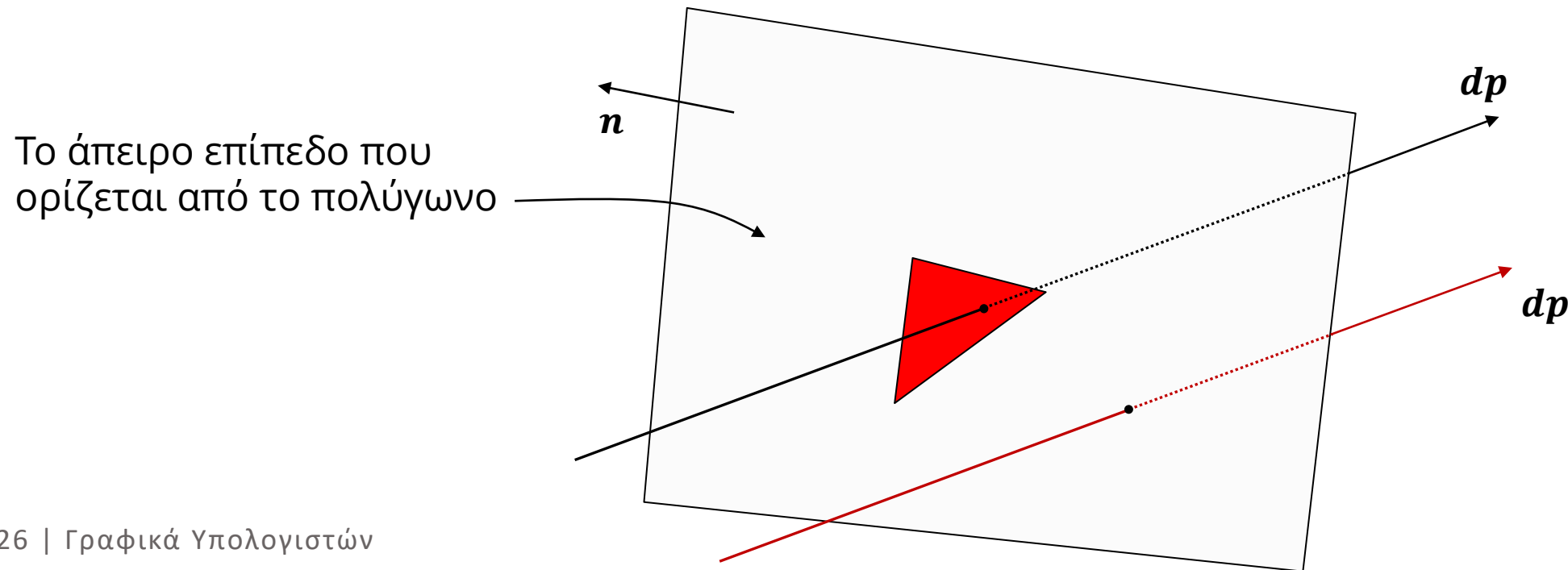
- Ένα επίπεδο μοιράζει το χώρο σε 2 half-spaces
- Ας ορίσουμε:

$$l(x, y, z) = ax + by + cz + d$$

- Αν $l(p) = 0$
 - Το σημείο p είναι στο επίπεδο
- Αν $l(p) > 0$
 - Το σημείο p είναι στο θετικό half-space
- Αν $l(p) < 0$
 - Το σημείο p είναι στον αρνητικό half-space

Περιγραφή της τομής πολυγώνου-ακτίνας

- Τρία βήματα
 1. Τέμνει η ακτίνα το **επίπεδο** του πολυγώνου?
 - Δηλ. να βεβαιωθούμε ότι δεν είναι παράλληλα.
 2. Βρίσκουμε το **σημείο τομής** (ακτίνα-επίπεδο)
 3. Ελέγχουμε αν το σημείο είναι **μέσα** στο πολύγωνο



1^ο βήμα: Τέμνει η ακτίνα το επίπεδο;

- Η παραμετρική εξίσωση της ακτίνας είναι:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t \cdot \mathbf{dp}$$

- Όπου το $\mathbf{dp}$ μας δίνει την κατεύθυνση της ακτίνας

- Η εξίσωση του επιπέδου είναι:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{n} \cdot (x, y, z) + d = 0$$

- όπου $\mathbf{n}$ είναι η κάθετος

- Τότε απλά χρειάζεται να ελέγξουμε αν

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{dp} \neq 0$$

- Δηλ. ότι τα δύο δεν είναι κάθετα

2^ο βήμα: Που το τέμνει;

- Αντικαθιστούμε την εξίσωση της ευθείας στην εξίσωση του επιπέδου

$$n \cdot (x_0 + t \cdot dx \quad y_0 + t \cdot dy \quad z_0 + t \cdot dz) = -d$$

- Λύνουμε ως προς t

$$t = \frac{-d - (n \cdot p_0)}{n \cdot dp}$$

- Και βρίσκουμε το p_i από

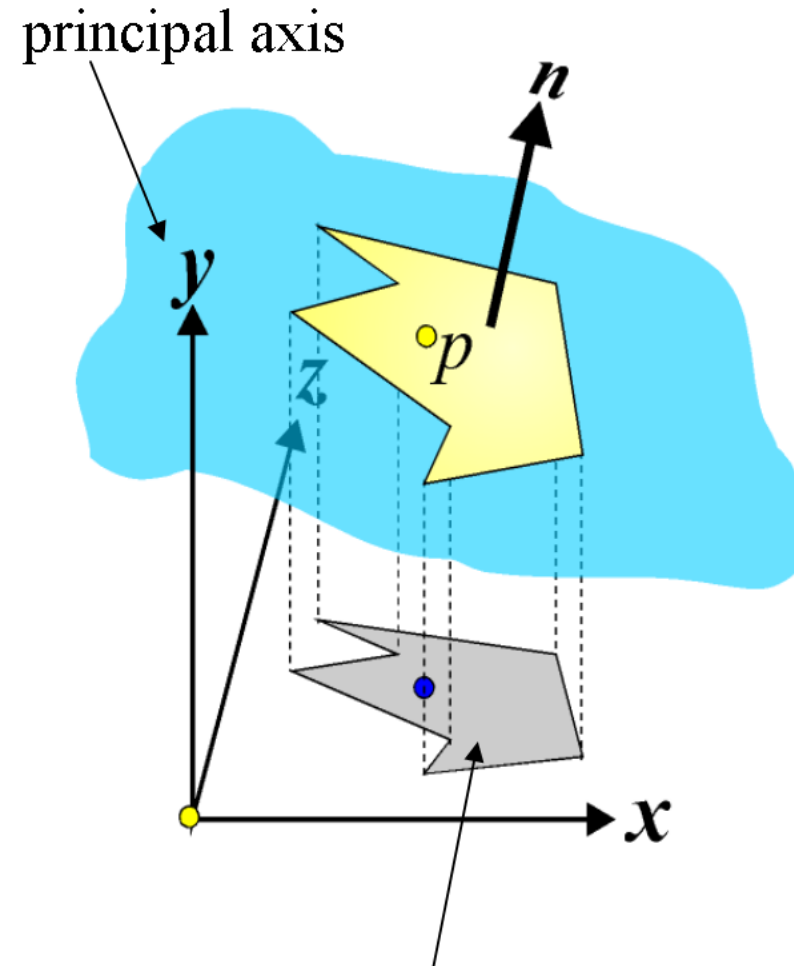
$$p_i = p_0 + t \cdot dp$$

3^ο βήμα: Είναι το σημείο τομής μέσα στο πολύγωνο;

- Είναι πιο εύκολο να κάνουμε το τεστ στις 2 διαστάσεις παρά στις 3
- Πρώτα «προβάλουμε» το πολύγωνο και το σημείο στις 2Δ
- Μετά έχουμε εκλογή από διάφορα τεστ:
 - Άθροισμα γωνιών
 - Half-space test
 - Άθροισμα πλευρών

Προβολή στις 2Δ

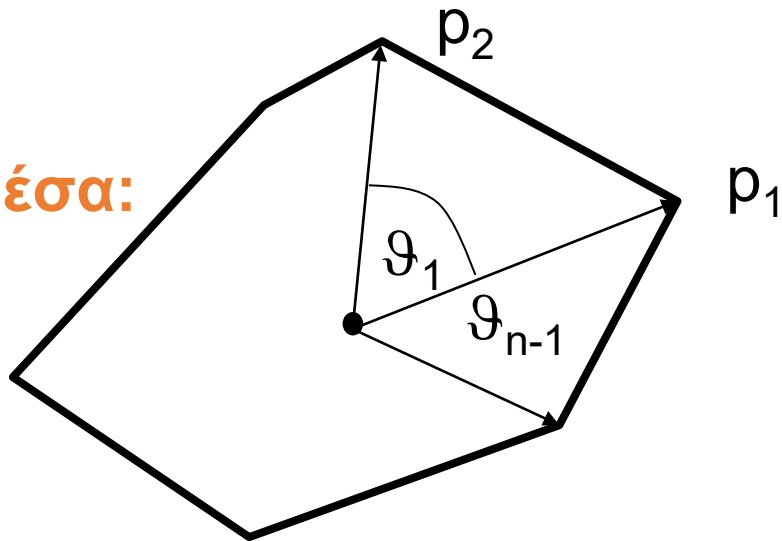
- Διαλέγουμε ένα από το πρωτεύοντα επίπεδα
 - Αν η κάθετος του πολυγώνου είναι $n=(n_x, n_y, n_z)$ τότε διαλέγουμε το μεγαλύτερο από τις τρεις τιμές



Άθροισμα γωνιών (κυρτά πολύγωνα)

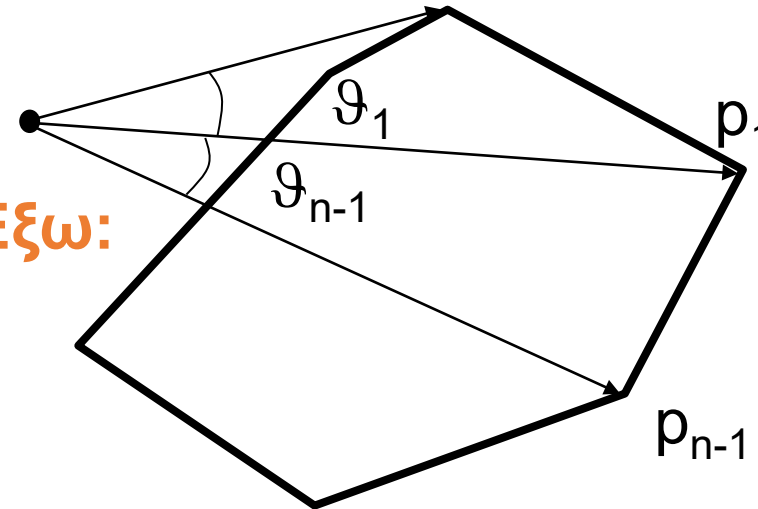
Αθροίζουμε τις γωνίες που έχουν σαν κορυφή το σημείο p

Μέσα:



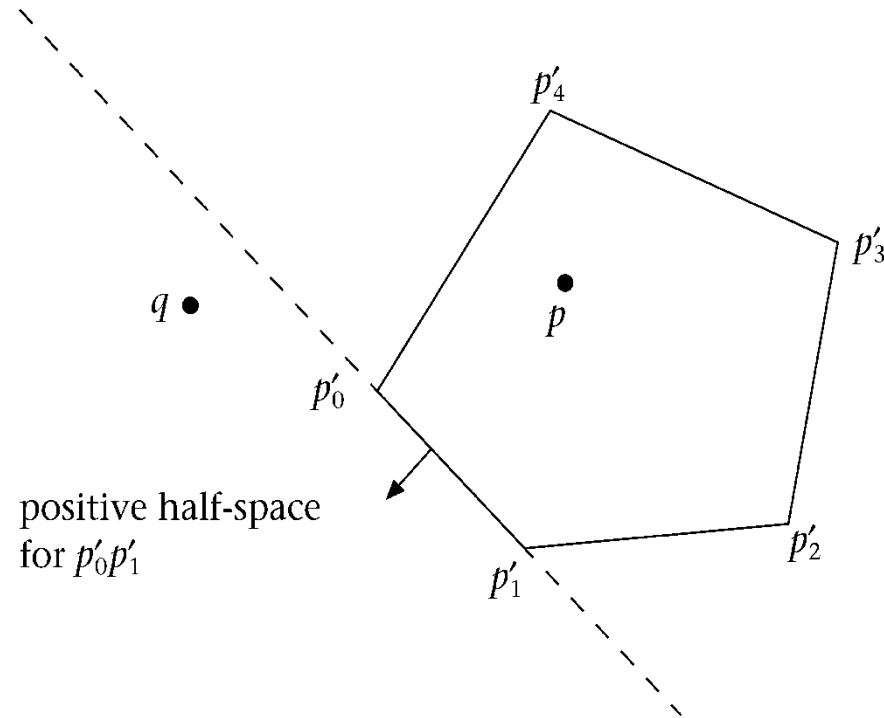
$$\sum_{i=1}^n \vartheta_i = 2\Pi$$

Έξω:



$$\sum_{i=1}^n \vartheta_i \neq 2\Pi$$

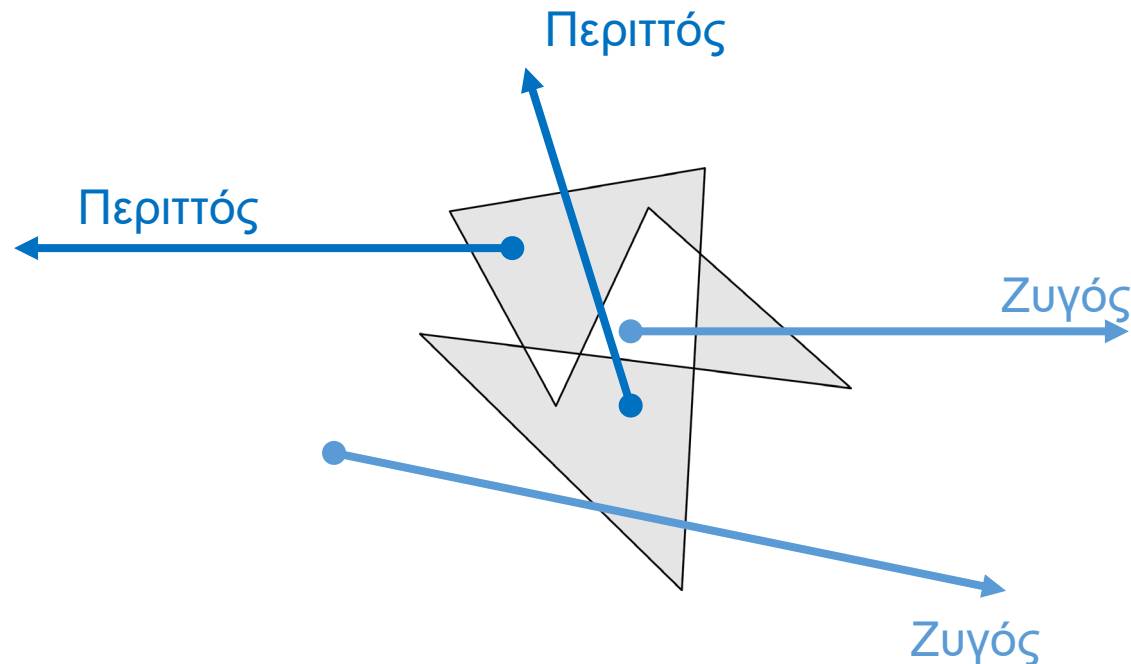
Half-Space Test (κυρτά πολύγωνα)



- Το σημείο p είναι μέσα στο πολύγωνο μόνο αν είναι στο αρνητικό half-space όλων των πλευρών

Άθροισμα πλευρών (γενικά πολύγωνα)-Odd-even rule

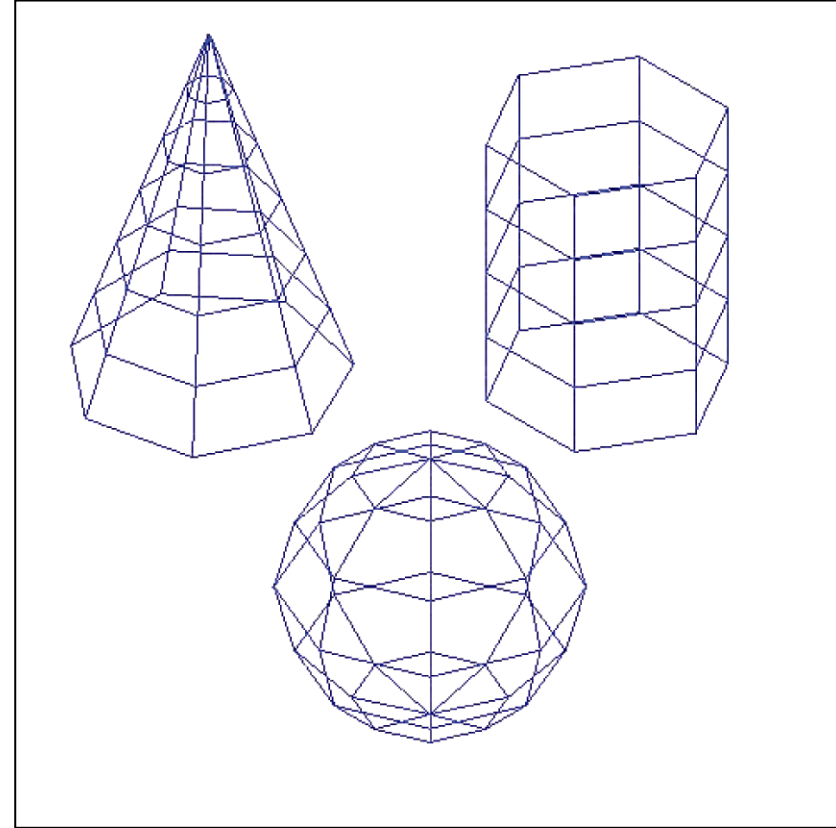
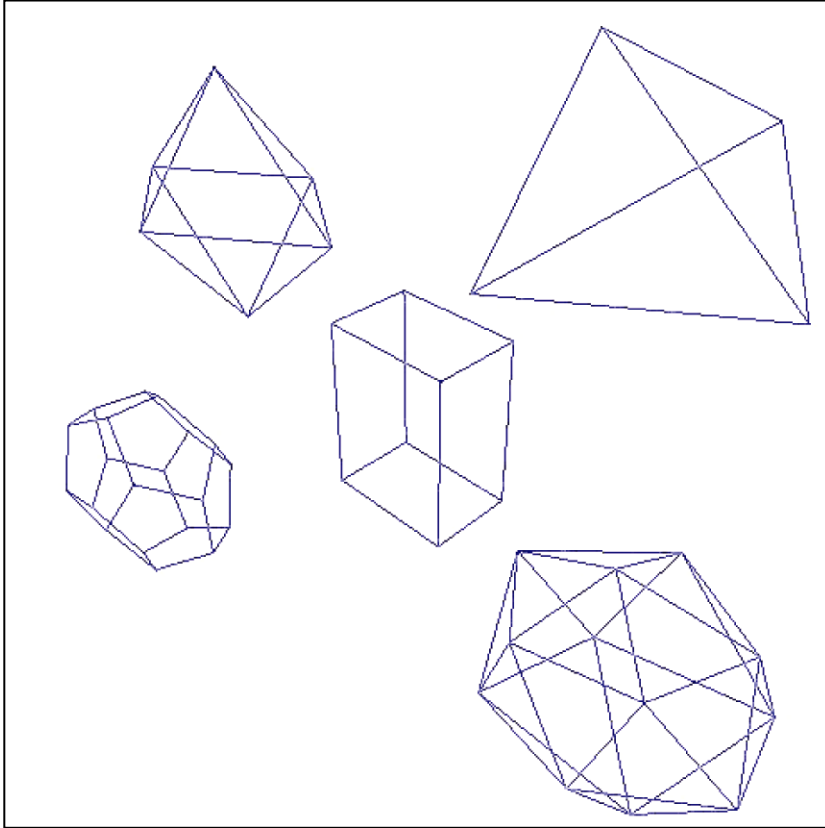
- Στέλνουμε μια ακτίνα στο άπειρο προς οποιαδήποτε κατεύθυνση
- Το αν το σημείο είναι μέσα ή έξω, εξαρτάται από το αν ο αριθμός των τεμνόμενων πλευρών είναι **περιττός (in)** ή **ζυγός (out)**



Πολύεδρα

- Τα αντικείμενα είναι απλά μια σειρά από πολύγωνες επιφάνειες
- Είναι ο απλούστερος και γρηγορότερος τρόπος για την απόδοση αντικειμένων
- Συχνά αναφέρονται ως *standard graphics objects*
- Σε πολλές περιπτώσεις μας επιτρέπετε να ορίσουμε αντικείμενα όπως καμπύλες επιφάνειες, αλλά στην πραγματικότητα αυτά μετατρέπονται σε πλέγματα πολυγώνων για την εμφάνιση τους
- Για να ορίσουμε πολύεδρα απλά ορίζουμε τις κορυφές των πολυγώνων που απαιτούνται

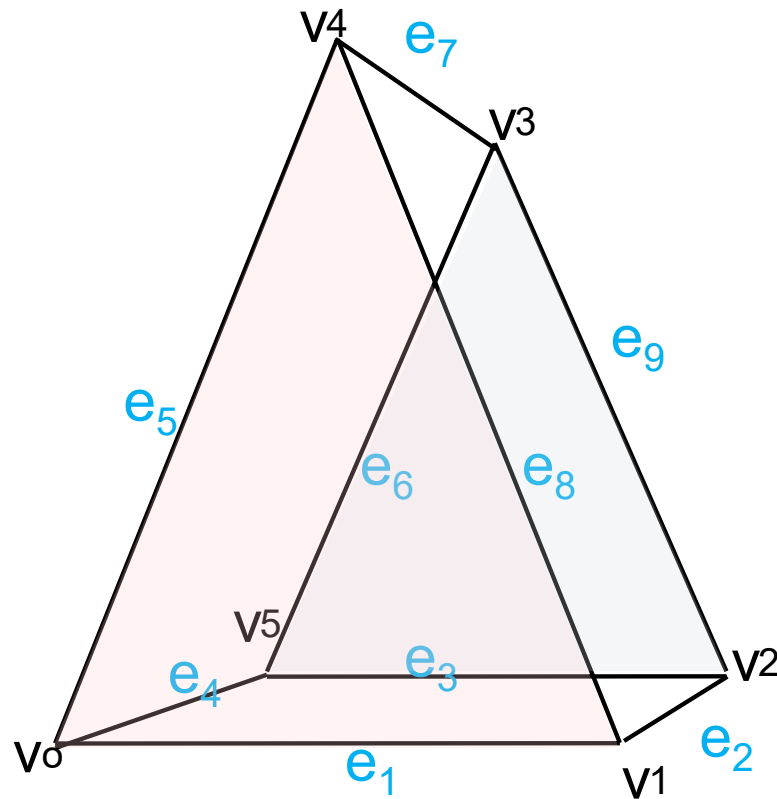
Πολύεδρα



Πολύεδρα

- Κάθε αντικείμενο μπορεί να είναι μια ομάδα από **πολύγωνα (Polygons or Faces)**, ένα πολύεδρο. Ή ακόμα και μια σειρά από πολύεδρα
 - Κάθε **πλευρά (Edge)** αποτελείται από 2 **κορυφές (Vertices)** και ενώνει δύο πολύγωνα
 - Συνήθως κάθε κορυφή είναι κοινή για 3 πλευρές
 - Τα πολύγωνα δεν διασταυρώνονται
- For closed objects:
 - $V - E + F = 2$
 - $\#Vertices - \#Edges + \#Faces = 2$
 - Για κύβους, τετράεδρα, αγγελάδες κτλ...

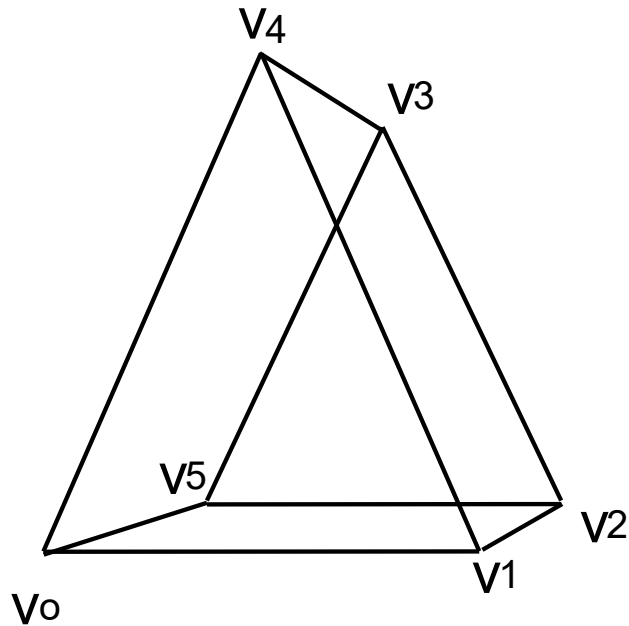
Παράδειγμα Πολύεδρου



- $F0=v_0v_1v_4$
- $F1=v_5v_3v_2$
- $F2=v_1v_2v_3v_4$
- $F3=v_0v_4v_3v_5$
- $F4=v_0v_5v_2v_1$

- $V=6, F=5, E=9$
- $V-E+F=2$

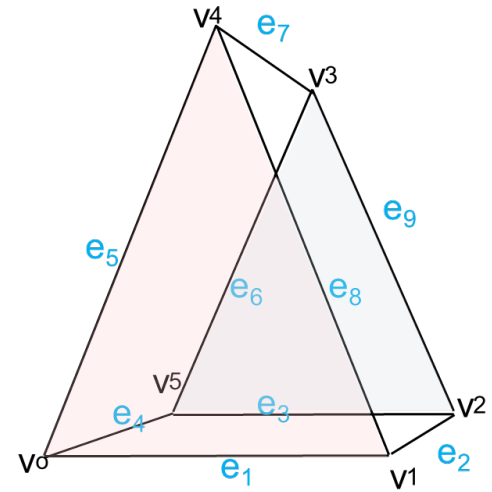
Η σειρά των κορυφών είναι σημαντική



- Το πολύγωνο $\{v_0, v_1, v_4\}$ δεν είναι το ίδιο με το $\{v_0, v_4, v_1\}$
- Η κάθετος των δύο δείχνει προς την αντίθετη κατεύθυνση
- Συνήθως το κάθε πολύγωνο είναι ορατό μόνο από το θετικό του half-space
- Αυτό είναι γνωστό, **όπως θα δούμε σε επόμενες διαφάνειες**, ως απόκρυψη πίσω επιφανειών (back-face culling)

Αναπαράσταση πολυέδρων

- Εξαντλητικά (πίνακας από σειρές κορυφών)
 - $\text{faces}[0] = (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_4, y_4, z_4)$
 - $\text{faces}[1] = (x_5, y_5, z_5), (x_3, y_3, z_3), (x_2, y_2, z_2)$
 - κτλ
- Πολύ σπάταλο αφού η κάθε κορυφή παρουσιάζεται (τουλάχιστον) 3 φορές στην λίστα
 - Παρόλα αυτά χρησιμοποιείται αρκετά!



Αναπαράσταση πολυέδρων

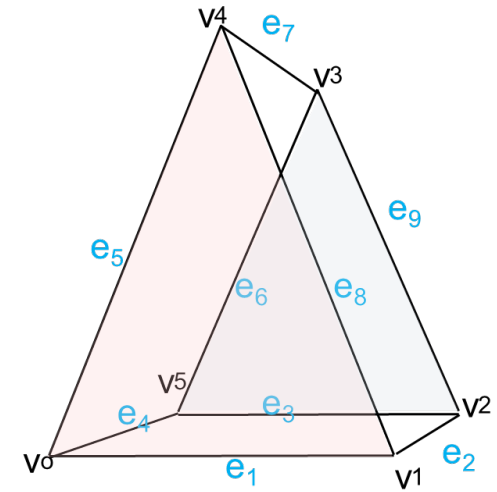
Indexed Face set

1. Πίνακας κορυφών (**Vertex array**)

- $\text{vertices}[0] = (x_0, y_0, z_0)$
- $\text{vertices}[1] = (x_1, y_1, z_1)$
- κτλ ...

2. Πίνακας πολυγώνων (**Face array**) – λίστα από δείκτες στον πίνακα κορυφών

- $\text{faces}[0] = 0, 1, 4$
- $\text{faces}[1] = 5, 3, 2$
- κτλ ...



Τετράεδρες επιφάνειες (Quadric Surfaces)

- Μια κατηγορία αντικειμένων που χρησιμοποιείται συχνά είναι τα quadric surfaces
- Αυτές είναι 3D επιφάνειες που περιγράφονται χρησιμοποιώντας quadratic εξισώσεις
- Μερικά quadric surfaces αντικείμενα είναι:
 - Σφαίρες
 - Ελλειψοειδές
 - Tori
 - Paraboloids
 - Hyperboloids

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$x = r \cos \phi \cos \theta$$

$$y = r \cos \phi \sin \theta$$

$$z = r \sin \phi$$

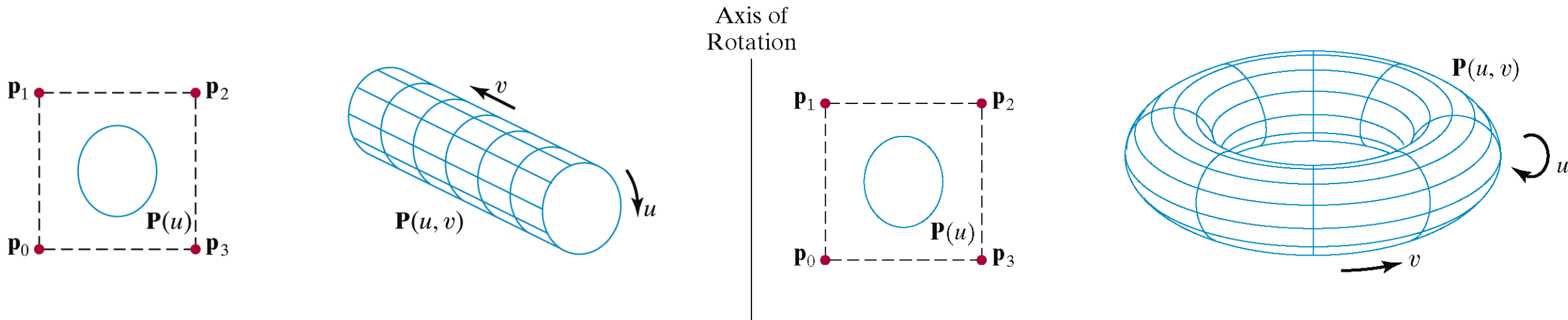
$$-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

Σφαίρα (εξίσωση + παραμετρική εξίσωση)

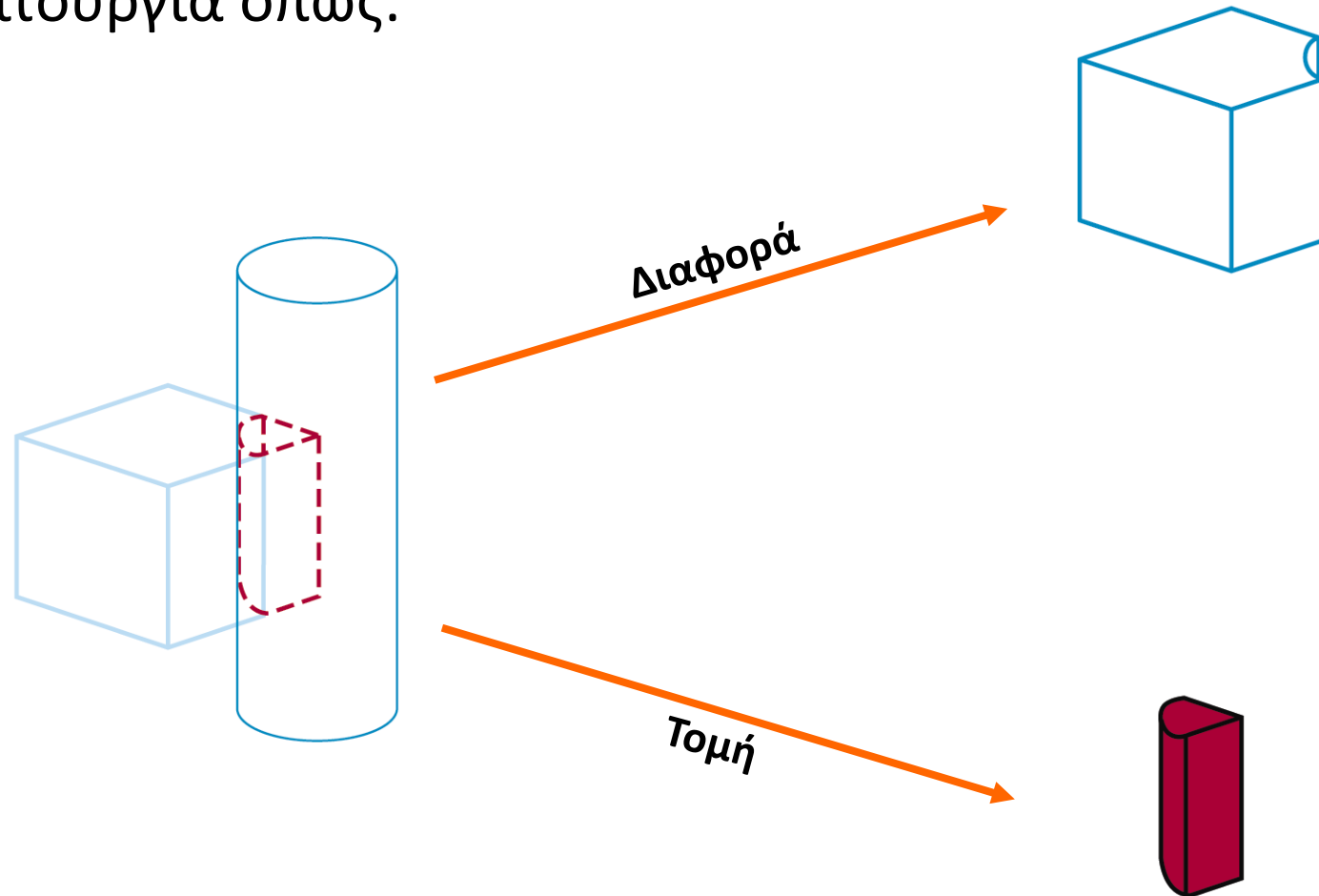
Sweep Representations

- Οι αναπαραστάσεις σάρωσης (Sweep Representations) είναι χρήσιμες για την κατασκευή 3 διαστάσεων αντικειμένων με χρήση μετασχηματισμών μετακίνησης, περιστροφής, ή άλλες συμμετρίες



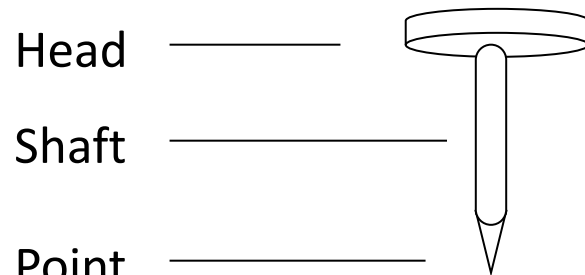
Constructive Solid Geometry

- Constructive Solid Geometry (CSG) εκτελεί συμπαγή μοντελοποίηση με τη δημιουργία ενός νέου αντικειμένου από άλλα αντικείμενα χρησιμοποιώντας μια συγκεκριμένη λειτουργία όπως:
 - Ένωση
 - Τομή
 - Διαφορά

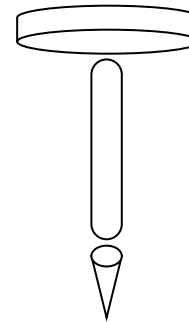


Αποσύνθεση γεωμετρικού μοντέλου: Επανάληψη

- Divide and Conquer
- Hierarchy of geometrical components
- Reduction to primitives (e.g., spheres, cubes, etc.)
- Simple vs. not-so-simple elements (nail vs. screw)



composition

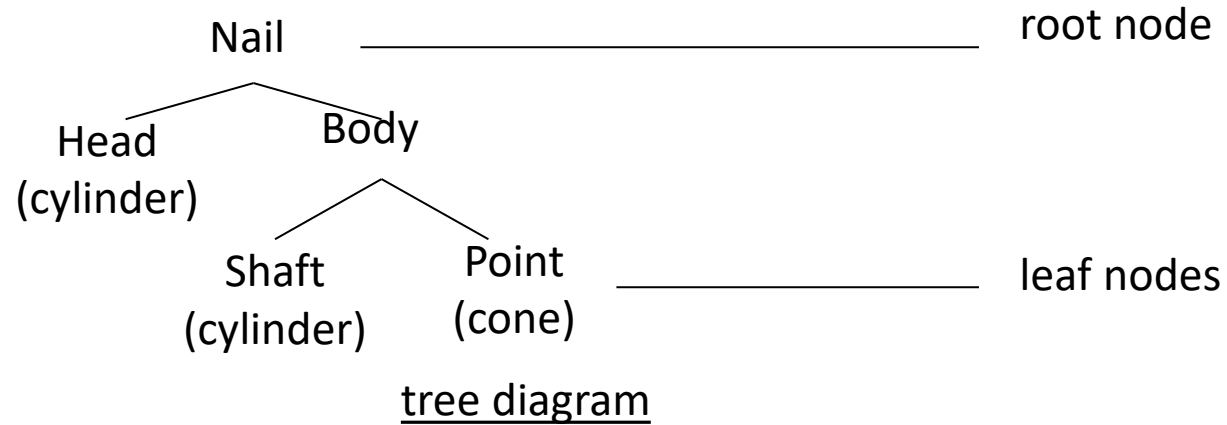


decomposition

Γράφημα Σκηνής: Επανάληψη

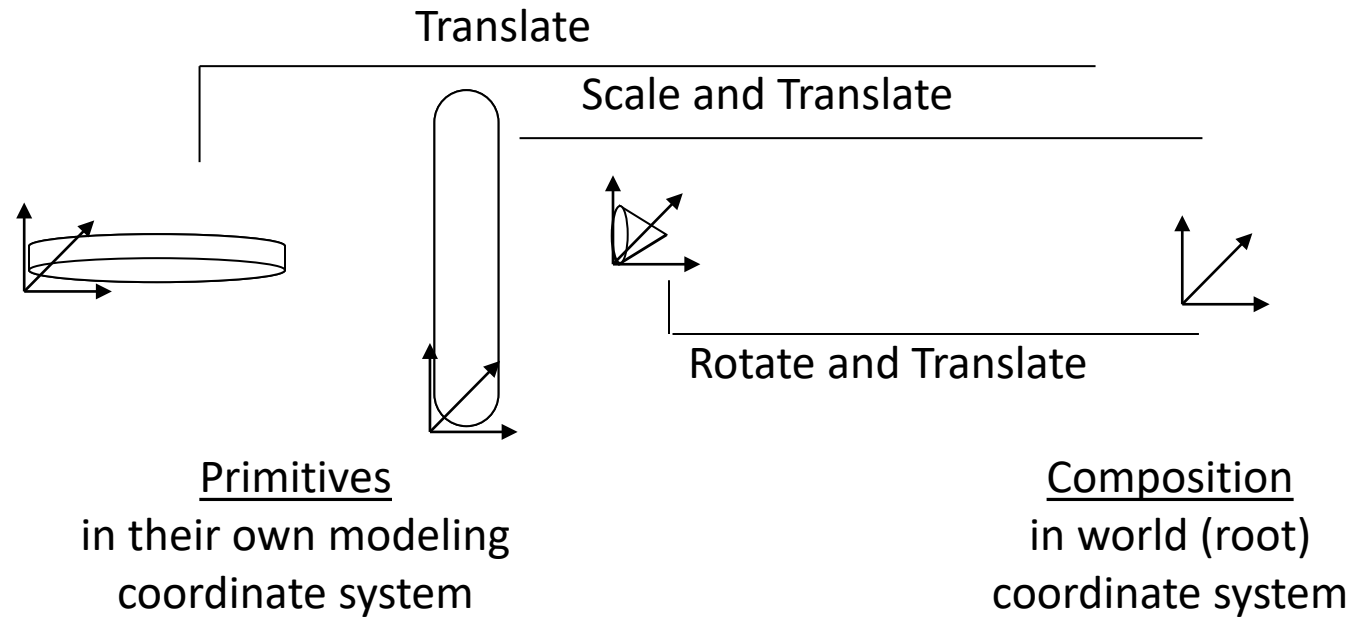
Hierarchical (Tree) Diagram of Nail

- Object to be modeled is (visually) analyzed, and then decomposed into collections of primitive shapes.
- Tree diagram provides visual method of expressing “composed of” relationships of model



- Such diagrams are part of 3D program interfaces (e.g., 3D Studio MAX, Maya)

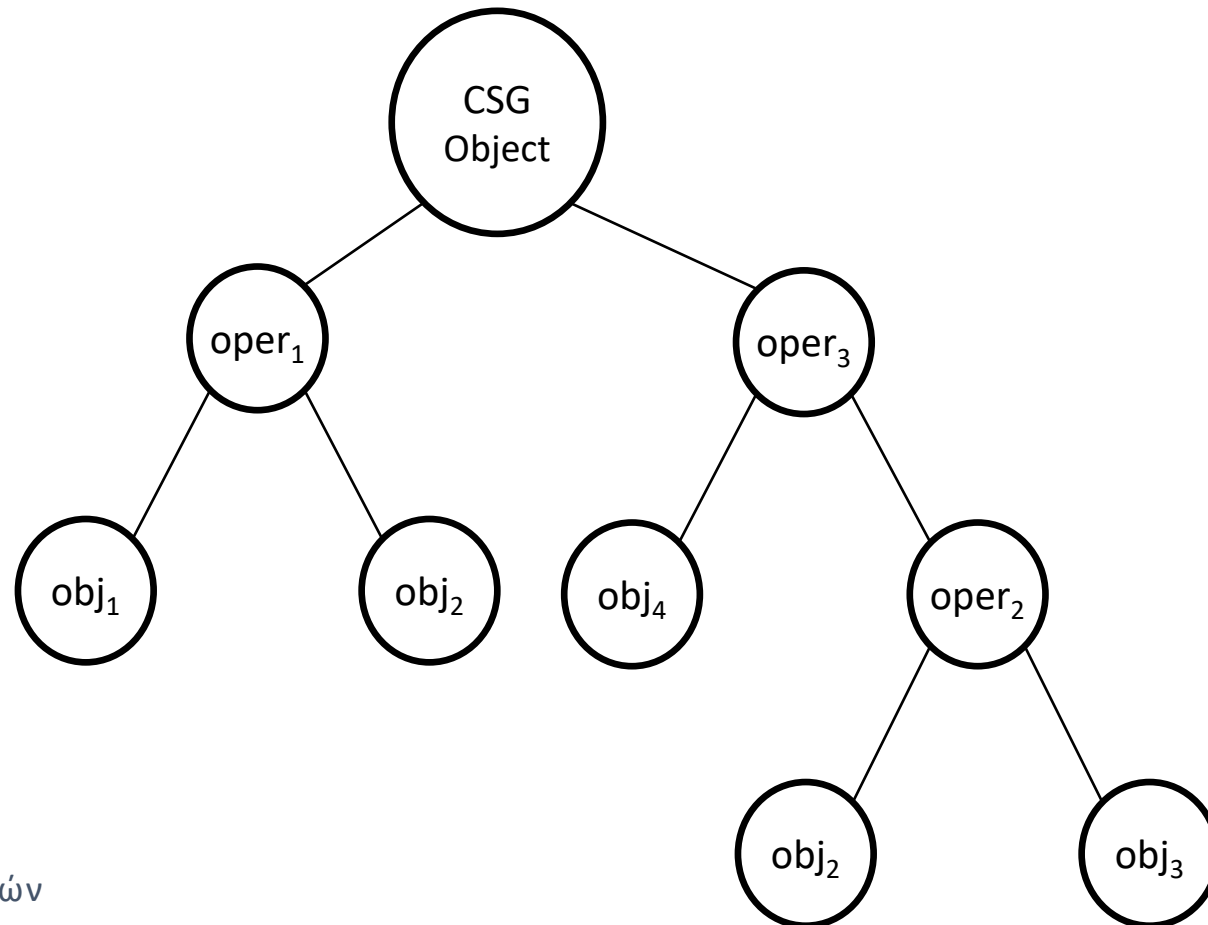
Σύνθεση γεωμετρικού μοντέλου: Επανάληψη



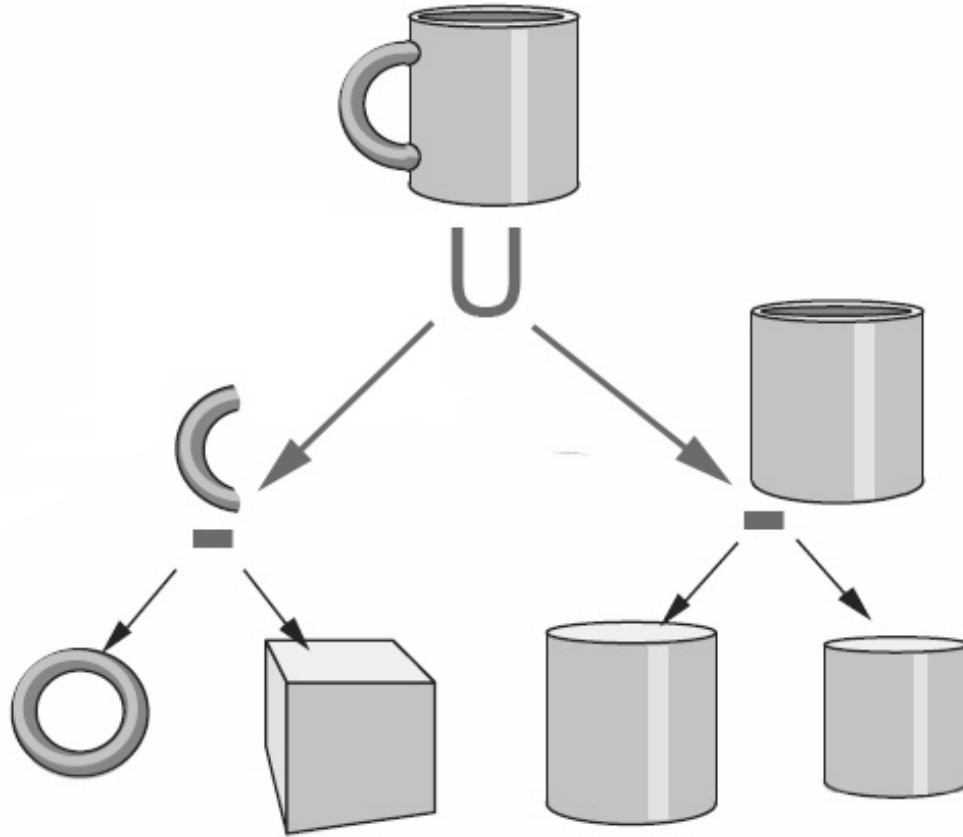
- Primitives created in decomposition process must be assembled to create final object. Done with **affine transformations**, T, R, S (as in above example). Order matters – these are not commutative!

Constructive Solid Geometry

- Στα CSG συνήθως ξεκινά με ένα μικρό σύνολο πρωτόγονων αντικειμένων, όπως κύβους, πυραμίδες, σφαίρες, και κώνους
 - Τα μοντέλα CSG αντιπροσωπεύονται συνήθως ως δέντρα



Constructive Solid Geometry



Επόμενο μάθημα

- Μεταφορά από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο.
- Μετατροπή της σκηνή, έτσι ώστε να εμφανίζεται μπροστά από την κάμερα (viewing)

