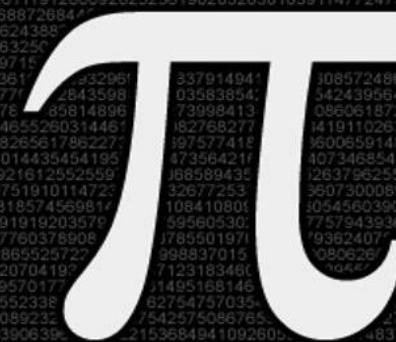




Γραφικά Υπολογιστών

Βασικά μαθηματικά: Γραμμική Άλγεβρα

Andreas Aristidou

andarist@ucy.ac.cy

<http://www.andreasaristidou.com>

Περιγραφή

A. Βασική Γεωμετρία

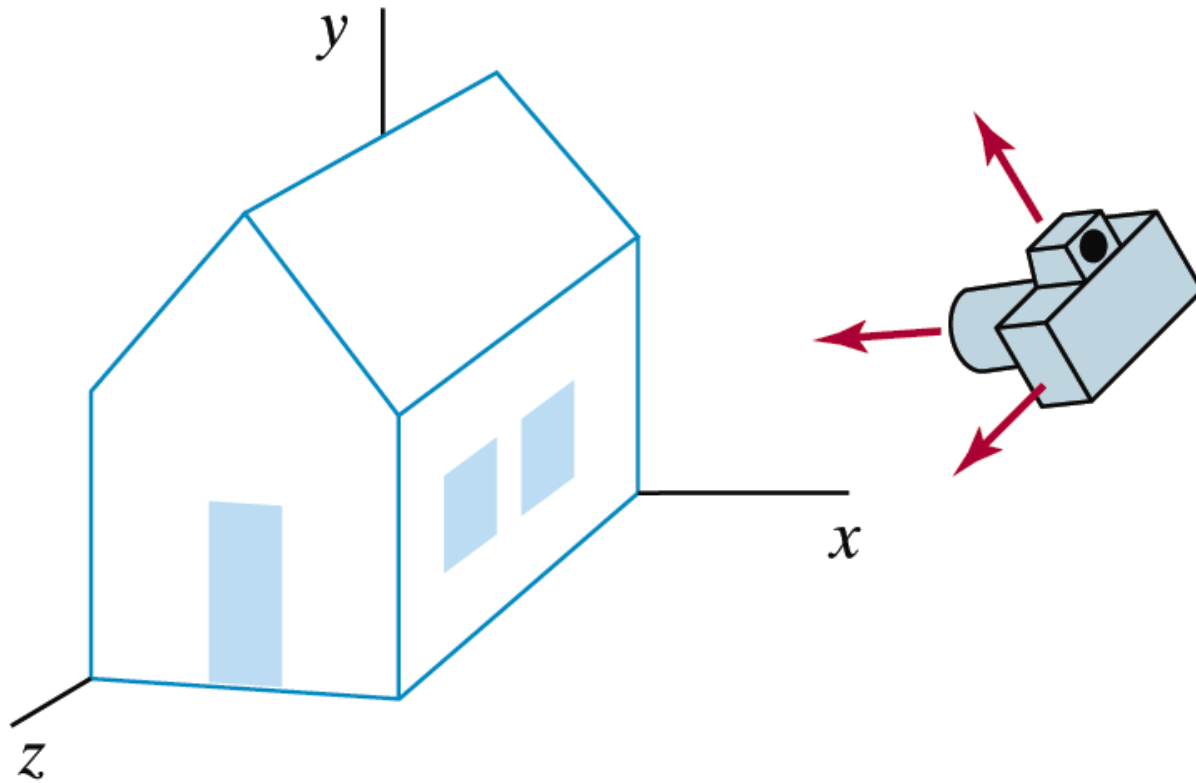
- Αρχικές συντεταγμένες
- Σημεία
- Διανύσματα
- Ευθείες
- Επίπεδα
- Σφαίρες

B. Πίνακες

- Μετασχηματισμοί με πίνακες

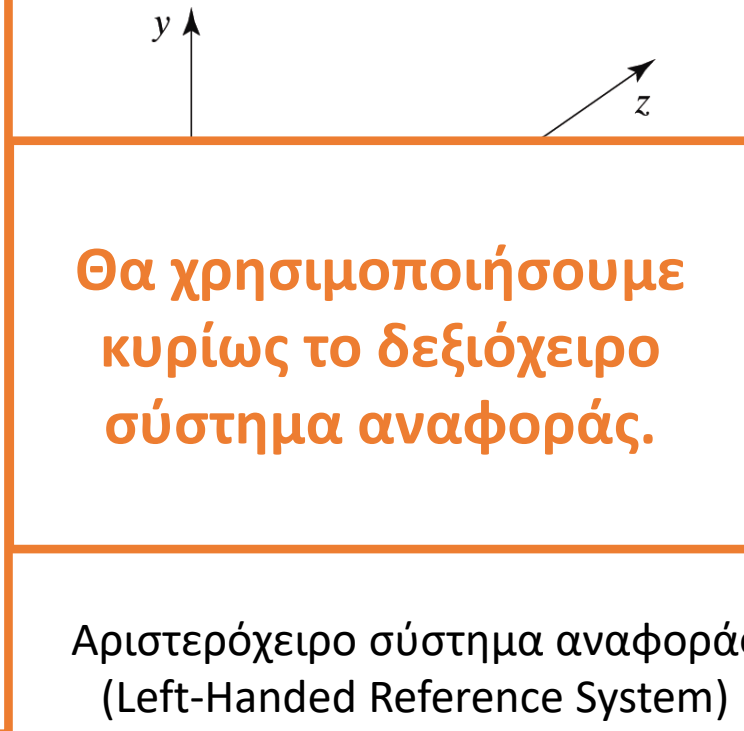
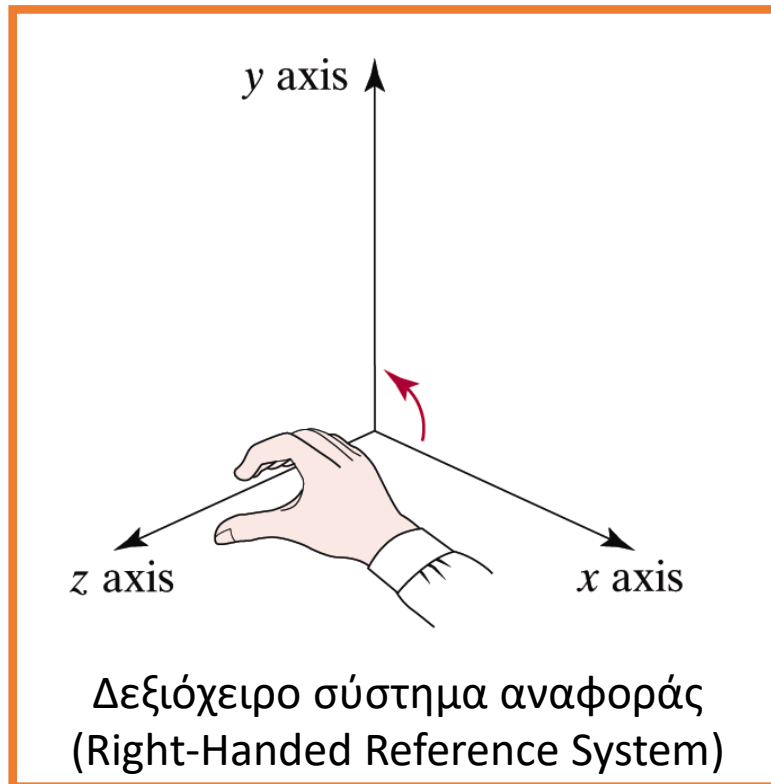
- *Τα γραφικά υπολογιστών είναι πάνω από όλα μαθηματικά!*
- *Τα μαθηματικά ωστόσο που χρησιμοποιούνται δεν είναι **δύσκολα**, αλλά πρέπει να τα κατανοήσουμε καλά για να μπορέσουμε να εννοήσουμε ορισμένες τεχνικές.*

Βασική Ιδέα

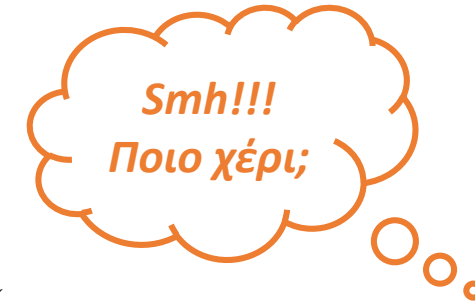


Δεξιόχειρο ή Αριστερόχειρο σύστημα;

- Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να ορίσουμε 3D συντεταγμένες – δεξιόχειρα ή αριστερόχειρα.



Θα χρησιμοποιήσουμε
κυρίως το δεξιόχειρο
σύστημα αναφοράς.

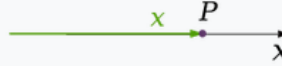
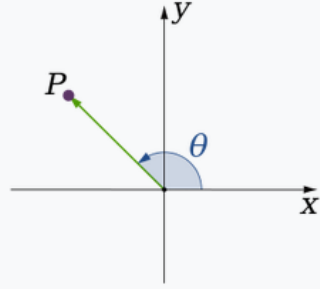
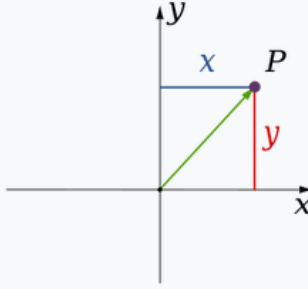
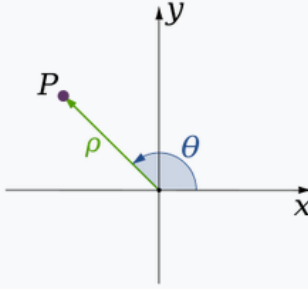
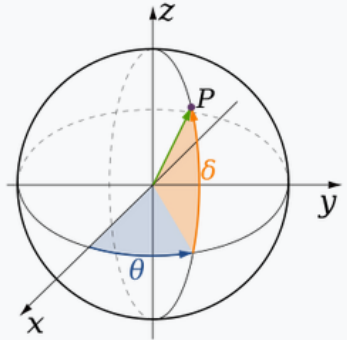
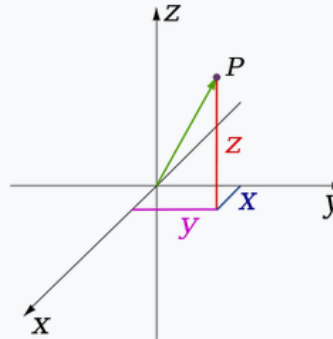
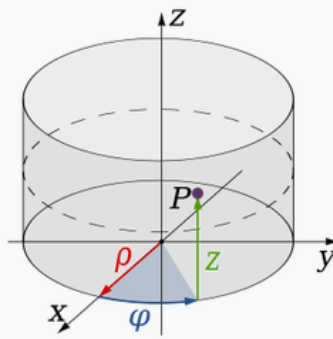
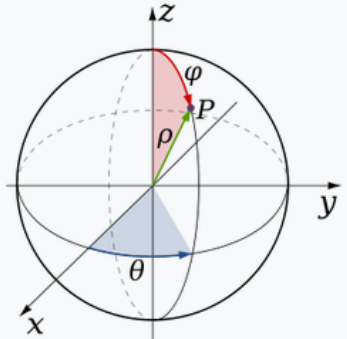


ΜΕΡΟΣ Α - Βασική Γεωμετρία

Διάσταση

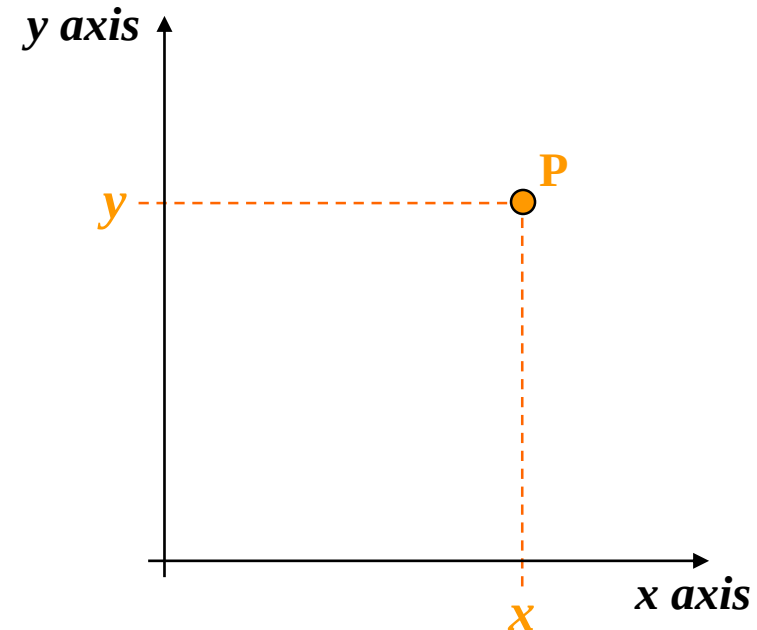
- Πόση ελευθερία έχει κάποιο «αντικείμενο» να *κινείται* στο χώρο
- Πόσες μεταβλητές χρειάζονται για να ορίσουν την ακριβή θέση

<https://en.wikipedia.org/wiki/Dimension>

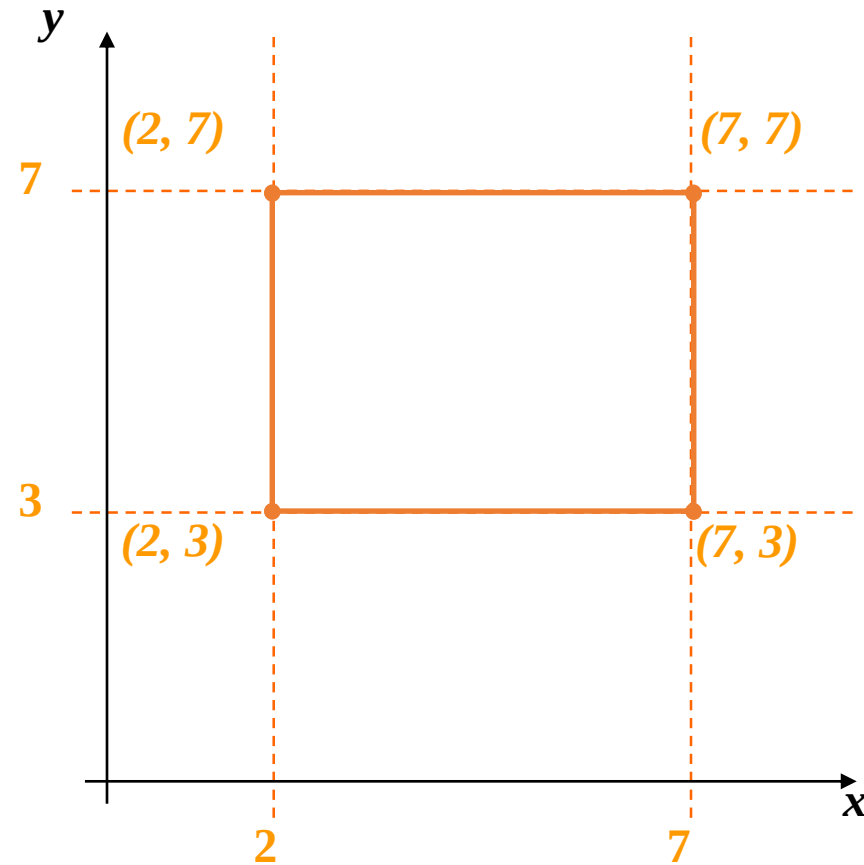
Number of dimensions	Example co-ordinate systems		
1	 Number line	 Angle	
2	 Cartesian (two-dimensional)	 Polar	 Latitude and longitude
3	 Cartesian (three-dimensional)	 Cylindrical	 Spherical

Σημείο αναφοράς – 2Δ

- Όταν δημιουργούμε μια σκηνή στα γραφικά υπολογιστών, ουσιαστικά ορίζουμε τη σκηνή με απλή γεωμετρία
- Για 2Δ σκηνές χρησιμοποιούμε απλές δισδιάστατες Καρτεσιανες συντεταγμένες
- Όλα τα αντικείμενα ορίζονται με απλά ζεύγη συντεταγμένων

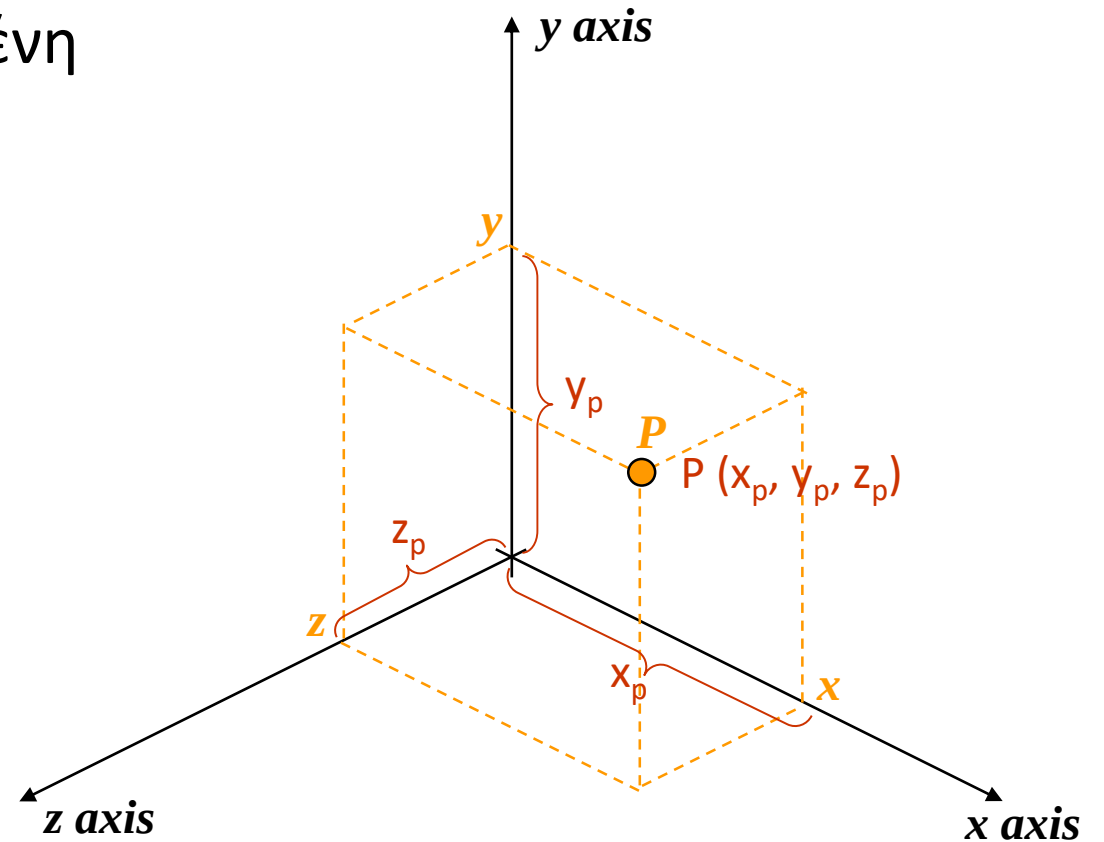


Σημείο αναφοράς – 2Δ

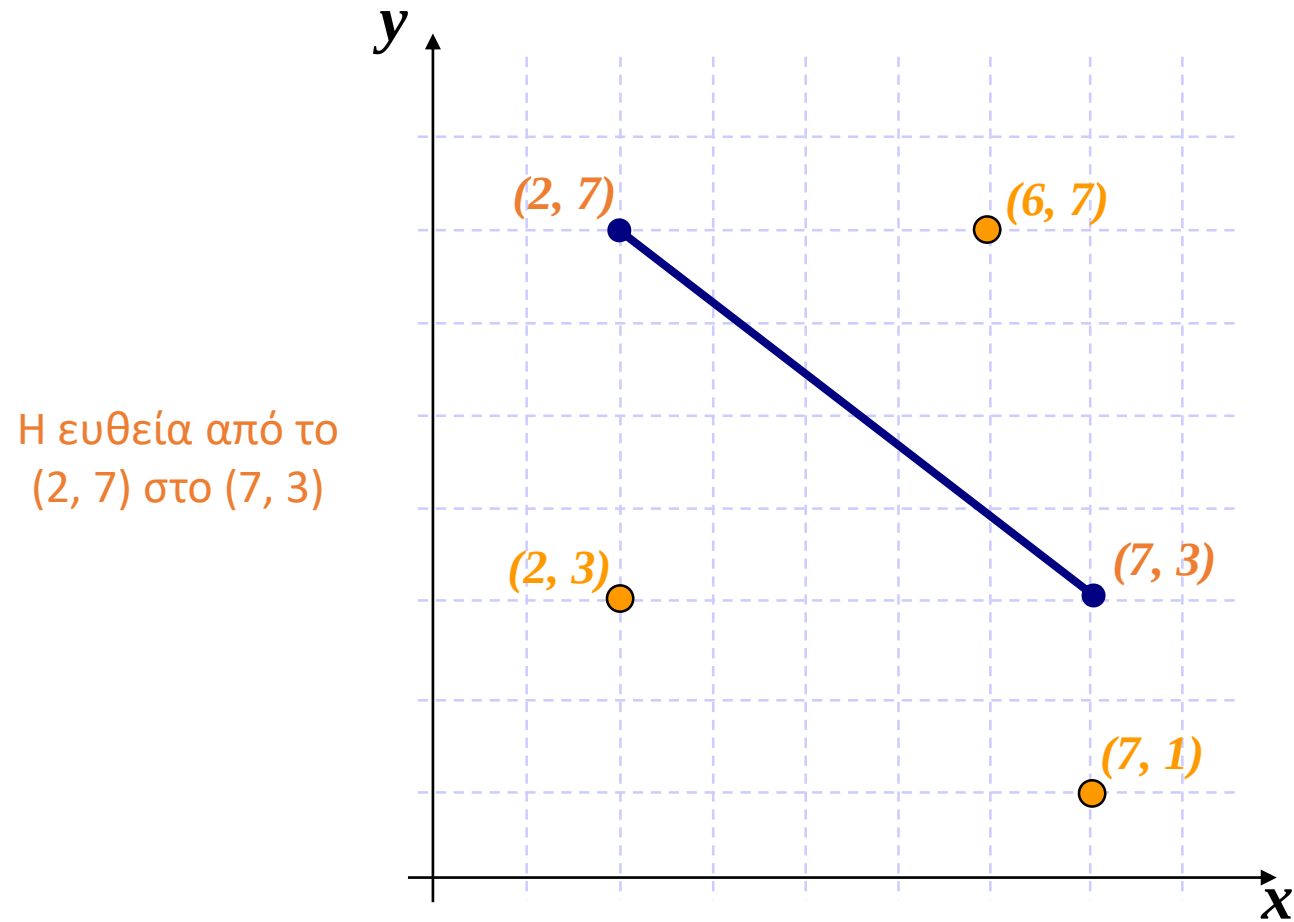


Σημείο αναφοράς – 3Δ

- Για τριών διαστάσεων σκηνές απλά προσθέτουμε μια επιπλέον συντεταγμένη
- $P(x, y, z)$



Σημεία & Ευθείες



Η εξίσωση ευθείας

- Η εξίσωση κλίσης για μια ευθεία είναι:

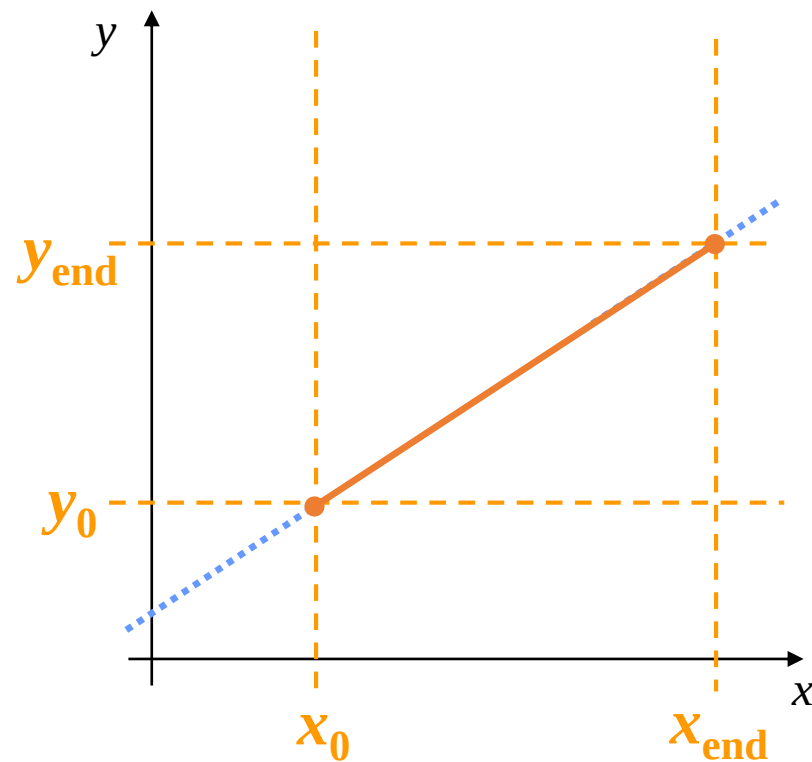
$$y = m \cdot x + b$$

- όπου:

$$m = \frac{y_{end} - y_0}{x_{end} - x_0}$$

$$b = y_0 - m \cdot x_0$$

- Η συγκεκριμένη εξίσωση ευθείας μας δίνει το αντίστοιχο σημείο y για κάθε σημείο x .



Ένα απλό παράδειγμα

- Ας δούμε ένα μέρος της ευθείας που δίνεται από την εξίσωση:

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$$

- Ποια είναι η y συντεταγμένη για κάθε x σημείο;

Ένα απλό παράδειγμα

- Για κάθε τιμή x υπολογίζουμε την τιμή του y :

$$y(2) = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} = 2$$

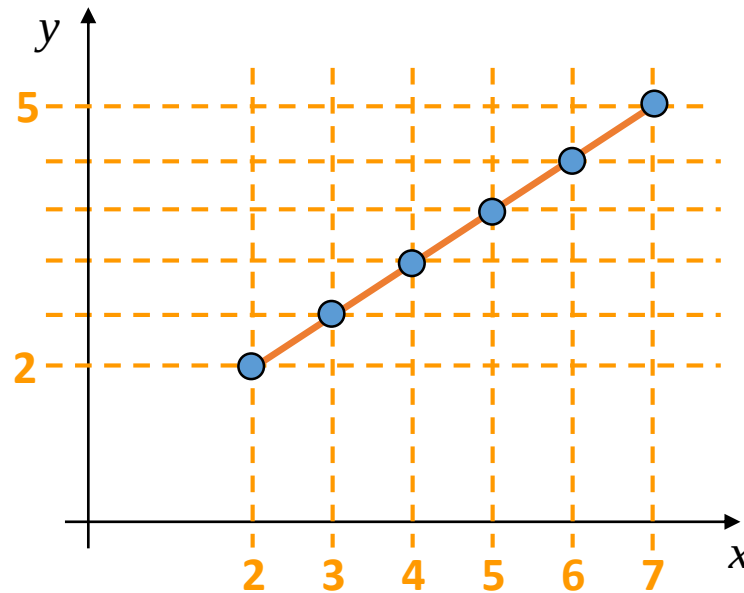
$$y(3) = \frac{3}{5} \cdot 3 + \frac{4}{5} = 2\frac{3}{5}$$

$$y(4) = \frac{3}{5} \cdot 4 + \frac{4}{5} = 3\frac{1}{5}$$

$$y(5) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5}$$

$$y(6) = \frac{3}{5} \cdot 6 + \frac{4}{5} = 4\frac{2}{5}$$

$$y(7) = \frac{3}{5} \cdot 7 + \frac{4}{5} = 5$$

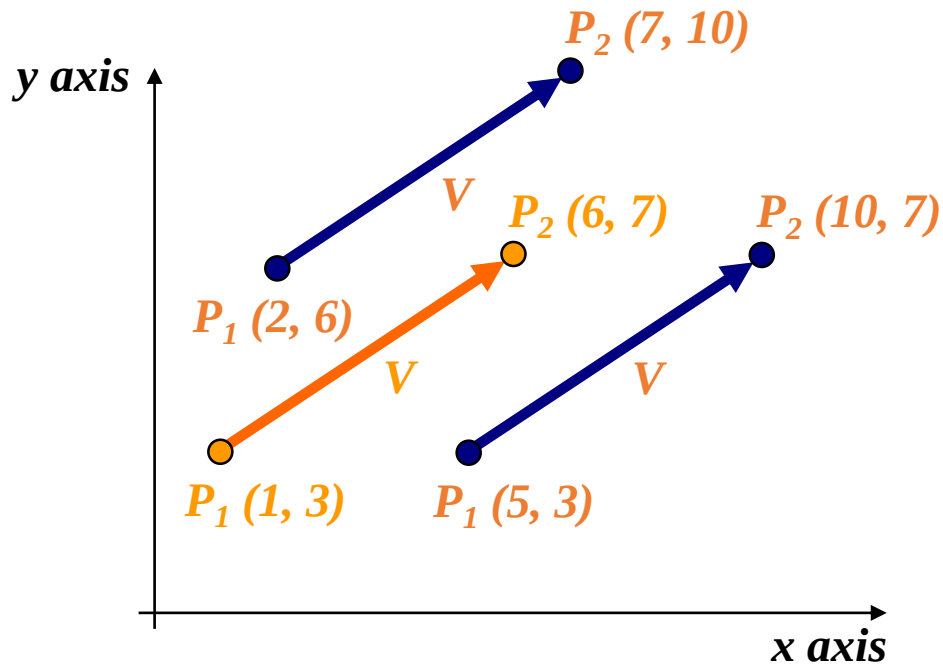


Διανύσματα (Vectors)

- Διάνυσμα:
 - Ένα διάνυσμα ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ δύο σημείων
 - Το σημαντικό ωστόσο είναι ότι κάθε διάνυσμα έχει κατεύθυνση και μήκος
- Που χρησιμοποιούνται τα διανύσματα;
 - Ένα διάνυσμα μας δείχνει πως και πόσο θα μετακινηθεί ένα αντικείμενο από ένα σημείο σε ένα άλλο
 - Τα διανύσματα είναι πολύ σημαντικά στα γραφικά, ειδικά στους μετασχηματισμούς που θα δούμε στη συνέχεια (translation)

Διανύσματα (2Δ)

- Για να προσδιορίσουμε το διάνυσμα μεταξύ δύο σημείων, απλά τα αφαιρούμε

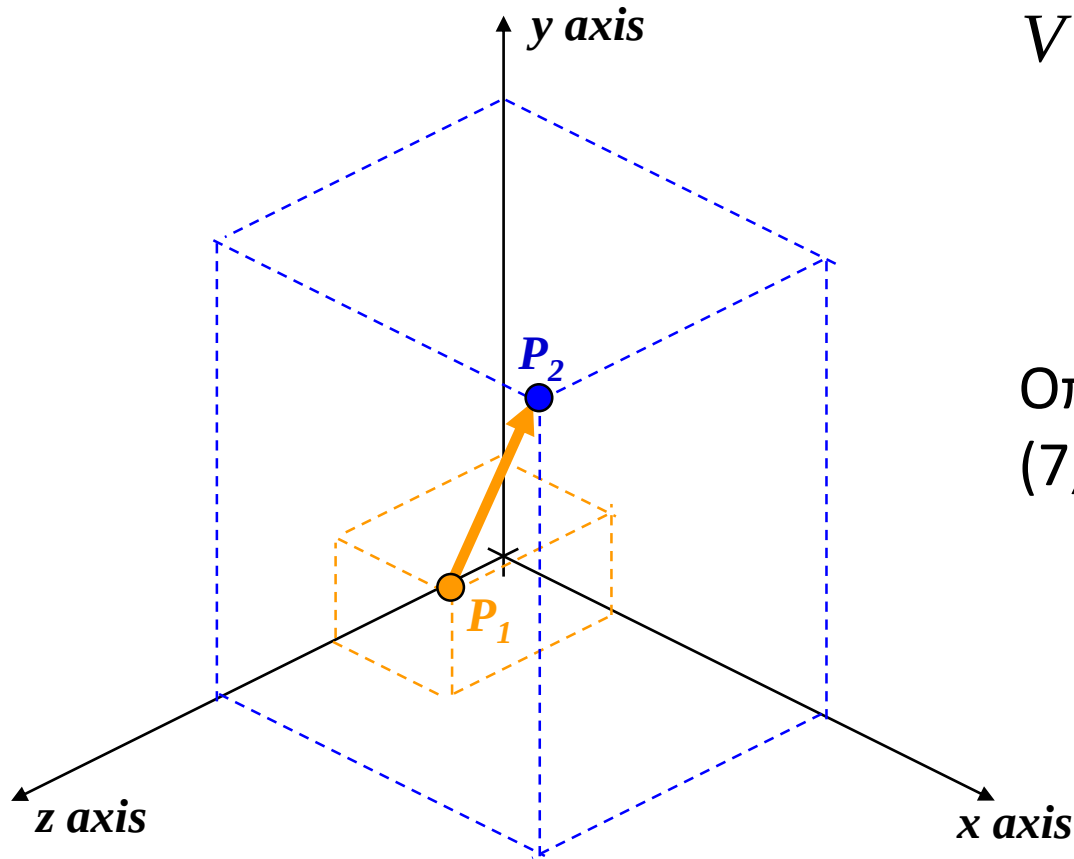


$$\begin{aligned} V &= P_2 - P_1 \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\ &= (6 - 1, 7 - 3) \\ &= (5, 4) \end{aligned}$$

Προσοχή: Πολλά ζεύγη σημείων έχουν το ίδιο διάνυσμα μεταξύ τους.

Διανύσματα (3Δ)

- Στις τρεις διαστάσεις, τα διανύσματα υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο



$$\begin{aligned} V &= P_2 - P_1 \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ &= (V_x, V_y, V_z) \end{aligned}$$

Οπότε, από το (2, 1, 3) στο (7, 10, 5) θα έχουμε

$$\begin{aligned} &= (7 - 2, 10 - 1, 5 - 3) \\ &= (5, 9, 2) \end{aligned}$$

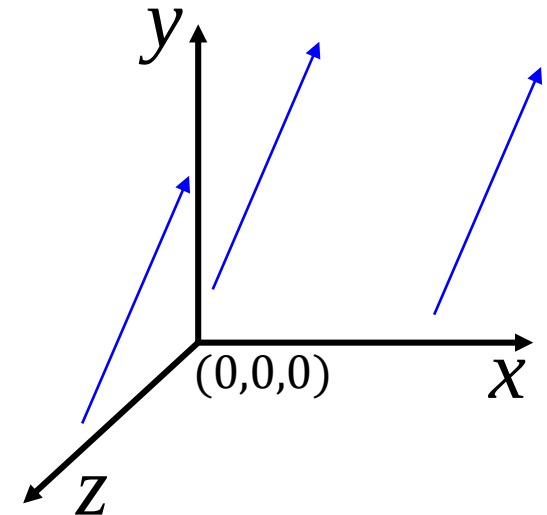
Διανύσματα

- Υπάρχουν πολλές σημαντικές λειτουργίες που πρέπει να γνωρίζουμε ώστε να διαχειριστούμε και να επεξεργαστούμε σωστά τα διανύσματα:

- Υπολογισμός του μήκους διανύσματος
- Πρόσθεση διανυσμάτων
- Βαθμωτός πολλαπλασιασμός διανύσματος
- Εσωτερικό γινόμενο (Scalar or dot product)
- Εξωτερικό γινόμενο (Vector or cross product)

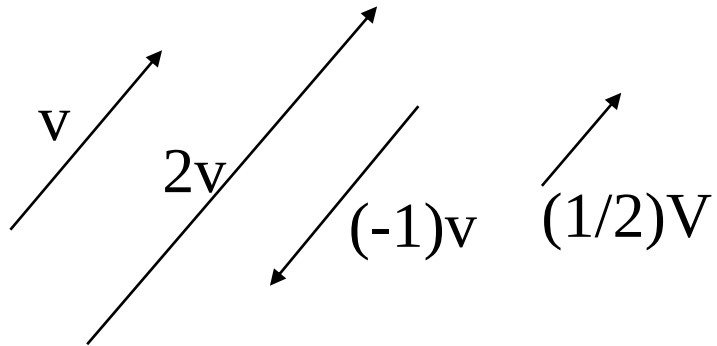
- **Σημεία != Διανύσματα**

- διάνυσμα + διάνυσμα = διάνυσμα
- σημείο + διάνυσμα = σημείο
- *σημείο + σημείο = ;*
- σημείο - σημείο = διάνυσμα (γιατί;)

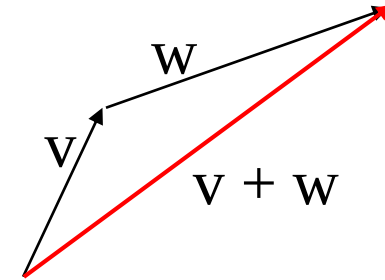


Δεν ορίζεται! Έχει όμως νόημα για τον υπολογισμό του κέντρου μάζας κάποιων σημείων

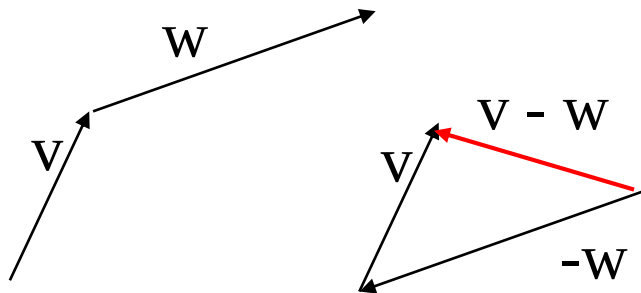
Διανύσματα



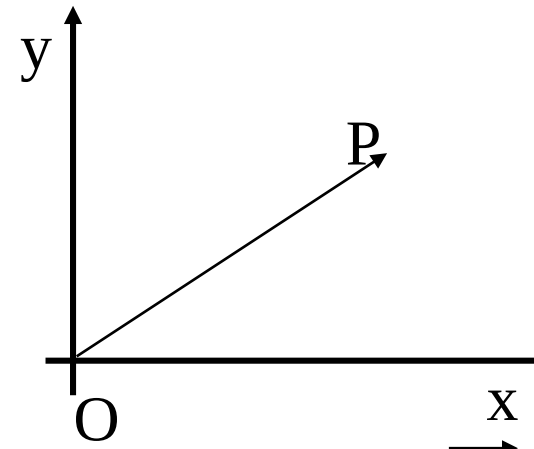
Βαθμωτός πολλαπλασιασμός
διανυσμάτων (διατηρούν την κατεύθυνση)



Πρόσθεση διανυσμάτων: $\mathbf{v} + \mathbf{w}$



Αφαίρεση διανυσμάτων: $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$



Το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$

Διανύσματα: Μήκος ενός διανύσματος

- Το μήκος ενός διανύσματος (modulus) υπολογίζονται εύκολα σε δύο διαστάσεις (Euclidean norm):

$$|V| = \sqrt{\sum_{i=1}^n V_i^2} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

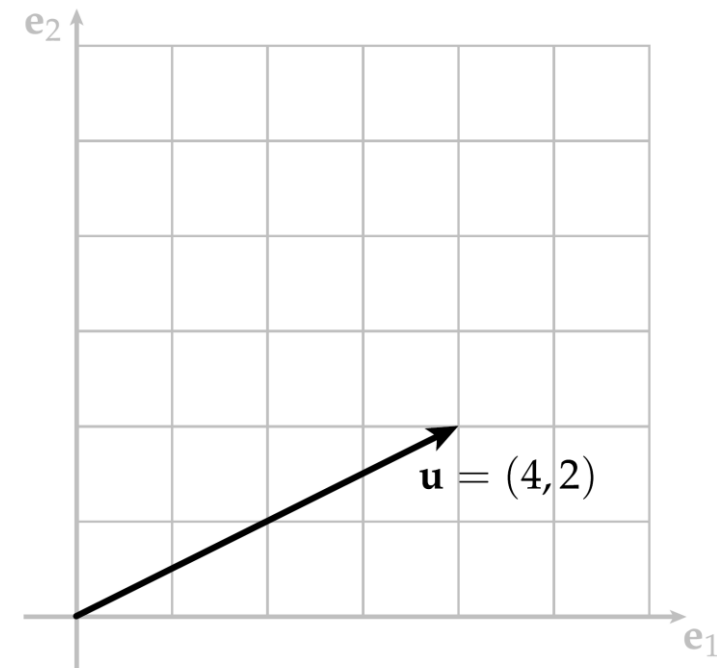
- και σε τρεις διαστάσεις:

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$|V(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



ΠΡΟΕΙΔΟΠΟΙΗΣΗ: αυτή η ποσότητα δεν αντιπροσωπεύει το γεωμετρικό μήκος εκτός αν τα διανύσματα κωδικοποιούνται σε ορθοκανονική βάση.
(Common source of bugs!)



$$\mathbf{u} = (4, 2)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| &= \sqrt{4^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Διανύσματα: Μοναδιαίο διάνυσμα (*unit vector*)

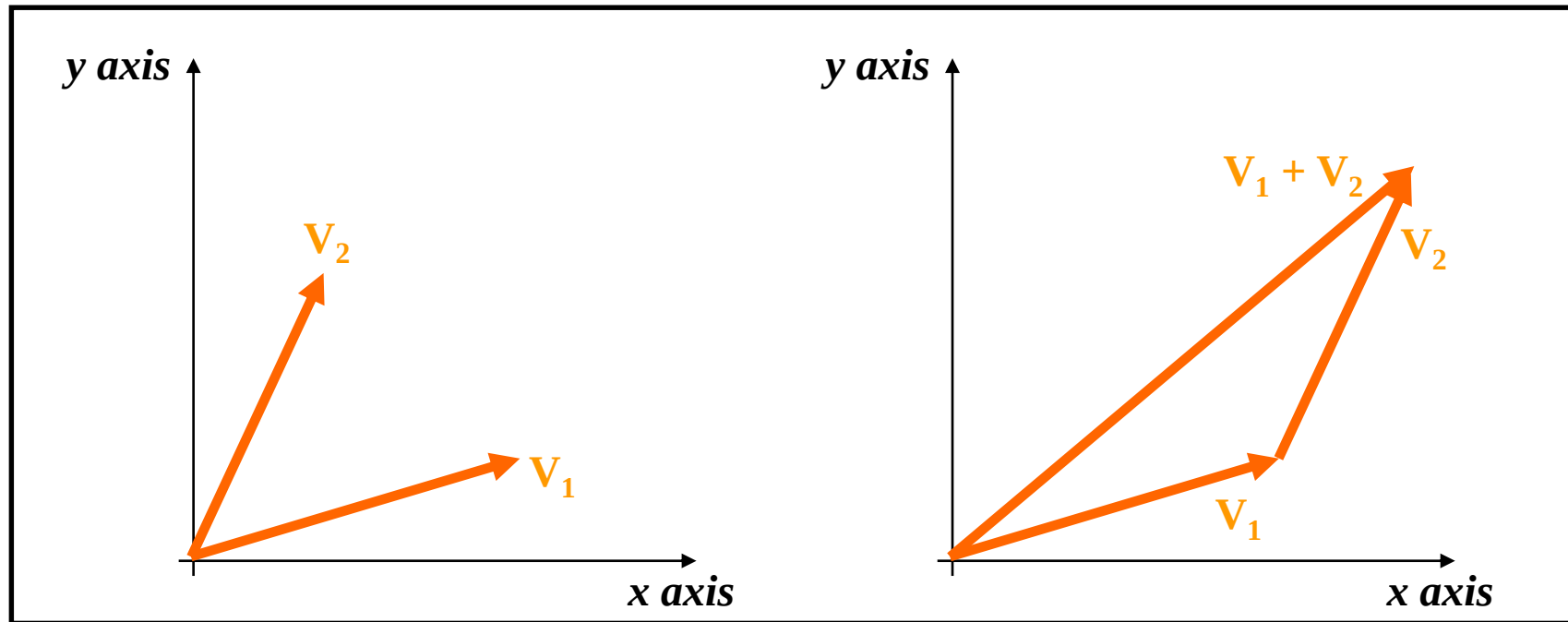
- Μοναδιαίο διάνυσμα
 - Κανονικοποίηση

$$\hat{V} = \frac{\text{vector } V}{\text{modulus } V} = \frac{V}{|V|}$$

Διανύσματα: Πρόσθεση διανυσμάτων

- Το άθροισμα δύο διανυσμάτων υπολογίζεται με απλή προσθήκη των επιμέρους στοιχείων του

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (V_{1x} + V_{2x}, V_{1y} + V_{2y})$$

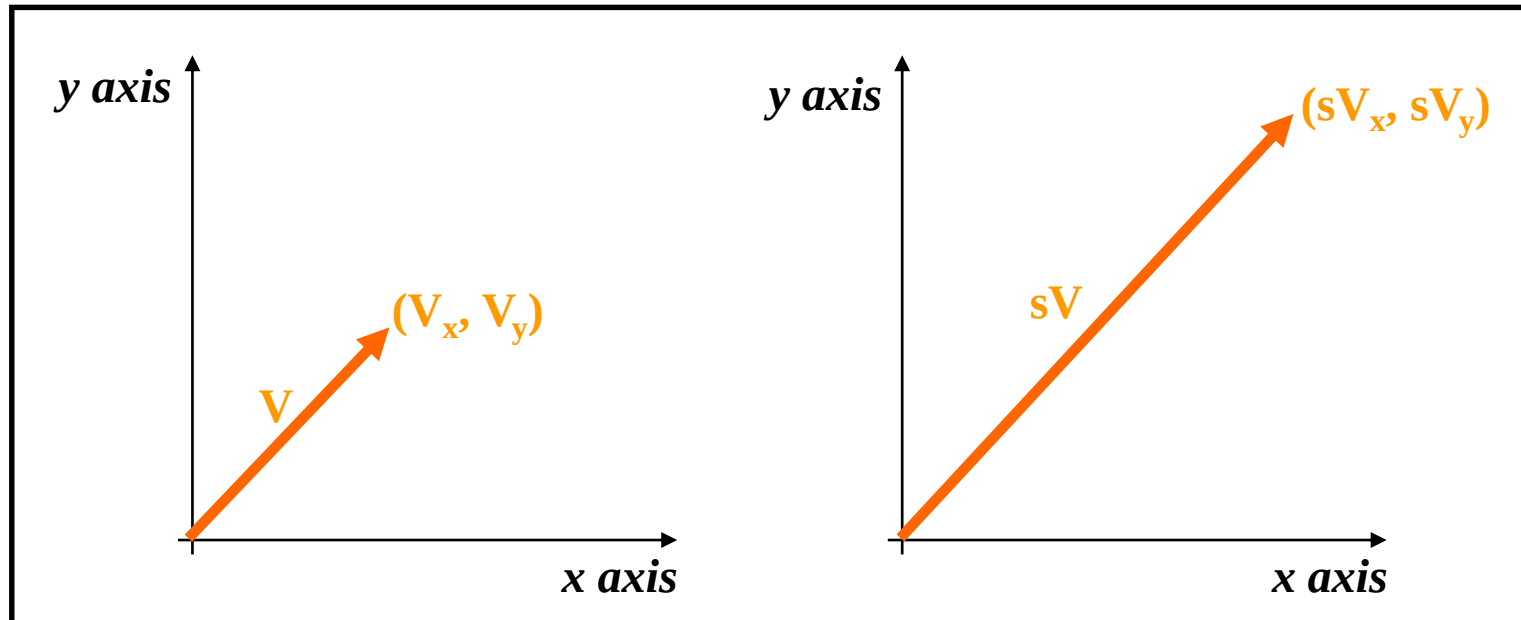


- Ομοίως και στις τρεις διαστάσεις

Διανύσματα: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

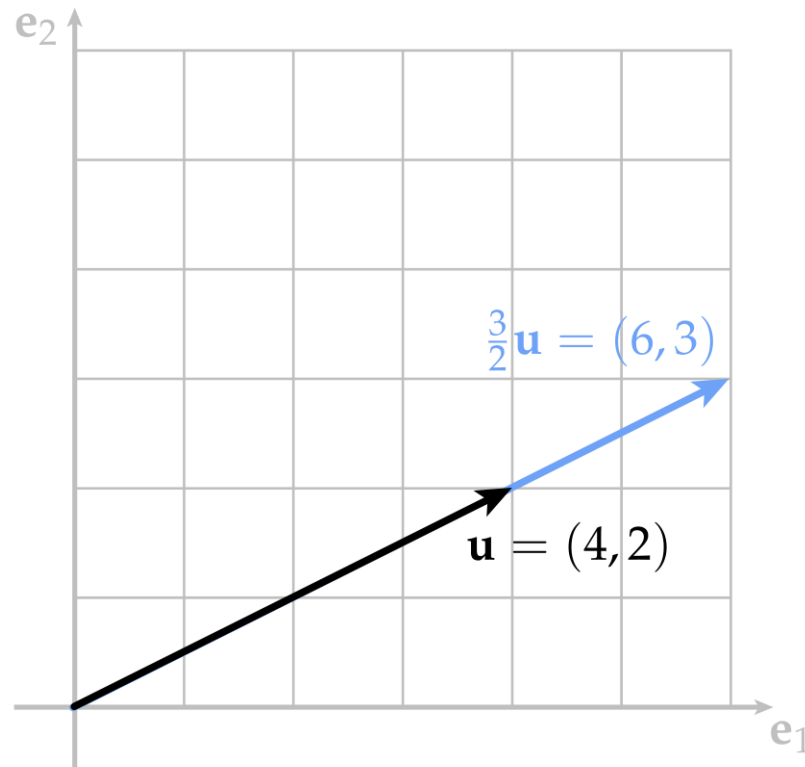
- Ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με μια σταθερά υπολογίζεται με απλό πολλαπλασιασμό των επιμέρους στοιχείων του

$$sV = (sV_x, sV_y)$$



Διανύσματα: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

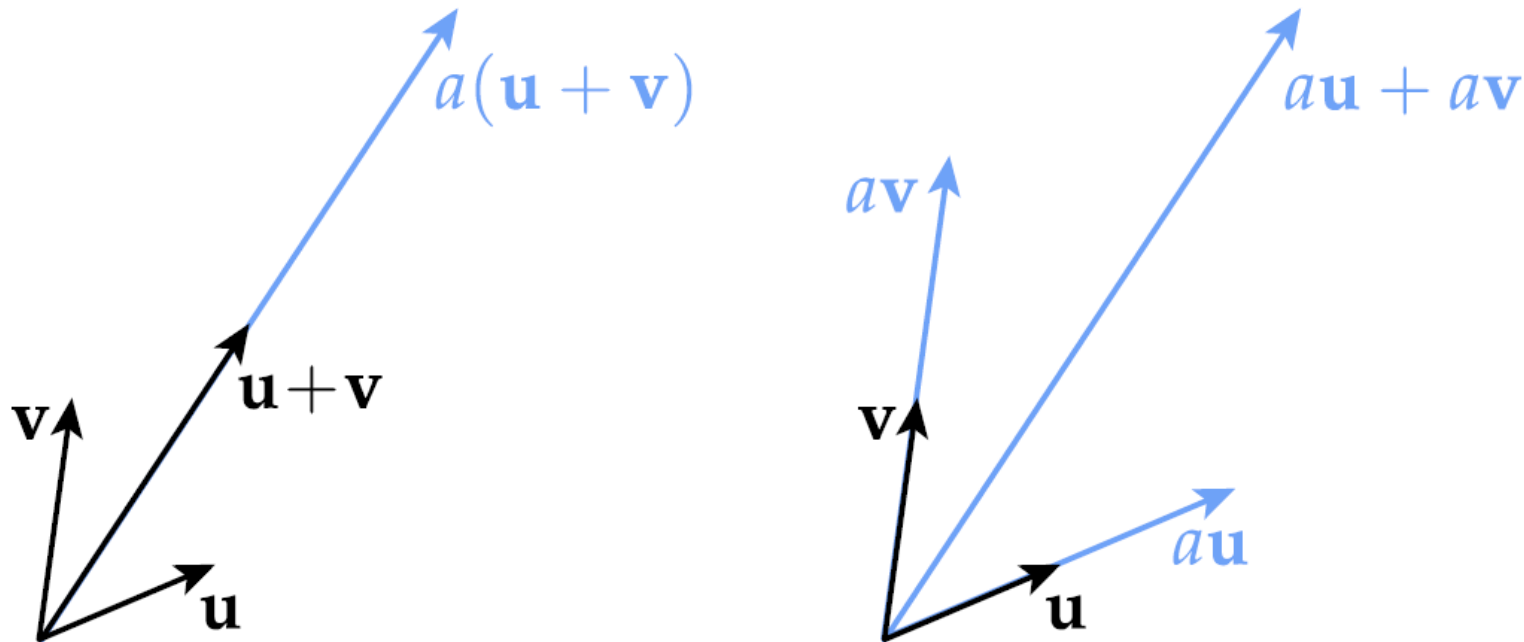
- Παράδειγμα



$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\mathbf{u} \\&= \frac{3}{2}(4, 2) \\&= (4 \cdot 3/2, 2 \cdot 3/2) \\&= (12/2, 6/2) \\&= (6, 3)\end{aligned}$$

Διανύσματα: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός & πρόσθεση

- Τι θα γίνει αν προσπαθήσουμε να προσθέσουμε δύο κλιμακούμενα διανύσματα; Ή να αλλάξουμε την κλίμακα σε δύο διανύσματα που έχουν προστεθεί μαζί;



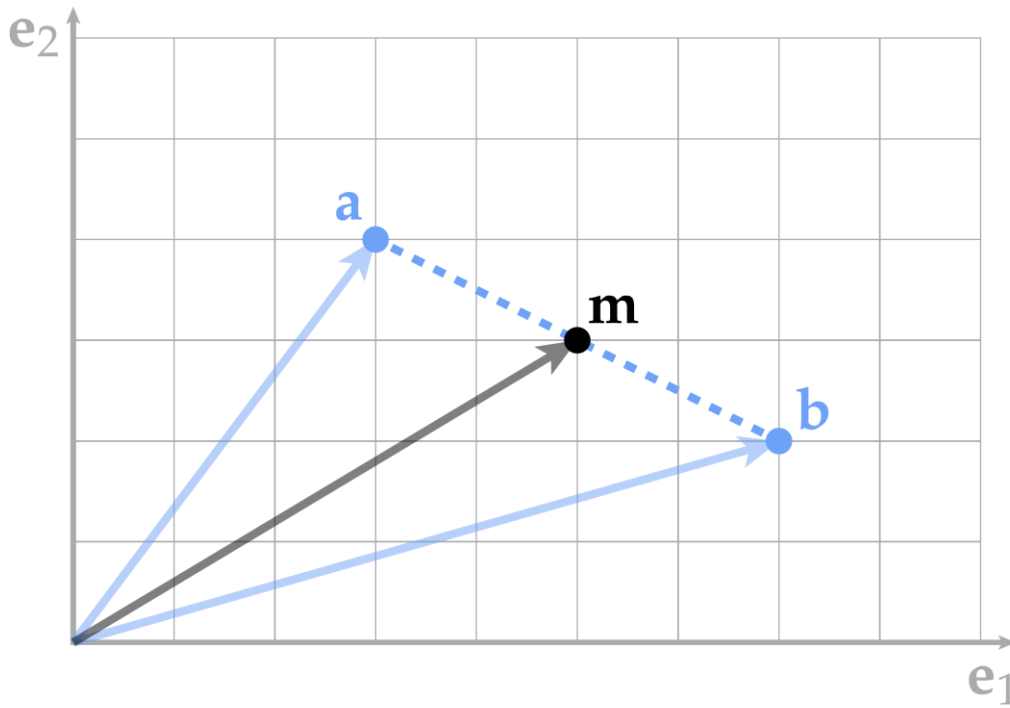
Ενδιαφέρον - φαίνεται ότι έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα όπως και να έχει: $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

Διανύσματα: Ιδιότητες

- Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, και σταθερές a , b
 - $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
 - $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w}$
 - $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
 - $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}$
 - $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
 - $a(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{u}$
 - $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

Διανύσματα: Μέσο σημείο

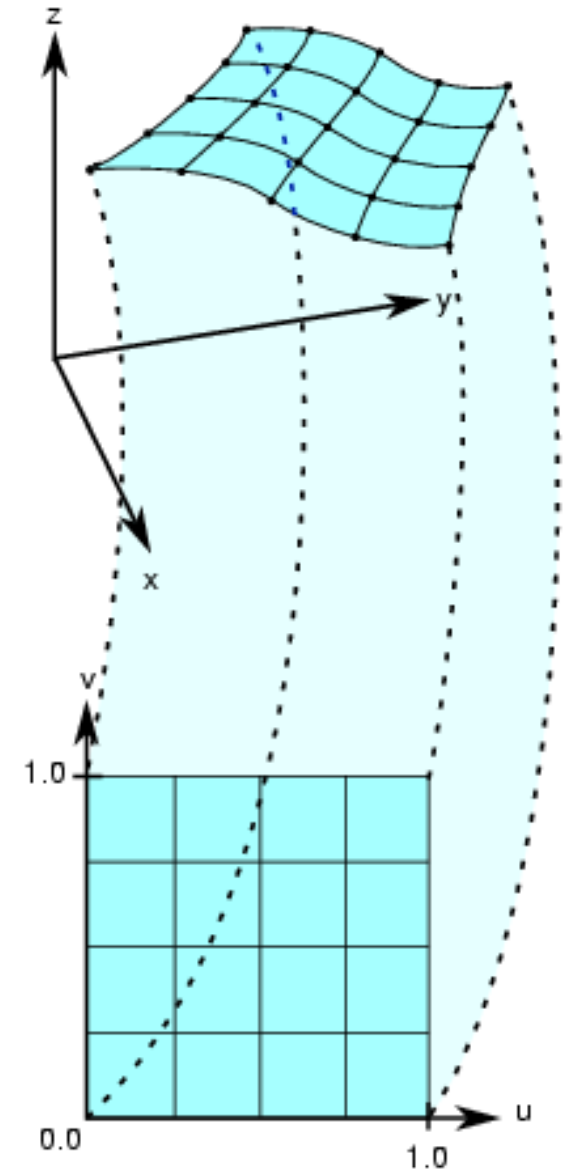
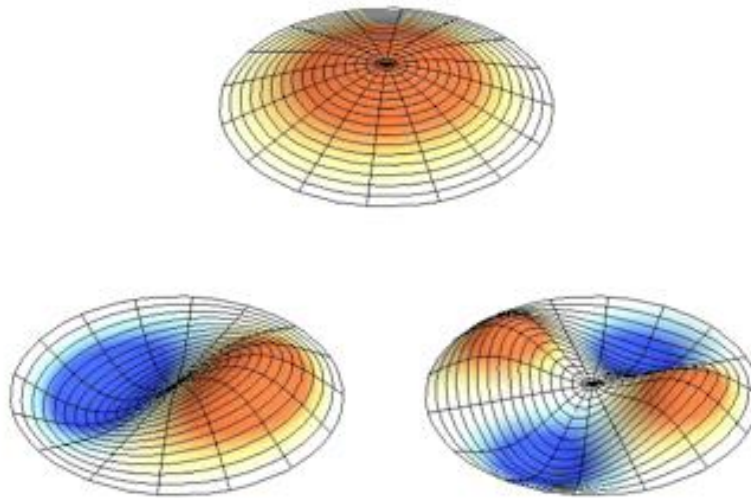
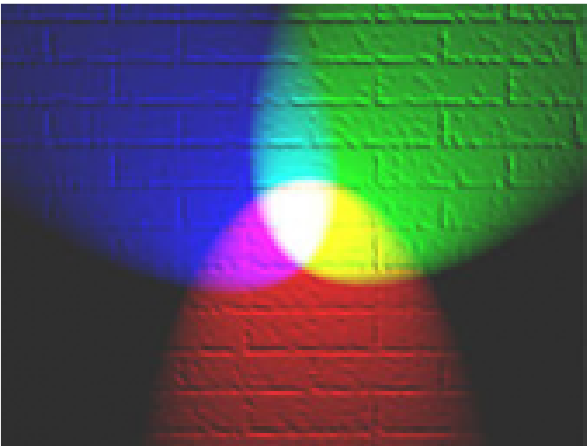
- Ποιο είναι το μέσο σημείο **m** μεταξύ των **a** = (3,4) και **b** = (7,2);



$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{2}((3, 4) + (7, 2)) \\ &= \frac{1}{2}(10, 6) \\ &= (5, 3)\end{aligned}$$

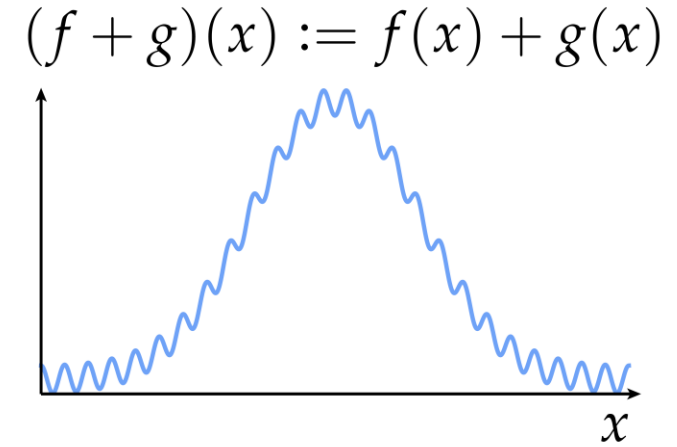
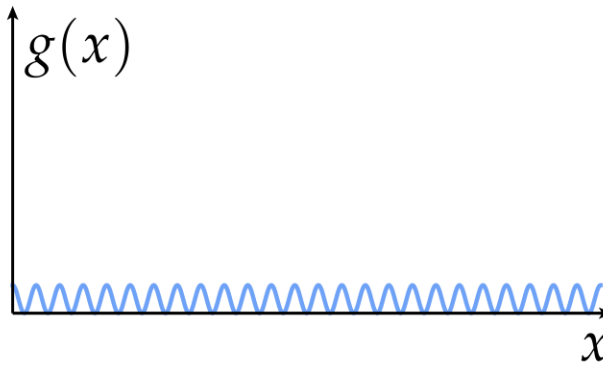
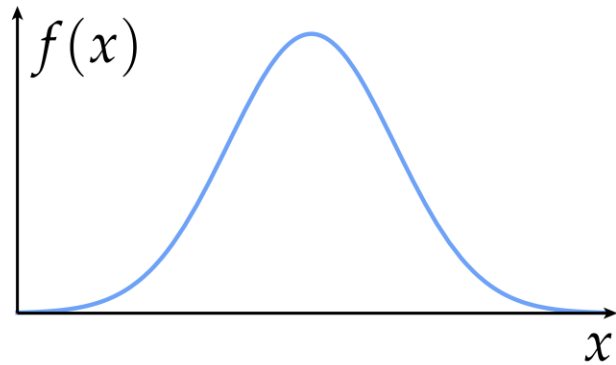
Διανύσματα: Συναρτήσεις

- Ένα άλλο πολύ σημαντικό παράδειγμα χρήσης των διανυσμάτων στα γραφικά υπολογιστών είναι σε συναρτήσεις.
- Γιατί; Επειδή πολλά από τα αντικείμενα που θέλουμε να επεξεργαστούμε στα γραφικά είναι αποτέλεσμα συναρτήσεων! (π.χ., εικόνες, λάμψη από μια φωτεινή πηγή, επιφάνειες, δονήσεις,...)

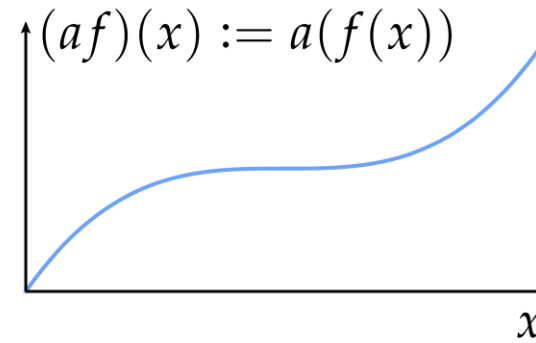
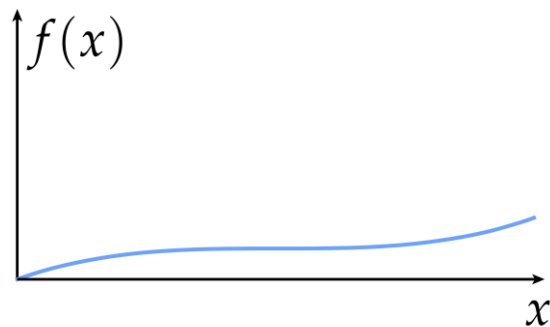


Διανύσματα: Συναρτήσεις

- π.χ. Πρόσθεση δύο συναρτήσεων

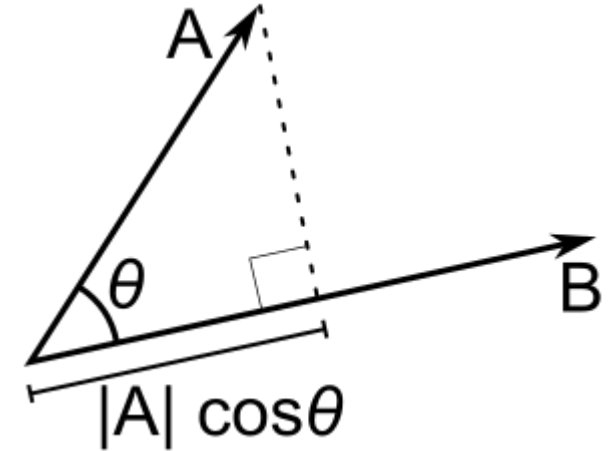


- Βαθμωτός πολλαπλασιασμός σε μια συνάρτηση



Διανύσματα: Εσωτερικό γινόμενο (dot product)

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$
 - $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$
- Τι γίνεται αν τα διανύσματα είναι κανονικοποιημένα;
- Αν το εσωτερικό γινόμενο == 0 ή == 1;
- Το αποτέλεσμα είναι μια απλή τιμή, όχι διάνυσμα!



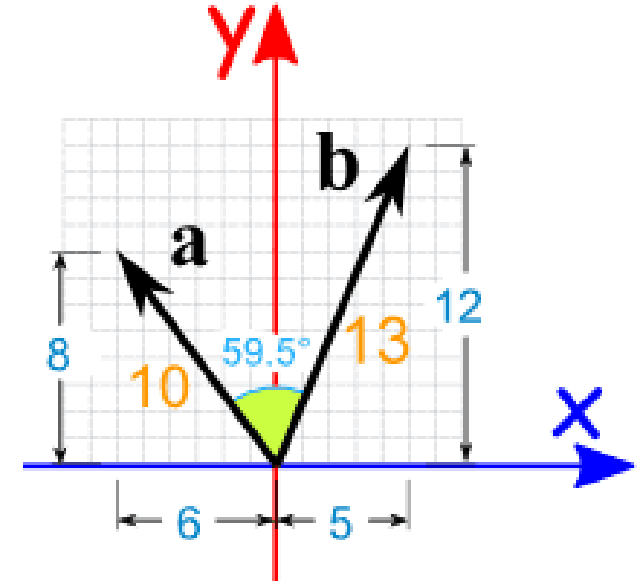
Διανύσματα: Εσωτερικό γινόμενο (dot product)

■ Παράδειγμα (Α μέθοδος)

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos(\theta)$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10 \times 13 \times \cos(59.5^\circ)$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10 \times 13 \times 0.5075\dots$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 66$

■ Παράδειγμα (Β μέθοδος)

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -6 \times 5 + 8 \times 12$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -30 + 96$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 66$

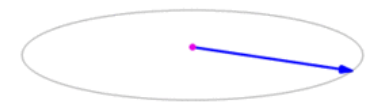
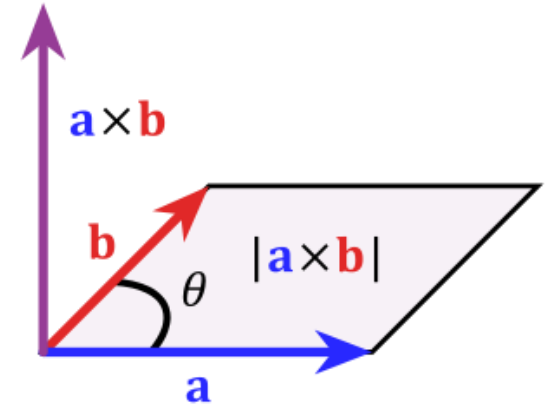


Διανύσματα: Εξωτερικό γινόμενο (cross product)

- Το αποτέλεσμα δεν είναι βαθμωτός αριθμός αλλά **ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των άλλων 2**.
- Βρίσκουμε το διάνυσμα χρησιμοποιώντας την ορίζουσα (determinant)

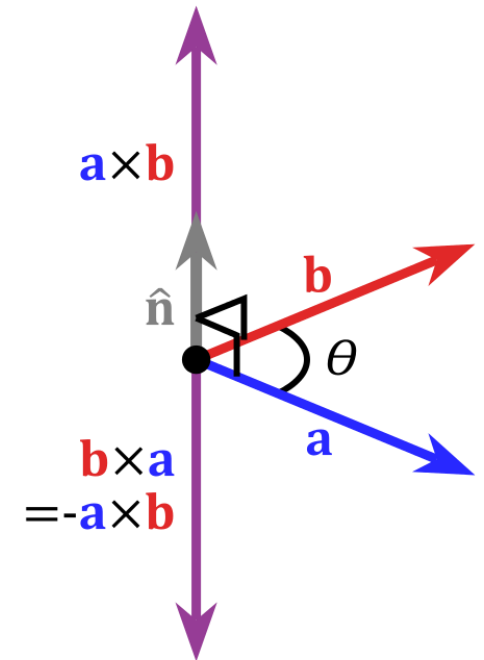
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\theta) \mathbf{n}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k} \end{aligned}$$



Διανύσματα: Εξωτερικό γινόμενο (cross product)

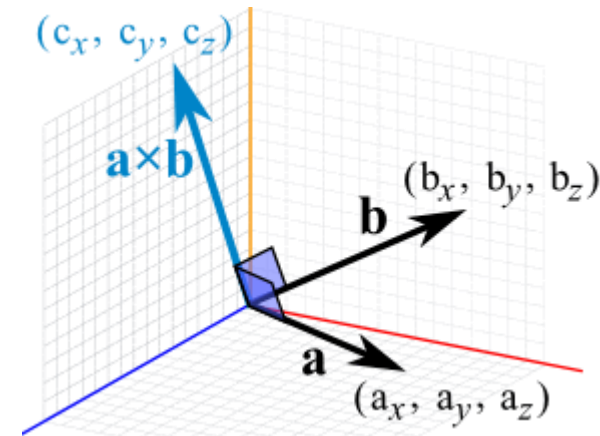
- Το μέγεθος του διανύσμαντος είναι ίσο με την περιοχή του παραλληλόγραμμου
 - $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin\theta$
- Και η κατεύθυνση του είναι κάθετη στα 2 διανύσματα
 - ... ναι, αλλά προς ποια κατεύθυνση;
 - χρησιμοποιείτε τον κανόνα του δεξιού χεριού
- Το εξωτερικό γινόμενο διανύσματος με τον εαυτό του (ή παράλληλα διανύσματα, π.χ. η γωνία θ μεταξύ τους είναι 0° ή 180°) είναι το μηδενικό διάνυσμα.



Διανύσματα: Εξωτερικό γινόμενο (cross product)

Παράδειγμα 1

- Το εξωτερικό γινόμενο του $\mathbf{a} = (2,3,4)$ και $\mathbf{b} = (5,6,7)$
 - $c_x = a_y b_z - a_z b_y = 3 \times 7 - 4 \times 6 = -3$
 - $c_y = a_z b_x - a_x b_z = 4 \times 5 - 2 \times 7 = 6$
 - $c_z = a_x b_y - a_y b_x = 2 \times 6 - 3 \times 5 = -3$
- Οπότε: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-3, 6, -3)$



Διανύσματα: Εξωτερικό γινόμενο (cross product)

Παράδειγμα 2

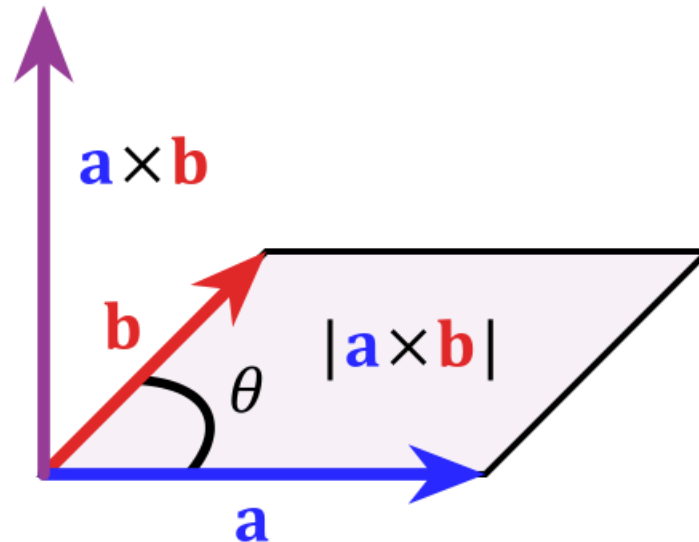
- Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\mathbf{a} = (3, -3, 1)$ και $\mathbf{b} = (4, 9, 2)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -3 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(-3 \cdot 2 - 1 \cdot 9) - \mathbf{j}(3 \cdot 2 - 1 \cdot 4) + \mathbf{k}(3 \cdot 9 + 3 \cdot 4) \\ &= -15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 39\mathbf{k}\end{aligned}$$

Διανύσματα: Εξωτερικό γινόμενο (cross product)

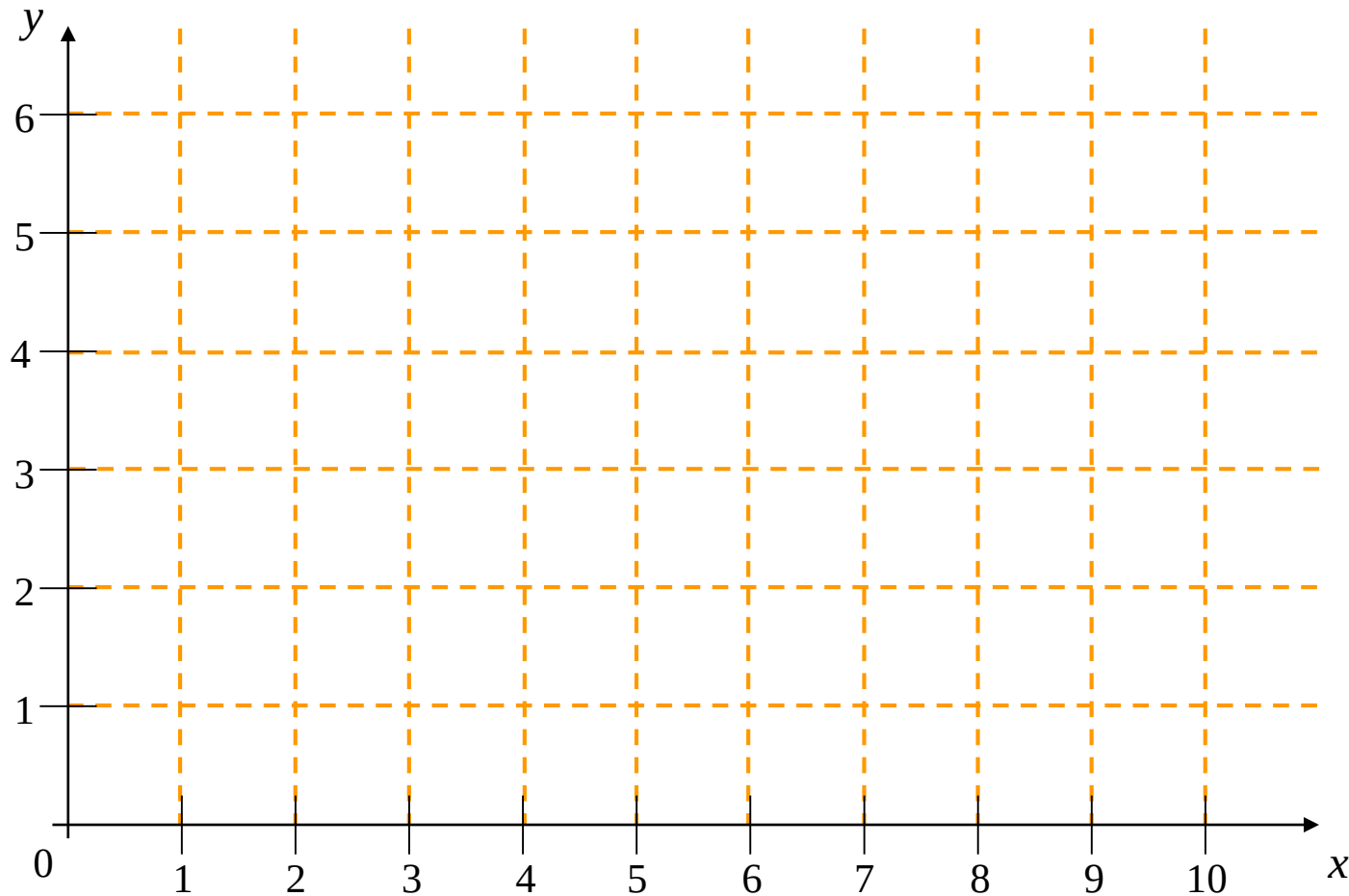
Παράδειγμα 3

- Υπολογίστε την περιοχή (εμβαδό) του παραλληλόγραμμου που δημιουργείτε από τα διανύσματα $\mathbf{a}=(3,-3,1)$ και $\mathbf{b}=(4,9,2)$.
- Το εμβαδό ισούται με $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{15^2 + 2^2 + 39^2} = 5\sqrt{70}$.



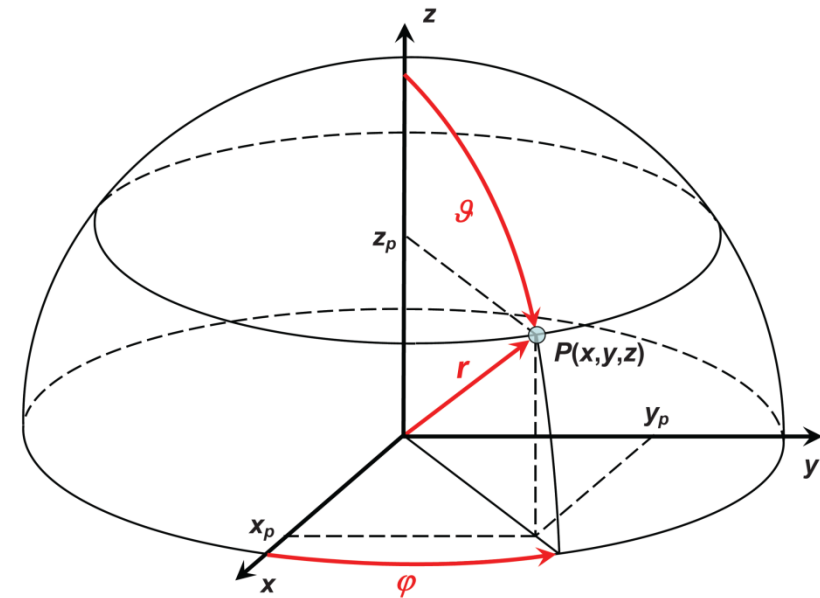
Άσκηση 1

- Σχεδιάστε τη ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 2$ από το σημείο $x = 1$ στο $x = 9$



Σφαιρικές Συντεταγμένες (Polar Co-ordinates)

- Ένα διάνυσμα $V(x, y, z)$ μπορεί να εκφραστεί σε σφαιρικές συντεταγμένες με 3 τιμές: το μήκος και δύο γωνίες ϑ , φ .
- Από καρτεσιανές σε σφαιρικές:
 - $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ($\sqrt{}$ είναι η τετραγωνική ρίζα)
 - $\vartheta = \arccos(z/r)$
 - $\varphi = \text{atan}(y/x)$
- Από σφαιρικές σε καρτεσιανές :
 - $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$
 - $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$
 - $z = r \cos\vartheta$

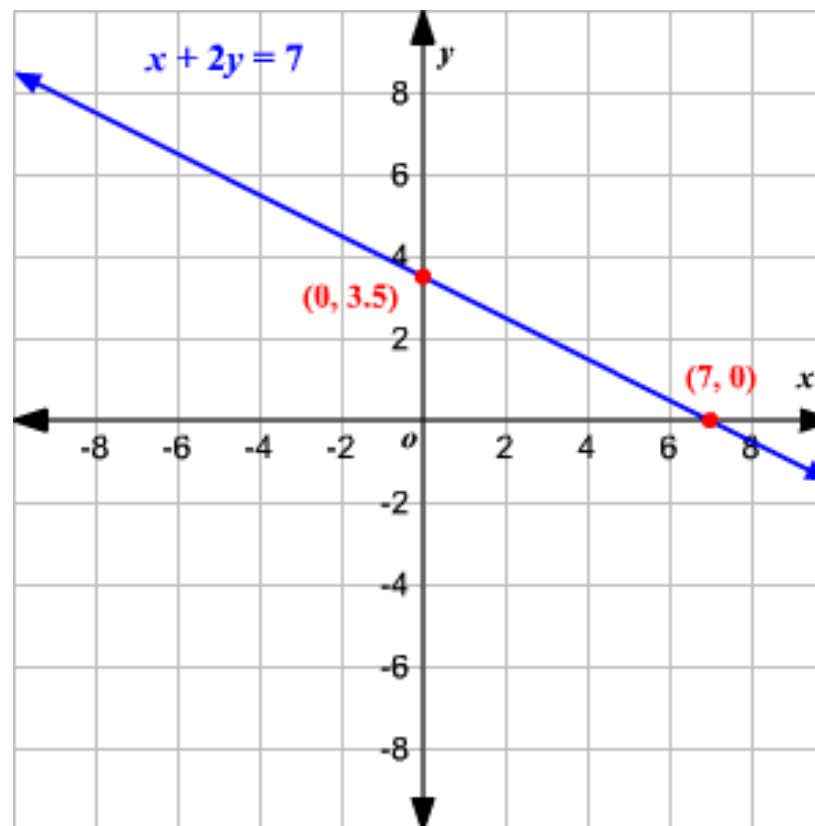


Παραμετρική εξίσωση ευθείας – ακτίνας

- Έστω ότι έχουμε δύο σημεία $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ and $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, μπορούμε να εκφράσουμε την ευθεία που τα ενώνει ως εξής:

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = \begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

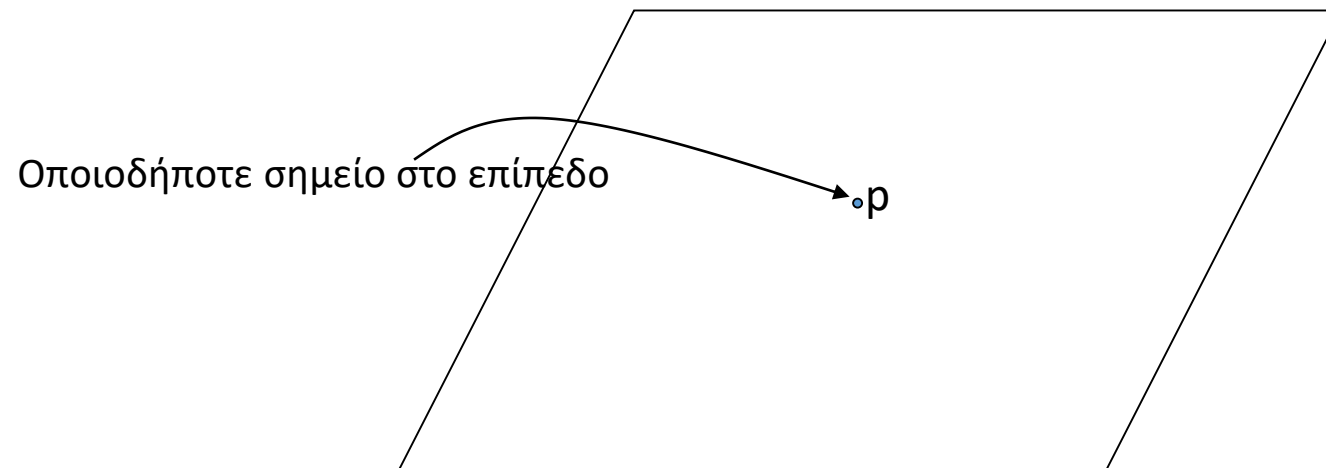
όπου $-\infty < t < \infty$



Εξίσωση του επιπέδου (equation of a plane)

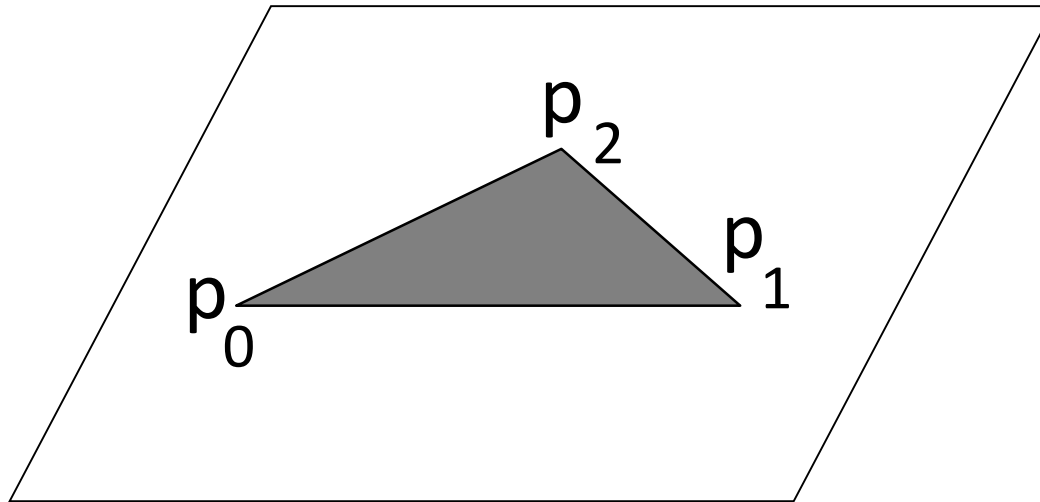
- Έστω a, b, c και d είναι σταθερές που ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο στο χώρο.
- Τα a, b και c μας δίνουν την κάθετο στο επίπεδο.
- Κάποιο σημείο $p(x, y, z)$ βρίσκεται στο επίπεδο αν και μόνο αν ικανοποιεί την εξίσωση.

$$ax + by + cz + d = 0$$



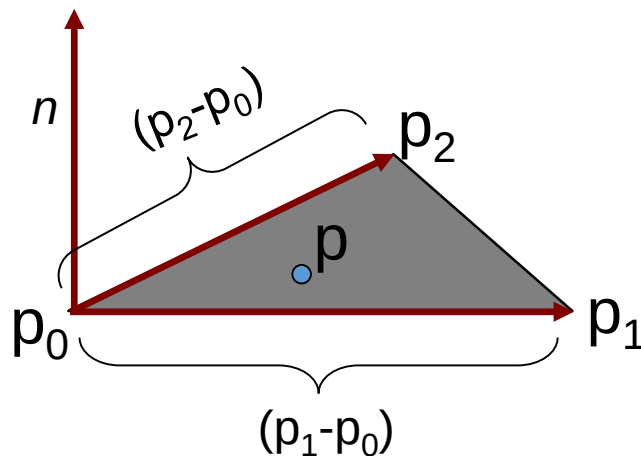
Εξίσωση επιπέδου

- Αν έχουμε 3 σημεία μπορούμε να υπολογίσουμε την εξίσωση του επιπέδου:
 - Δημιουργούμε 2 διανύσματα και βρίσκουμε το εξωτερικό γινόμενο, αυτό μας δίνει το (a, b, c)
 - Αντικαθιστούμε οποιοδήποτε από τα 3 σημεία στην εξίσωση $ax + by + cz + d = 0$ και μας δίνει το d .



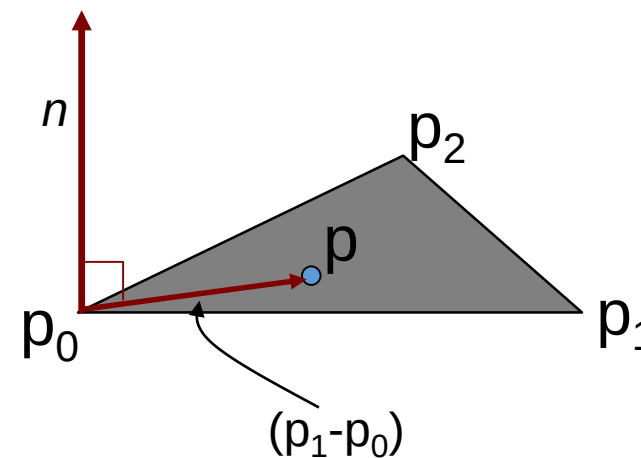
Πως βρίσκουμε τα a,b,c & d

- Το εξωτερικό γινόμενο ορίζει την κάθετο στο επίπεδο με $n = (a, b, c)$



$$n = (p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0)$$

- Έχουμε 2 κάθετους (αντίστροφες κατευθύνσεις)
- Τα διανύσματα στο επίπεδο είναι κάθετα προς την κάθετο
- Από $ax + by + cz + d = 0$
 - $\Rightarrow d = -(ax + by + cz)$ αν αντικαταστήσουμε το p_0
 - $\Rightarrow d = n \cdot p_0 = -(n_1 \cdot x_0 + n_2 \cdot y_0 + n_3 \cdot z_0)$



Πως βρίσκουμε τα a, b, c & d

Παράδειγμα:

- Έστω τα σημεία $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 2, 0)$, και $R = (-1, 2, 1)$. Αναζητούμε τις σταθερές της εξίσωσης $ax + by + cz = d$, όπου τα P , Q και R ικανοποιούν την εξίσωση:

$$a + b + c = d$$

$$a + 2b + 0c = d$$

$$-a + 2b + c = d$$

Αφαιρώντας την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη και στη συνέχεια προσθέτοντας την πρώτη εξίσωση στη τρίτη, εξαλείφουμε το a .

$$b - c = 0$$

$$4b + c = 2d$$

- Προσθέτοντας τις εξισώσεις έχουμε $5b = 2d$, ή $b = (2/5)d$, οπότε λύνοντας ως προς το $c = b = (2/5)d$, και $a = d - b - c = (1/5)d$.
- Οπότε η εξίσωση είναι $x + 2y + 2z = 5$

Half-Space

- Ένα επίπεδο μοιράζει το χώρο σε 2 half-spaces
- Ας ορίσουμε:

$$l(x, y, z) = ax + by + cz + d$$

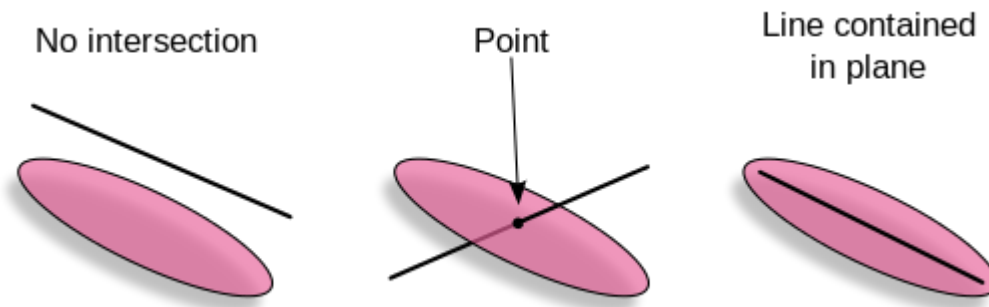
- Αν $l(p) = 0$
 - Το σημείο p είναι στο επίπεδο
- Αν $l(p) > 0$
 - Το σημείο p είναι στο θετικό half-space
- Αν $l(p) < 0$
 - Το σημείο p είναι στον αρνητικό half-space

Τομή ευθείας-επιπέδου

- Ευθεία:

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = \begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

- Επίπεδο: $ax + by + cz + d = 0$
- Αντικαθιστούμε τα x, y, z στην εξίσωση του επιπέδου και λύνουμε ως προς το t



Τομή ευθείας-επιπέδου

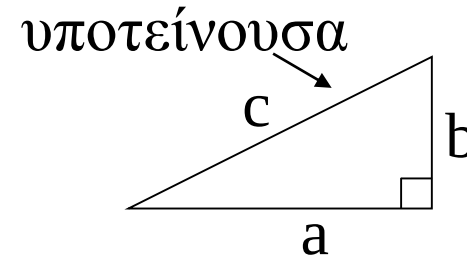
Παράδειγμα:

- Έστω το επίπεδο: $2x + y - 4z = 4$
- Έστω η ευθεία
$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2 + 3t \\ z(t) = t \end{cases}$$
- Αντικαθιστούμε τα $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ στην εξίσωση του επιπέδου και λύνουμε ως προς το t
 - $2t + (2+3t) - 4t = 4 \rightarrow t=2$
 - Οπότε για $t=2$, το σημείο τομής είναι το $(2,8,2)$

Κύκλος (2Δ)

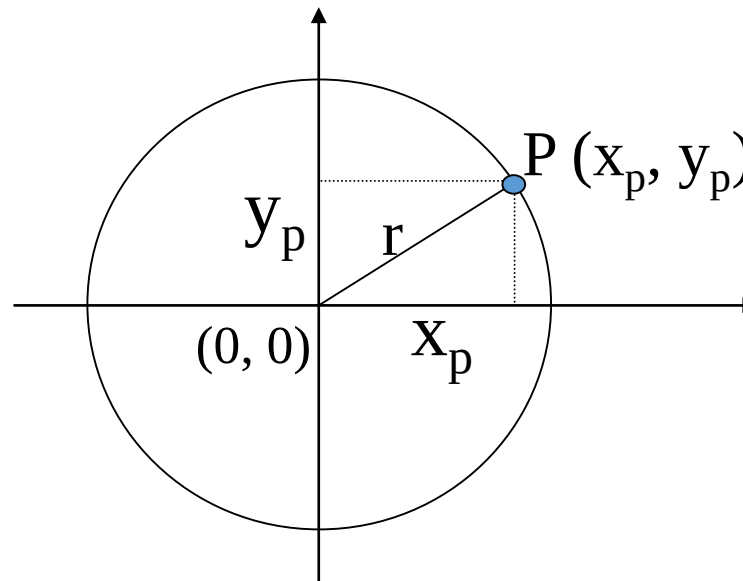
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



- Αν έχουμε ένα κύκλο στην αρχή των αξόνων, με ακτίνα r , τότε για κάθε σημείο P σε αυτόν, έχουμε:

$$x_p^2 + y_p^2 = r^2$$



Κύκλος (2Δ)

- Αν ο κύκλος δεν είναι ορισμένος στην αρχή του συστήματος $(0, 0)$, τότε πάλι έχουμε:

αλλά

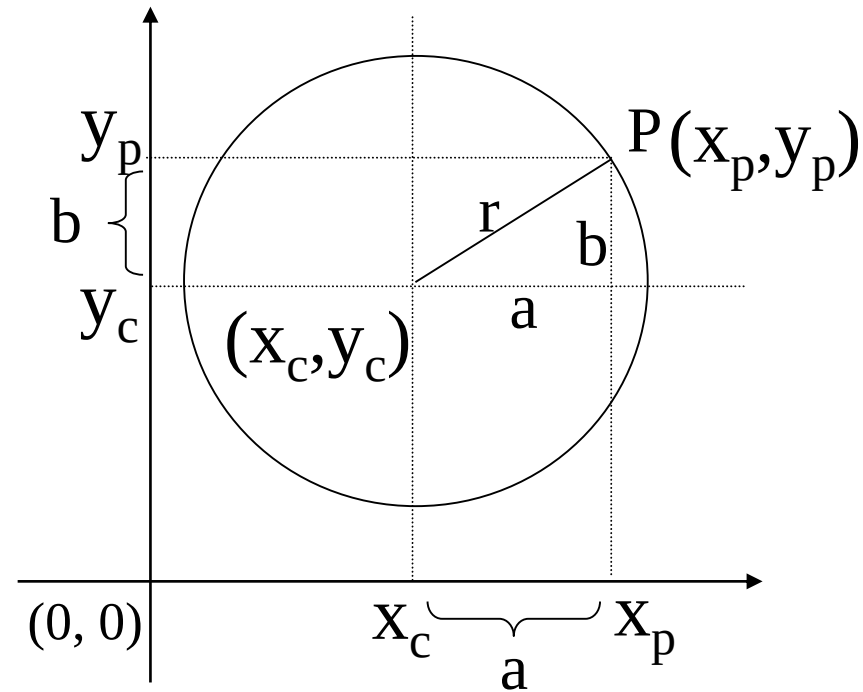
$$a^2 + b^2 = r^2$$

Έτσι η γενική μορφή γίνεται:

$$a = x_p - x_c$$

$$b = y_p - y_c$$

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$



Σφαίρα (3Δ)

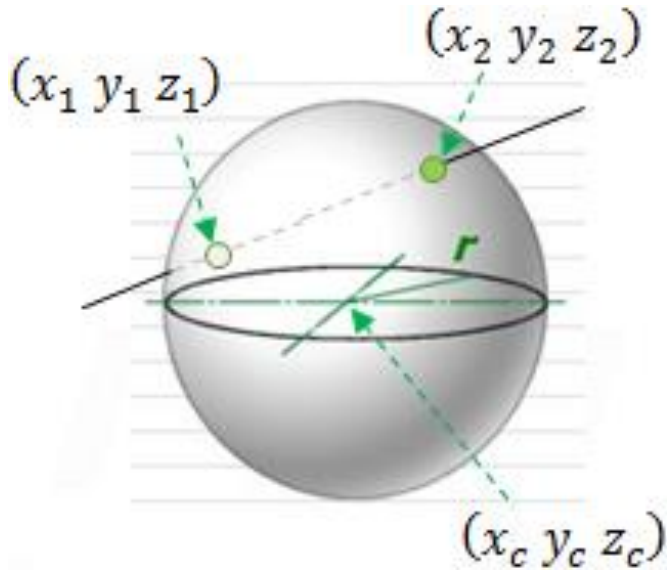
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα γενικοποιείται στις 3Δ δίδοντας $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. με βάση αυτό μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η εξίσωση της σφαίρας είναι:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

- Και στο $(0,0,0)$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Τομή σφαίρας με ευθεία



$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = r^2 \text{ σφαίρα}$$

$$\text{ευθεία} \quad \begin{cases} x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές x , y και z στην εξίσωση της σφαίρας, θα έχουμε μια εξίσωση της μορφής: $at^2 + bt + c = 0$

$$t = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Συνθήκη για τομή:

$$b^2 - 4ac > 0$$

Συνθήκη όταν εφάπτεται:

$$b^2 - 4ac = 0$$

Δεν υπάρχει τομή όταν:

$$b^2 - 4ac < 0$$

ΜΕΡΟΣ Β - Πίνακες

Διανύσματα και Πίνακες

- Πίνακας είναι ένα σύνολο τιμών διαρρυθμισμένο σε M σειρές με N στήλες

$$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 13 \\ 10 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \quad \begin{bmatrix} 4.3 \\ 6.7 \\ 1.2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 16 & 23 & 42 \end{bmatrix}$$

- Παράδειγμα

- Πίνακας 3 επί 6 (3×6)
- Το στοιχείο (element) 2,3 είναι το 7
- Θα δούμε μόνο 2-διάστατους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 7 & 4 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ένα διάνυσμα μπορεί να θεωρηθεί σαν $1 \times M$ πίνακας $v = (x \ y \ z)$

Είδη Πινάκων

- Ταυτοτικός (Identity)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Διαγώνιος (Diagonal)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- Συμμετρικός (Symmetric)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

- Οι διαγώνιοι πίνακες είναι (βέβαια) συμμετρικοί
- Οι ταυτοτικοί πίνακες είναι (βέβαια) διαγώνιοι

Πράξεις σε πίνακες: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

- Για να πολλαπλασιάσετε τα στοιχεία ενός πίνακα με μια σταθερά απλά πολλαπλασιάστε το κάθε στοιχείο του

$$s * \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s*a & s*b & s*c \\ s*d & s*e & s*f \\ s*g & s*h & s*i \end{bmatrix}$$

- Παράδειγμα:

$$3 * \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \\ 42 & 48 & 54 \end{bmatrix}$$

Πράξεις σε πίνακες: Πρόσθεση

- Για να προσθέσετε δύο πίνακες απλά προσθέστε τα επιμέρους στοιχεία τους

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+r & b+s & c+t \\ d+u & e+v & f+w \\ g+x & h+y & i+z \end{bmatrix}$$

- Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \\ 15 & 17 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 17 & 21 & 25 \\ 29 & 33 & 37 \end{bmatrix}$$

Both matrices must be the same size

Πράξεις σε πίνακες: Πολλαπλασιασμός πινάκων

- Αν έχουμε δυο πίνακες με διαστάσεις $N_1 \times M_1$ και $N_2 \times M_2$ τότε ο πολλαπλασιασμός μπορεί να γίνει αν και μόνο αν $M_1 = N_2$
- πίνακας αποτελέσματος είναι $N_1 \times M_2$
- π.χ. Πίνακας A είναι 2×3 και πίνακας B 3×4
 - πίνακας αποτελέσματος είναι 2×4
- **Επειδή το $A \times B$ είναι δυνατόν δεν σημαίνει ότι το $B \times A$ είναι δυνατόν!**
 - **Προσοχή!** Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι μεταβατικός, έτσι:

$$AB \neq BA$$

Πράξεις σε πίνακες: Πολλαπλασιασμός πινάκων

Έστω ότι

- A είναι $n \times k$
- B είναι $k \times m$

Τότε

- $C = A \times B$ ορίζεται από

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il}b_{lj}$$

Προσοχή

- $B \times A$ όχι απαραίτητα ίσο με $A \times B$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & * \\ \cdot & * \\ \cdot & * \\ \cdot & * \\ \cdot & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & * \\ \cdot & * \\ \cdot & * \\ \cdot & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & * \\ \cdot & * \\ \cdot & * \\ \cdot & * \\ \cdot & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & * \\ \cdot & * \\ \cdot & * \end{pmatrix}$$

Πράξεις σε πίνακες: Πολλαπλασιασμός πινάκων

- Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 7 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0*1+(-1)*3 & 0*2+(-1)*4 \\ 5*1+7*3 & 5*2+7*4 \\ -2*1+8*3 & -2*2+8*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 26 & 38 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*4 + 2*5 + 3*6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*1 & 4*2 & 4*3 \\ 5*1 & 5*2 & 5*3 \\ 6*1 & 6*2 & 6*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

Πράξεις σε πίνακες: Ανάστροφος πίνακας (*Transpose*)

- Ο ανάστροφος πίνακας $\mathbf{M}$, γράφεται σαν $\mathbf{M}^T$ και επιτυγχάνεται απλώς αλλάζοντας τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα
- Για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Πράξεις σε πίνακες: Αντίστροφος πίνακας (*Inverse*)

- Αν $A \times B = I$ και $B \times A = I$ τότε
 $A = B^{-1}$ και $B = A^{-1}$
- $A A^{-1} = A^{-1} A = I$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{cofactor matrix of } A)^T$

Πράξεις σε πίνακες: Αντίστροφος πίνακας (Inverse)

- Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 5 & A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -12 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{cofactor of } A = \begin{bmatrix} 24 & 5 & -4 \\ -12 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{cofactor of } A)^T = \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Πράξεις σε πίνακες: Αντίστροφος πίνακας (Inverse)

- Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- $\det(A) = 1 \times 4 \times 6 + 2 \times 5 \times 1 + 3 \times 0 \times 0 - 3 \times 4 \times 1 - 5 \times 0 \times 1 - 6 \times 2 \times 0 = 24 + 10 - 12 = 22$

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24/22 & -12/22 & -2/22 \\ 5/22 & 3/22 & -5/22 \\ -4/22 & 2/22 & 4/22 \end{bmatrix}$$

Πράξεις σε πίνακες: Ασκήσεις

- Εκτελέστε τις ακόλουθες προσθέσεις σε πίνακα:

$$\begin{bmatrix} -11 & -19 & -15 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -14 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ & _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 20 & -11 & 0 \\ -14 & 5 & -3 & 6 \\ 15 & 2 & 9 & -18 \\ -19 & 4 & -15 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 10 & -12 & -11 \\ 10 & -15 & 15 & 5 \\ -1 & 14 & -9 & 0 \\ 3 & -3 & -16 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ & _ & _ \\ _ & _ & _ & _ \\ _ & _ & _ & _ \\ _ & _ & _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 & -3 & -4 \\ 19 & 9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -15 & -7 \\ -14 & 5 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{bmatrix}$$

Πράξεις σε πίνακες: Ασκήσεις

- Εκτελέστε τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς σε πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 8 & 15 & 19 & 4 \\ 7 & -4 & 12 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -15 & 19 \\ -12 & -19 \\ 0 & -13 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 & 10 & -12 & -11 \\ 10 & -15 & 15 & 5 \\ -1 & 14 & -9 & 0 \\ 3 & -3 & -16 & -5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

Πράξεις σε πίνακες: Ασκήσεις

- Εκτελέστε τους ακόλουθους βαθμωτούς πολλαπλασιασμούς σε πίνακα:

$$6 * \begin{bmatrix} 15 & 19 \\ 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \\ _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

- Υπολογίστε τον ανάστροφο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 6 & 4 \\ 23 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{bmatrix}$$