ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΛ231: Δομές Δεδομένων και Αλγόριθμοι

Εαρινό Εξάμηνο 2013

Φροντιστήριο 5 - ΛΥΣΕΙΣ

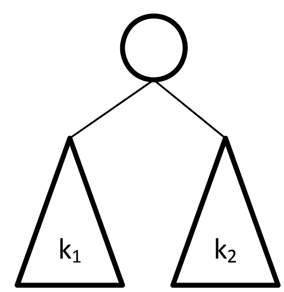
Άσκηση 1

Να αποδείξετε την πρόταση: "Ένα δυαδικό δένδρο ονομάζεται αυστηρά δυαδικό αν κάθε κόμβος του έχει είτε 0 είτε 2 παιδιά. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της επαγωγής ότι κάθε αυστηρά δυαδικό δένδρο με n φύλλα, n ≥ 1, έχει συνολικά 2n - 2 ακμές και 2n - 1 κόμβους".

- Βάση της επαγωγής: n=1 (μόνο μία ρίζα)
  Έχουμε 2n-2=0 ακμές και 2n-1=1 κόμβους και η Π(1) έπεται.

- Υπόθεση της επαγωγής
  Η Π(n) ισχύει για n=k, δηλαδή το δέντρο έχει συνολικά 2k - 2 ακμές και 2k - 1 κόμβους.

- Βήμα της επαγωγής
  Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για n=k+1. Δηλαδή, ότι το δέντρο έχει 2(k+1)-2 ακμές και 2(k+1)-1 κόμβους.
  Έστω ένα αυστηρά δυαδικό δένδρο με k+1 φύλλα. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, το δένδρο αυτό αποτελείται από μια ρίζα και δύο μη κενά υπόδενδρα που ριζώνουν σ'αυτή. Έστω ότι το αριστερό υπόδενδρο έχει k_1 φύλλα και το δεξί k_2 φύλλα.
  Τότε ισχύει ότι $k_1+k_2 = k+1$ και $k_1,k_2<k+1$.



  Ακμές
  Ο αριθμός των ακμών δίνεται από τον αριθμό των ακμών στο αριστερό υποδέντρο (Α($κ_1$)) και αριθμό των ακμών στο δεξί υποδέντρο (Α($κ_1$)) + 2 από την ρίζα.

  Σύνολο = $A(k_1) + A(k_2) + 2$
  $= 2k_1 – 2 + 2k_2 - 2 + 2$ από την Επαγωγική Υπόθεση αφού $k_1,k_2<k+1$
  $= 2(k1+k2) – 2$
  $= 2(k+1) – 2$.

  Κόμβοι
  Ο αριθμός των κόμβων δίνεται από τον αριθμό των κόμβων στο αριστερό υποδέντρο (Κ($κ_1$)) και αριθμό των κόμβων στο δεξί υποδέντρο (Κ($κ_1$)) + 1 που είναι η ρίζα.

  Σύνολο = $K(k_1) + K(k_2) + 1$
  $= 2k_1 – 1 + 2k_2 - 1 + 1$ από την Επαγωγική Υπόθεση αφού $k_1,k_2<k+1$
  $= 2(k1+k2) – 1$
  $= 2(k+1) – 1$.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε την πρόταση: “Κάθε τέλειο δυαδικό δένδρο ύψους h έχει $2^{h+1} - 1$ κόμβους από τους οποίους οι 2^h είναι φύλλα και οι $2^h - 1$ είναι εσωτερικοί”.

- <u>Βάση της επαγωγής: h=0 (μόνο η ρίζα)</u>

  Κόμβοι: $2^{h+1} - 1=2\text{-}1=1$.

  Φύλλα: $2^h = 2^0 = 1$.

  Εσωτερικοί: $2^h\text{-}1=2^0\text{-}1=1\text{-}1=0$.

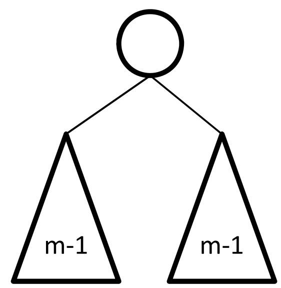
- <u>Υπόθεση της επαγωγής</u>

  Η Π(n) ισχύει για κάθε ύψος k<m, δηλαδή το δέντρο έχει $2^{k+1} - 1$ κόμβους από τους οποίους οι 2^k είναι φύλλα και οι $2^k - 1$ είναι εσωτερικοί.

- <u>Βήμα της επαγωγής</u>

  Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για ύψος m. Δηλαδή, ότι το δέντρο έχει $2^{m+1} - 1$ κόμβους από τους οποίους οι 2^m είναι φύλλα και οι $2^m - 1$ είναι εσωτερικοί.

  Όπως φαίνεται και στο σχήμα, το τέλειο δυαδικό δένδρο αυτό αποτελείται από μια ρίζα και δύο μη κενά τέλεια δυαδικά υπόδενδρα που ριζώνουν σε αυτή με ύψος m-1.



Κόμβοι: = K(m-1) + K(m-1) + 1 = 2K(m-1) + 1

$= 2.(2^{(m-1)+1} - 1) + 1$ από την επαγωγική υπόθεση και m-1<m

$= 2.2^m - 2 + 1$

$= 2^{m+1} - 1$.

Φύλλα: = Φ(m-1) + Φ(m-1) = 2Φ(m-1)

$= 2.(2^{m-1})$ από την επαγωγική υπόθεση και m-1<m

$= 2^m$

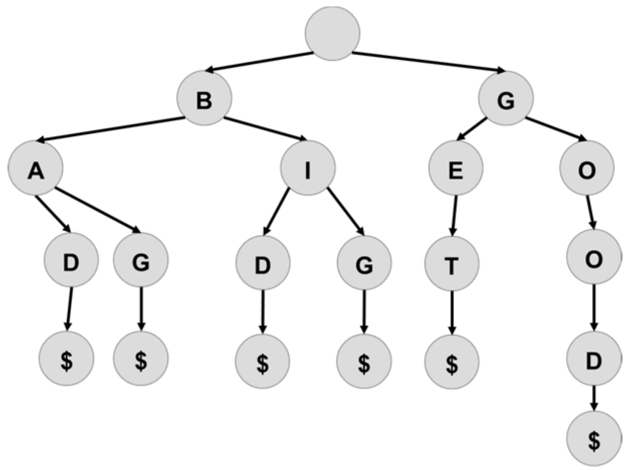
Εσωτερικοί Κόμβοι: = Ε(m-1) + Ε(m-1) + 1 = 2Ε(m-1) + 1

$= 2.(2^{m-1} - 1) + 1$ από την επαγωγική υπόθεση και m-1<m

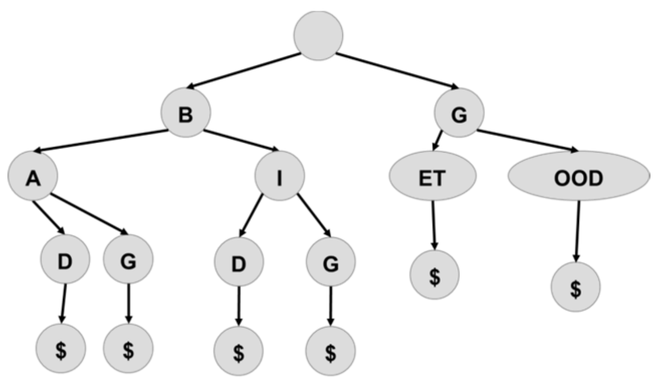
$= 2^m - 2 + 1$

$= 2^m - 1$.

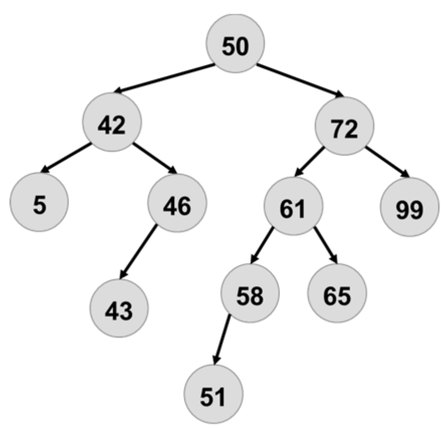
Άσκηση 3
Κατασκευάστε ένα suffix trie για τις λέξεις: BIG, BID, BAG, GOOD, BAD, GET.



Άσκηση 4
Κατασκευάστε ένα patricia trie από το δέντρο της άσκησης 3.



Άσκηση 5
Πιο είναι το αποτέλεσμα της προθεματικής και μεταθεματικής διάσχισης στο πιο κάτω δέντρο.



Προθεματική: 50, 42, 5, 46, 43, 72, 61, 58, 51, 65, 99
Μεταθεματική: 5, 43, 46, 42, 51, 58, 65, 61, 99, 72, 50