



# Φροντιστήριο: Επανάληψη για την ενδιάμεση εξέταση

---

**Διδάσκων: Παναγιώτης Ανδρέου**

# Μαθηματική Επαγωγή

Να αποδείξετε ότι  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$  για  $n > 0$ .

Απόδειξη:

- Επαληθεύουμε την  $\Pi(1)$  ως εξής:  $1 = 1^2$
- Υποθέτουμε ότι ισχύει η  $\Pi(k)$ , δηλαδή ότι

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

- Και θα αποδείξουμε ότι ισχύει η  $\Pi(k+1)$ :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1)$$

$$= [1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)] + (2k + 1)$$

$$= k^2 + 2k + 1 \quad [\text{Επαγωγική υπόθεση}]$$

$$= (k + 1)^2 \quad [\text{Το οποίο είναι το ζητούμενο}]$$

# Επανάληψη Χρήσιμων Μαθηματικών Ορισμών

Ορισμός 1:  $\log_x a = b$  iff  $x^b = a$

Χρήσιμοι νόμοι λογάριθμων:

$$\log ab = \log a + \log b$$

$$\log a^b = b \cdot \log a$$

$$\log a \div b = \log a - \log b$$

$$\log_a b = (\log_c b) \div (\log_c a)$$

$$b^{\log_b x} = x$$

$$\log a = 1$$

$$\log^2 n = (\log n)^2 = \log n * \log n$$

$$\log n^2 = \log n + \log n = 2x \log n$$

$\log_{10}$  (common),  $\log_e$  (ln - natural),  **$\log_2$  (lg - binary)**

π.χ.,  $\log_2 2 = 1$   $\log_2 1 = 0$

$\log_2 0$  δεν ορίζεται

Ορισμός 2:  $\lfloor x \rfloor = \max\{a \mid a \leq x, \text{int}(a)\}$  (floor)

π.χ.,  $\lceil x \rceil = \min\{a \mid a \geq x, \text{int}(a)\}$  (ceiling)

$$\left\lceil \frac{63}{11} \right\rceil = \lceil 5.72 \rceil = 6, \quad \lfloor 5.1634 \rfloor = 5$$

# Ακολουθίες και Αθροίσματα

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n \cdot (n + 1)(2n + 1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Άθροισμα Γεωμετρικής  
Προόδου

$$\sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^i = n + n/2 + n/4 + \dots + 2 + 1 = 2n - 1$$

Το οποίο προκύπτει αλλιώς ως:  $\sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^i = \frac{2^{\log_2 n + 1} - 1}{2 - 1} = 2^{\log_2 n + 1} - 1 = 2 * 2^{\log_2 n} - 1 = 2n - 1$

# Παράδειγμα: Ανάλυση Χρόνου Εκτέλεσης

```
void mystery1(){  
    ...  
    for (i=0; i<lg n; i++){  
        for (j=0; j<i2; j++){  
            sum++;  
        }  
    }  
}
```

Εσωτερικός Βρόγχος

Εξωτερικός Βρόγχος

## Ανάλυση

• **Εσωτερικός Βρόγχος:**

$$IL = \sum_{j=0}^{i^2} 1 = i^2$$

• **Εξωτερικός Βρόγχος:**

$$OL = \sum_{i=0}^{\lg n} IL = \sum_{i=0}^{\lg n} i^2 = \frac{\lg n (\lg n + 1)(2 \lg n + 1)}{6} \in \Theta(\lg^3 n)$$

# Παράδειγμα: Ανάλυση Χρόνου Εκτέλεσης

```
void mystery2(){
    ...
    for (i=0; i<n; i++){
        for (j=0; j<n*i; j++){
            sum++;
        }
    }
}
```

Εσωτερικός Βρόγχος

Εξωτερικός Βρόγχος

## Ανάλυση

- **Εσωτερικός Βρόγχος:**
- **Εξωτερικός Βρόγχος:**

$$IL = \sum_{j=1}^{n*i} 1 = n \times i$$

$$OL = \sum_{i=0}^n IL = \sum_{i=0}^n n \times i = n \sum_{i=0}^n i = n \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^3)$$

# Παράδειγμα: Ανάλυση Χρόνου Εκτέλεσης

```
void mystery3(){  
    ...  
    for (i=0; i<n; i++){  
        for (j=n*i; j>0; j--){  
            sum++;  
        }  
    }  
}
```

Εσωτερικός Βρόγχος

Εξωτερικός Βρόγχος

## Ανάλυση

- **Εσωτερικός Βρόγχος:**  $IL = \sum_{j=1}^{n*i} 1 = n \times i$
- **Εξωτερικός Βρόγχος:**

$$OL = \sum_{i=0}^n IL = \sum_{i=0}^n n \times i = n \sum_{i=0}^n i = n \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^3)$$

# Παράδειγμα: Αντικατάσταση

```
void mystery4(int n){  
    ...  
    for (i=0; i<n; i++){ sum++; }  
    if(n>1) return mystery4(n/2) +  
              mystery4(n/2);  
    else    return 1;  
}
```

## Μορφή

$$T(n) = n + 2xT(n/2)$$



# Παράδειγμα: Αντικατάσταση

Έχουμε την αναδρομική εξίσωση

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n, \quad \text{για κάθε } n > 1$$

$$T(1) = 1$$

Τότε, αντικαθιστώντας το  $T(n/2)$  με την τιμή του παίρνουμε

$$\begin{aligned} T(n) &= 2 \cdot T(n/2) + n && // \text{ Εκτέλεση 1} \\ &= 2(2 \cdot T(n/4) + n/2) + n && // \text{ Εκτέλεση 2} \\ &= 2^2 \cdot T(n/4) + n + n && // \text{ Πράξεις} \\ &= 2^3 \cdot T(n/8) + n + n + n && // \text{ Εκτέλεση 3} \\ &= 2^k \cdot T(n/2^k) + k \cdot n && // k = \log_2 n \rightarrow 2^k = n \\ &= 2^k \cdot T(1) + k \cdot n && // n = 2^k, T(n/2^k) = T(1) = 1 \\ &= 2^{\log_2 n} + \log_2 n \cdot n && // \text{ Πράξεις} \\ &= n + n \log_2 n && // n = 2^k, T(n/2^k) = T(1) = 1 \end{aligned}$$

$$\in \Theta(n \log_2 n)$$

# Παράδειγμα: Αντικατάσταση

$$T(n) = 2 \times T(n/2) + n$$

**Master Theorem:** Έστω ότι η  $f$  είναι μία αύξουσα που ικανοποιεί τη λειτουργία της επανάληψης:

$$f(n) = af(n/b) + cn^d$$

όταν το  $n = b^k$ , όπου  $k$  είναι ένας θετικός ακέραιος,  $a \geq 1$ ,  $b > 1$ , και  $c, d$  είναι πραγματικοί αριθμοί,  $c \geq 0$ ,  $d \geq 0$ . Τότε ισχύει:

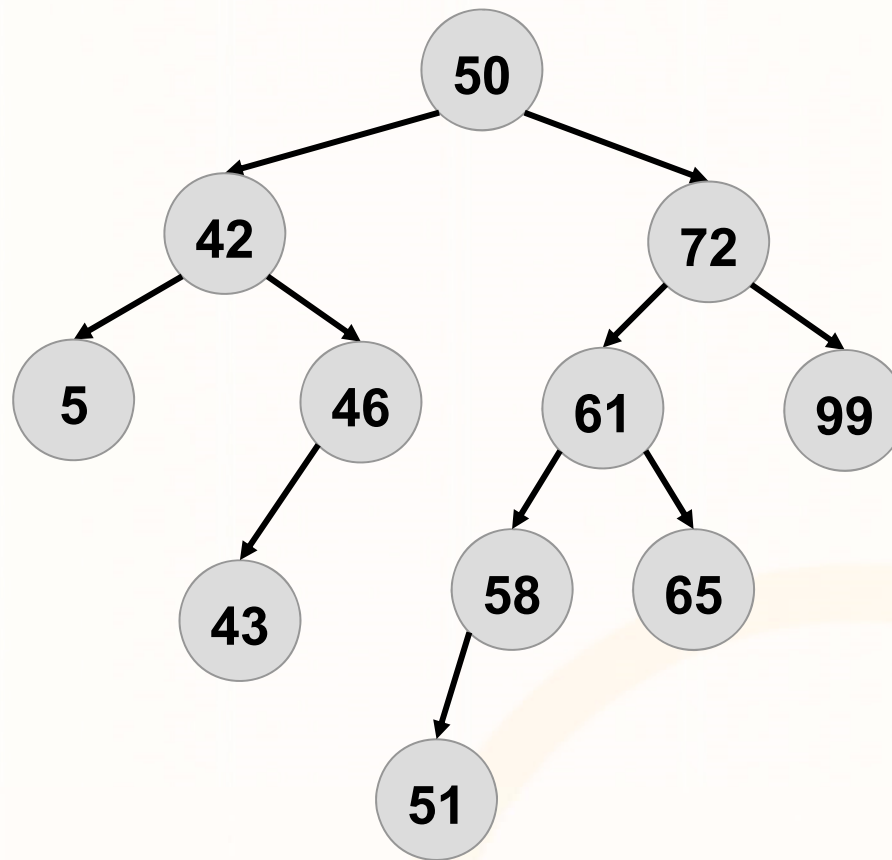
$$f(n) \text{ is } \begin{cases} O(n^d) & \text{if } a < b^d \\ O(n^d \log_b(n)) & \text{if } a = b^d \\ O(n^{\log_b(a)}) & \text{if } a > b^d \end{cases}$$

$$a=2, b=2, c=1, d=1 \quad b^d=2^1=2 \rightarrow a=b^d$$

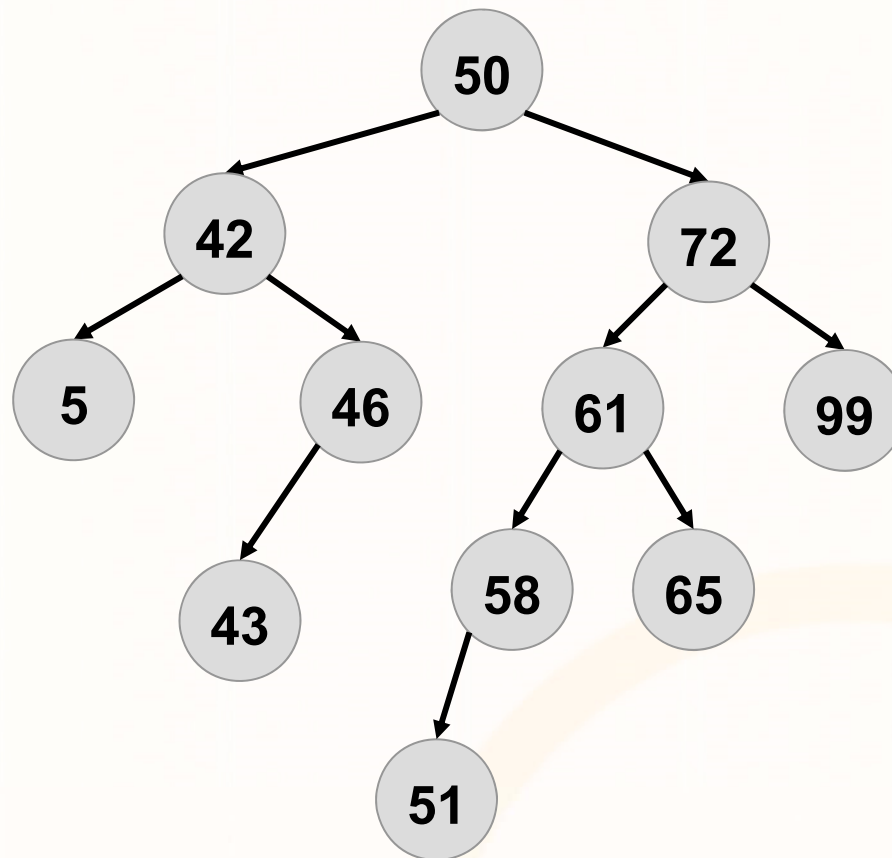
$$f(n) \text{ is } \begin{cases} O(n^d \log_b(n)) & \text{if } a = b^d \end{cases}$$

$$T(n) \in O(n^1 \log_2(n)) \rightarrow T(n) \in O(n \log_2(n))$$

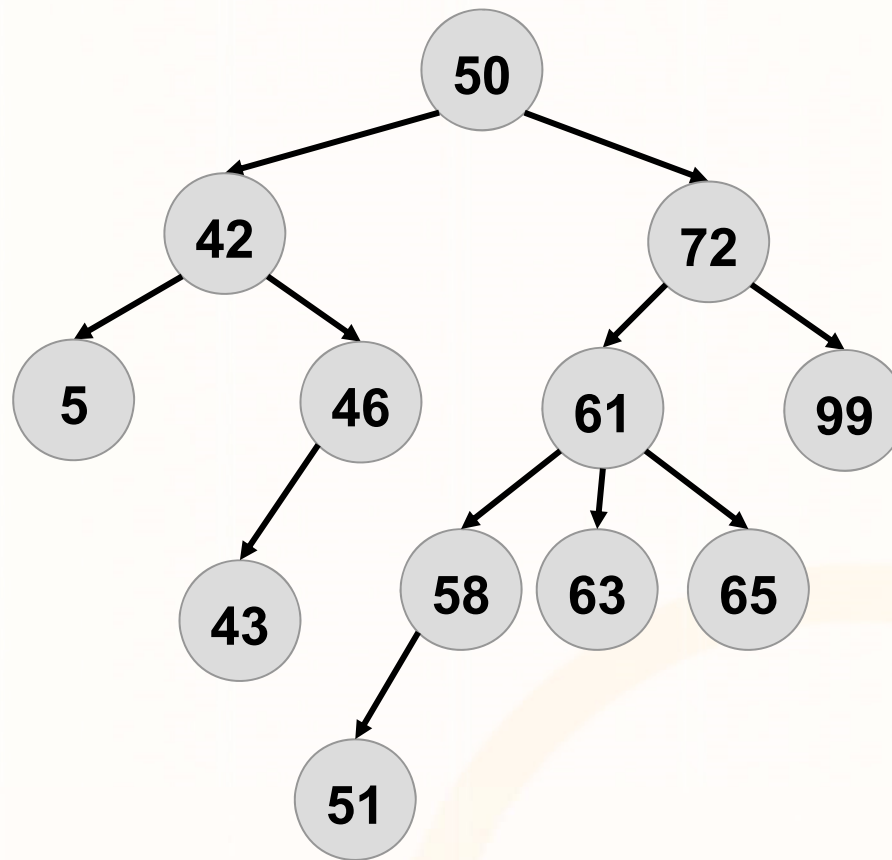
Ποιος είναι ο βαθμός του κόμβου 99;



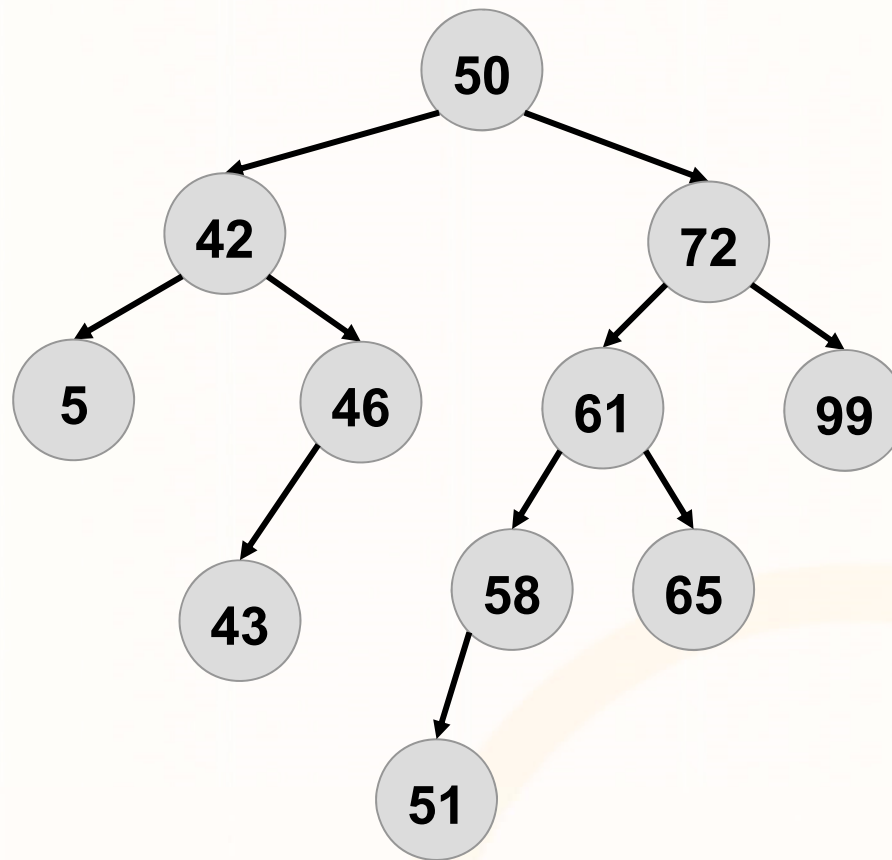
Ποιος είναι ο βαθμός του κόμβου 61;



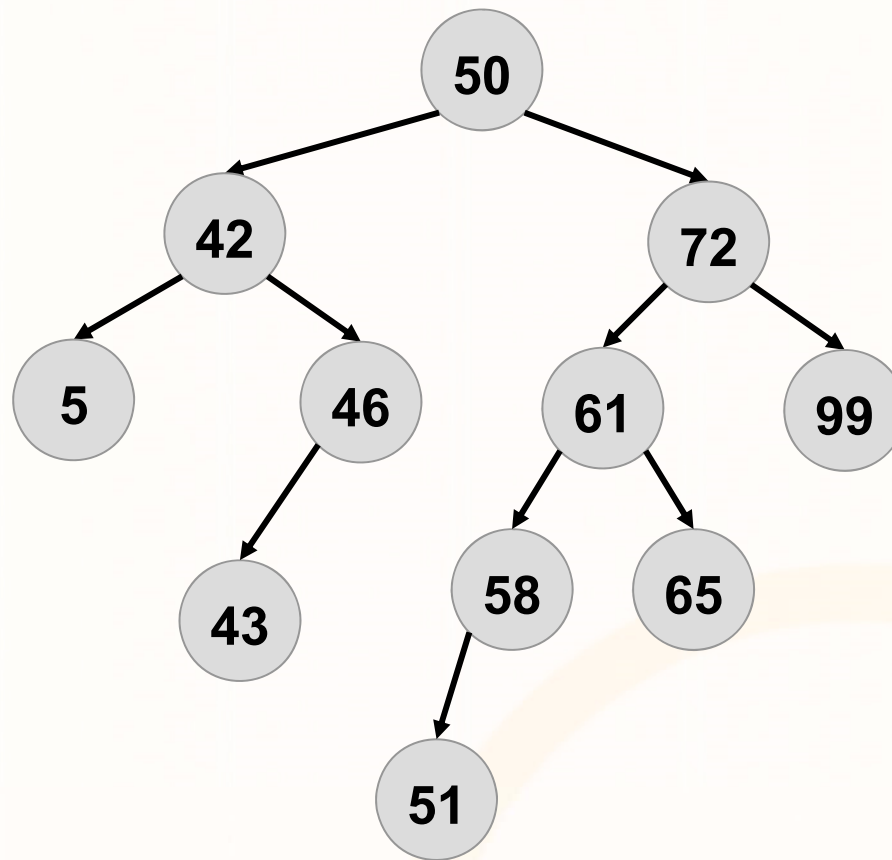
# Ποιος είναι ο βαθμός του δέντρου;



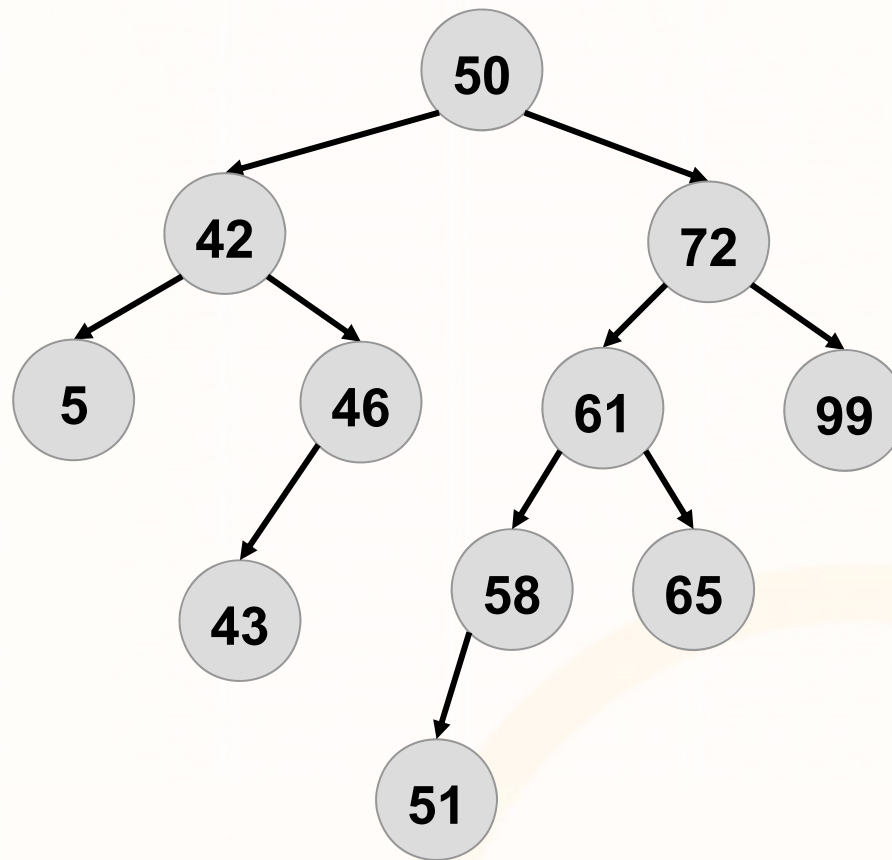
Ποιο είναι το ύψος του κόμβου 51;



Ποιο είναι το ύψος του κόμβου 58;

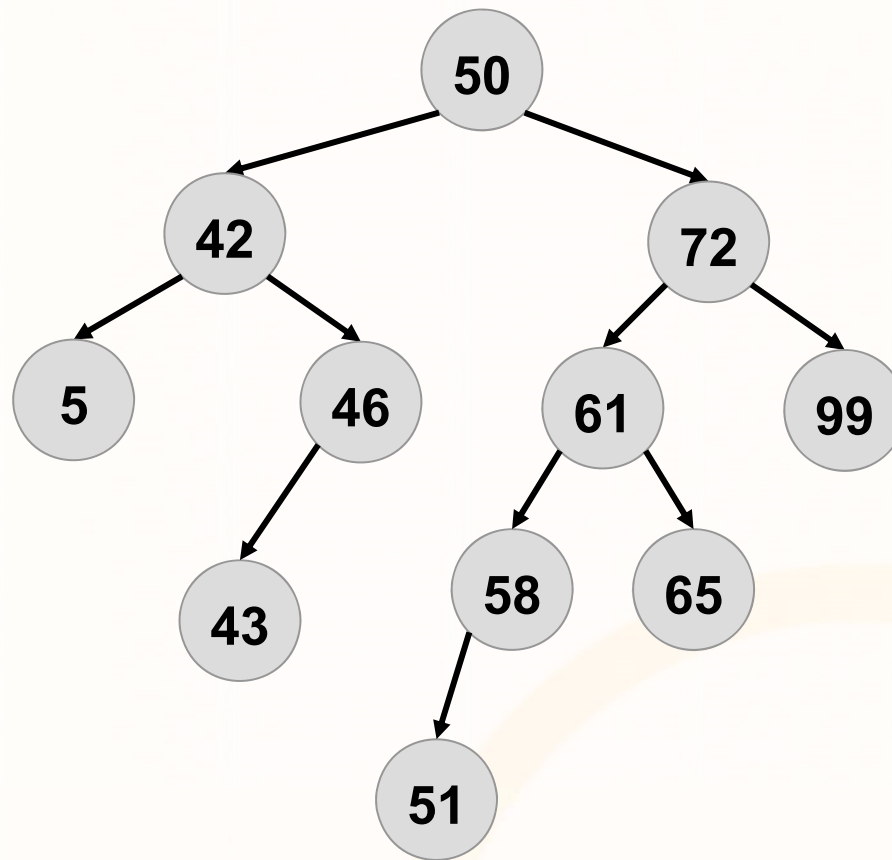


Ποιο είναι το ύψος του κόμβου 72;

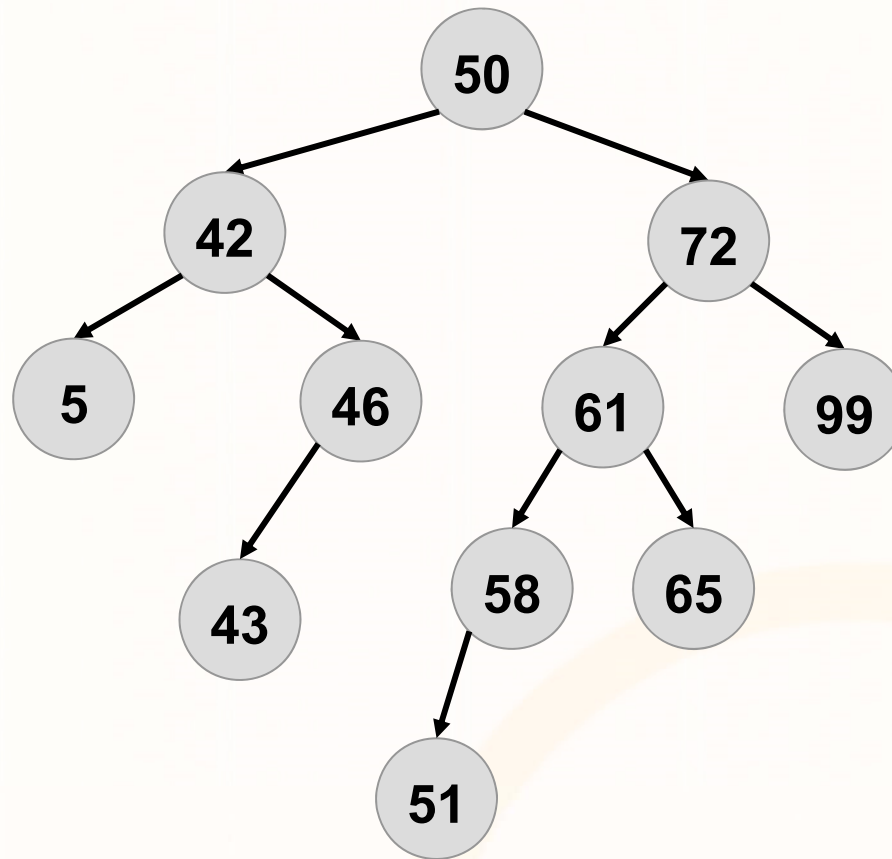




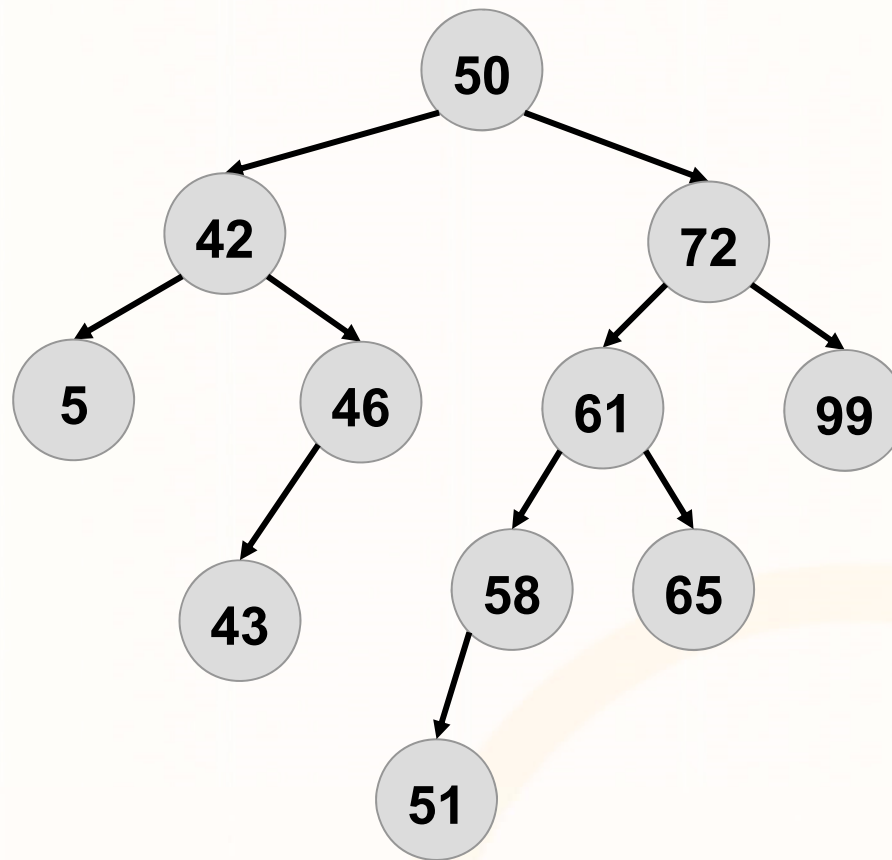
# Ποιο είναι το ύψος του δέντρου;



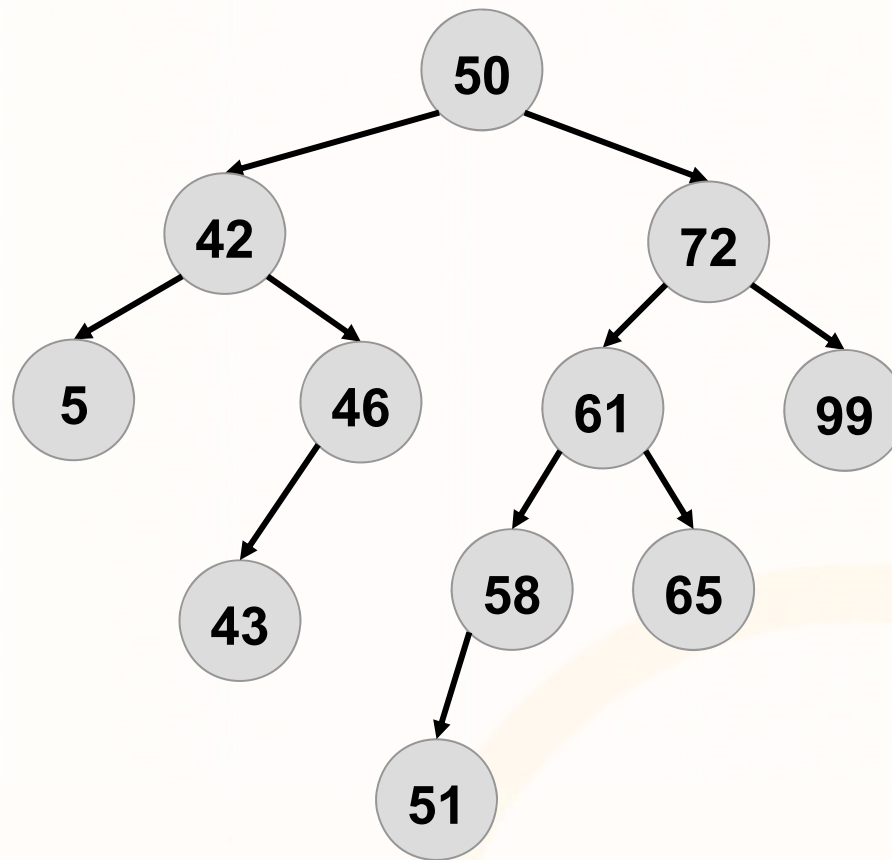
Ποιο είναι το βάθος του κόμβου 50;



Ποιο είναι το βάθος του κόμβου 46;



Ποιο είναι το βάθος του κόμβου 51;

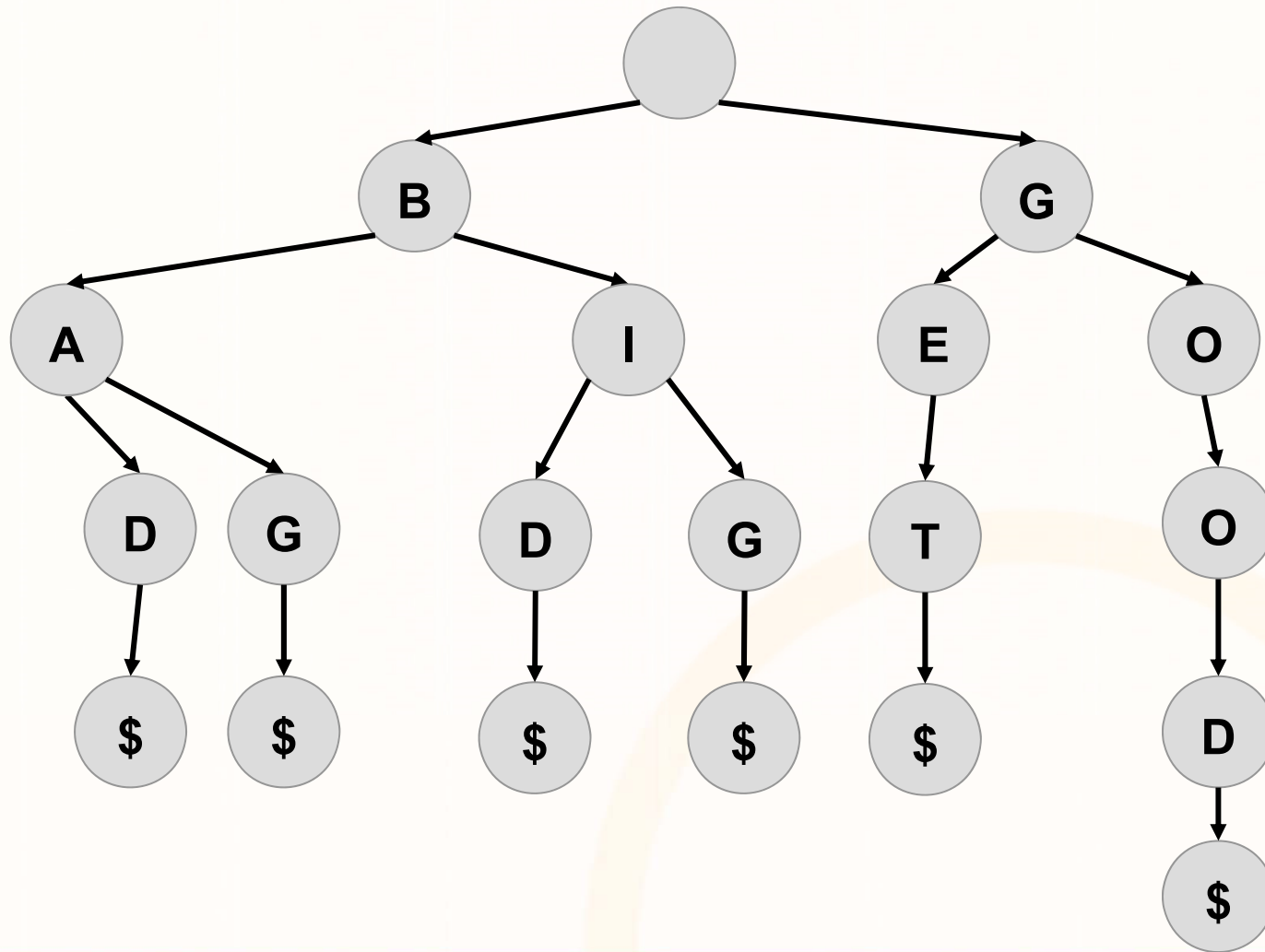


# Suffix Trie

Κατασκευάστε ένα suffix trie για τις λέξεις: BIG, BID,  
BAG, GOOD, BAD, GET

# Suffix Trie

Κατασκευάστε ένα suffix trie για τις λέξεις: BIG, BID, BAG, GOOD, BAD, GET

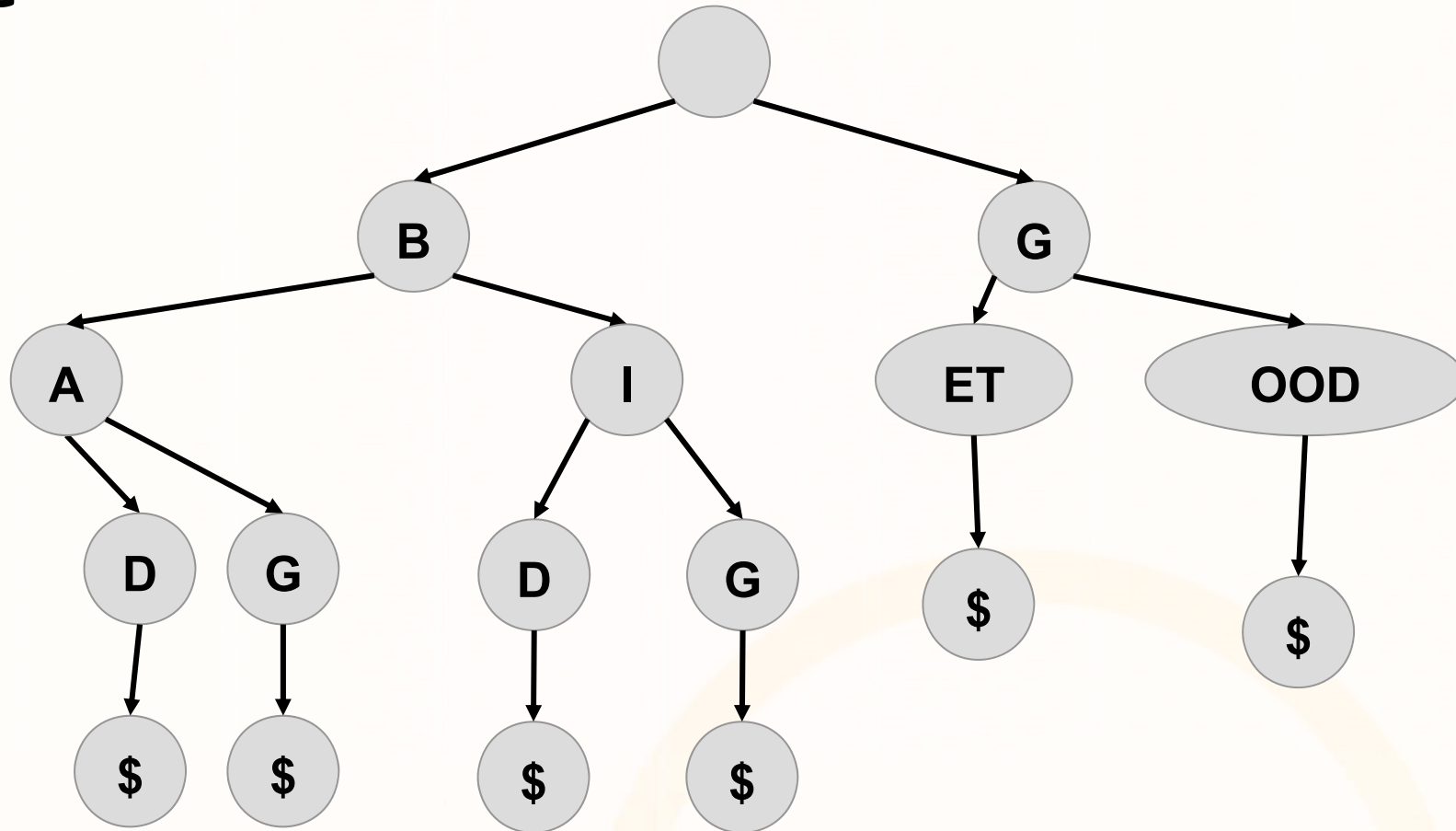


# Patricia Trie

Μετατρέψτε το προηγούμενο suffix trie σε patricia trie

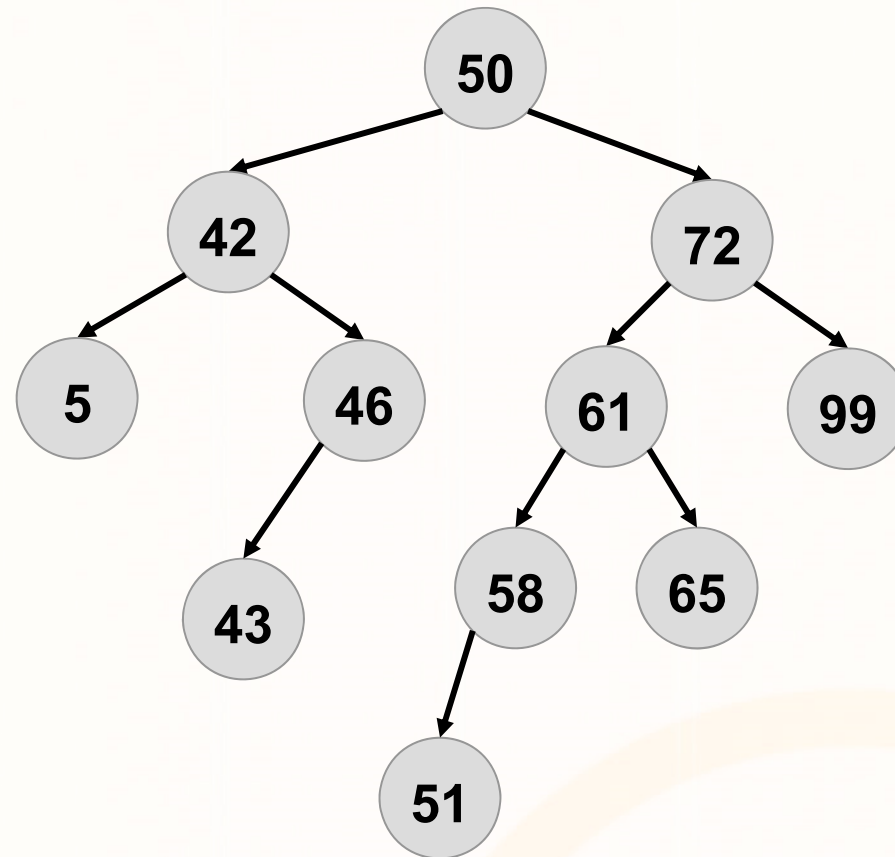
# Patricia Trie

Μετατρέψτε το προηγούμενο suffix trie σε patricia trie

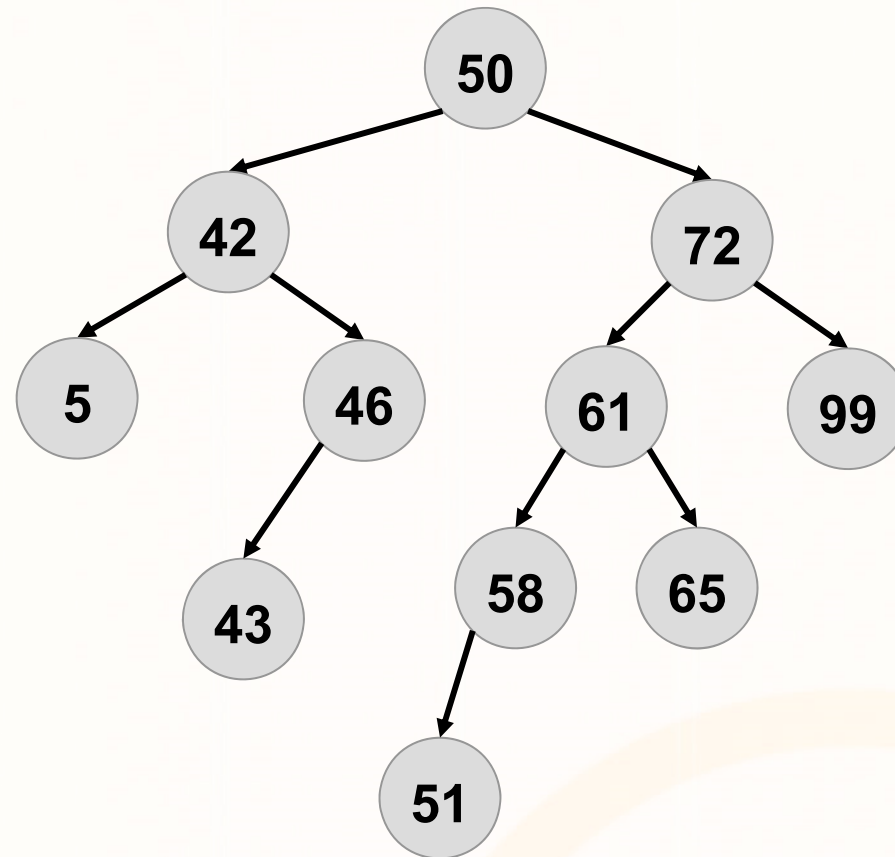




Πιο θα είναι το αποτέλεσμα της προθεματικής διάσχισης?

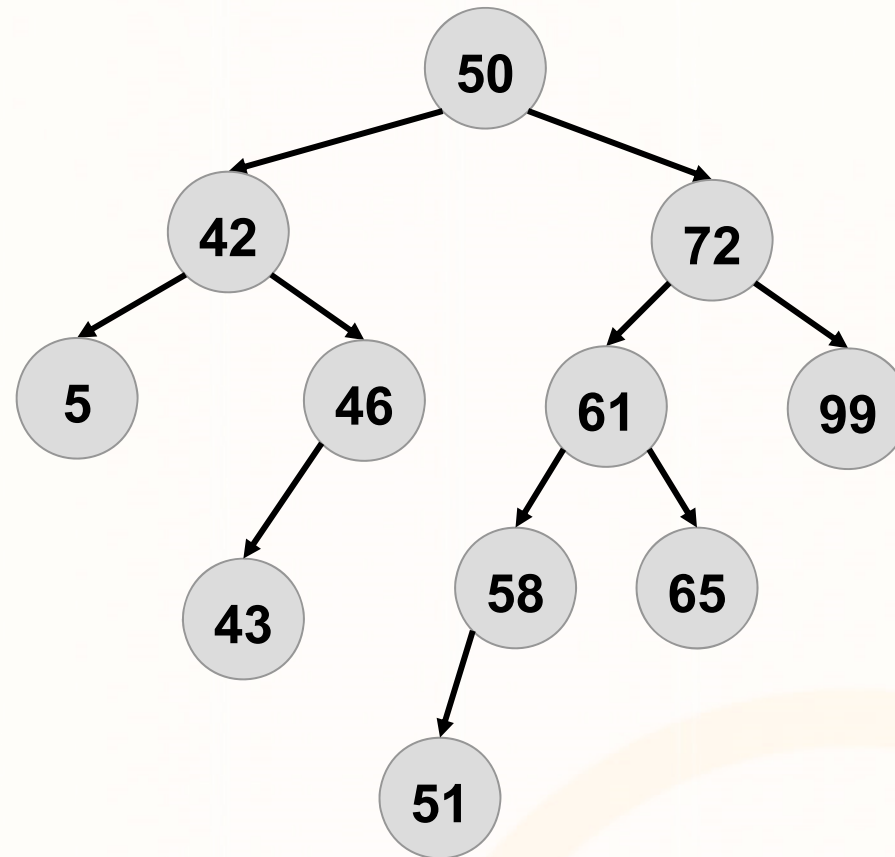


Πιο θα είναι το αποτέλεσμα της προθεματικής διάσχισης?

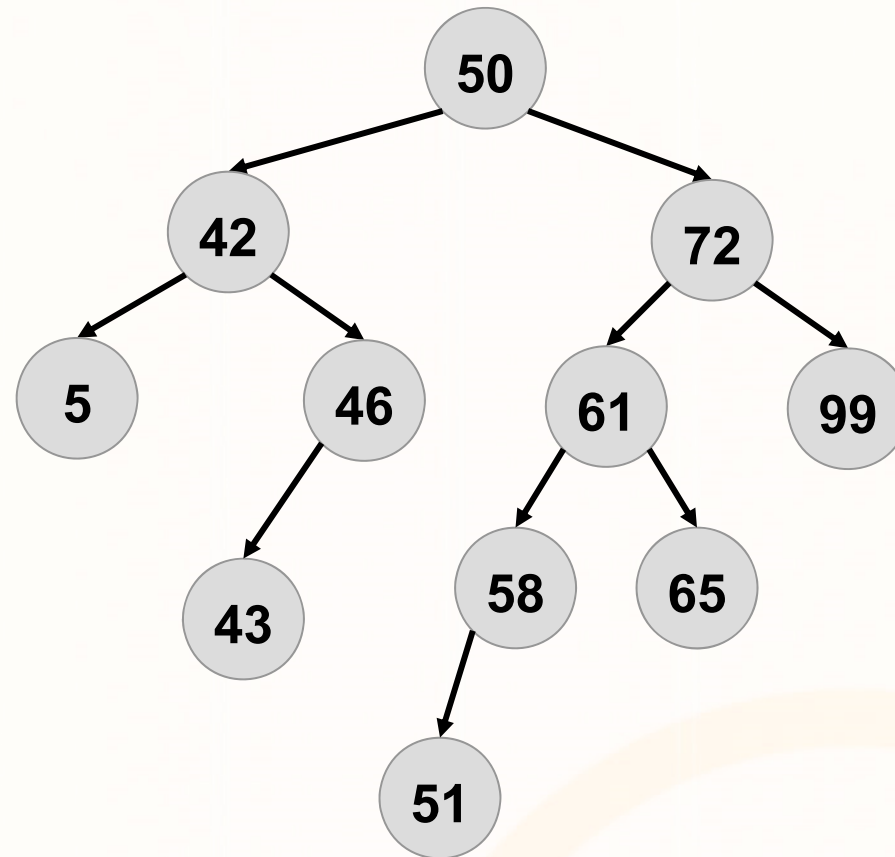


**50, 42, 5, 46, 43, 72, 61, 58, 51, 65, 99**

Πιο θα είναι το αποτέλεσμα της μεταθεματικής διάσχισης?

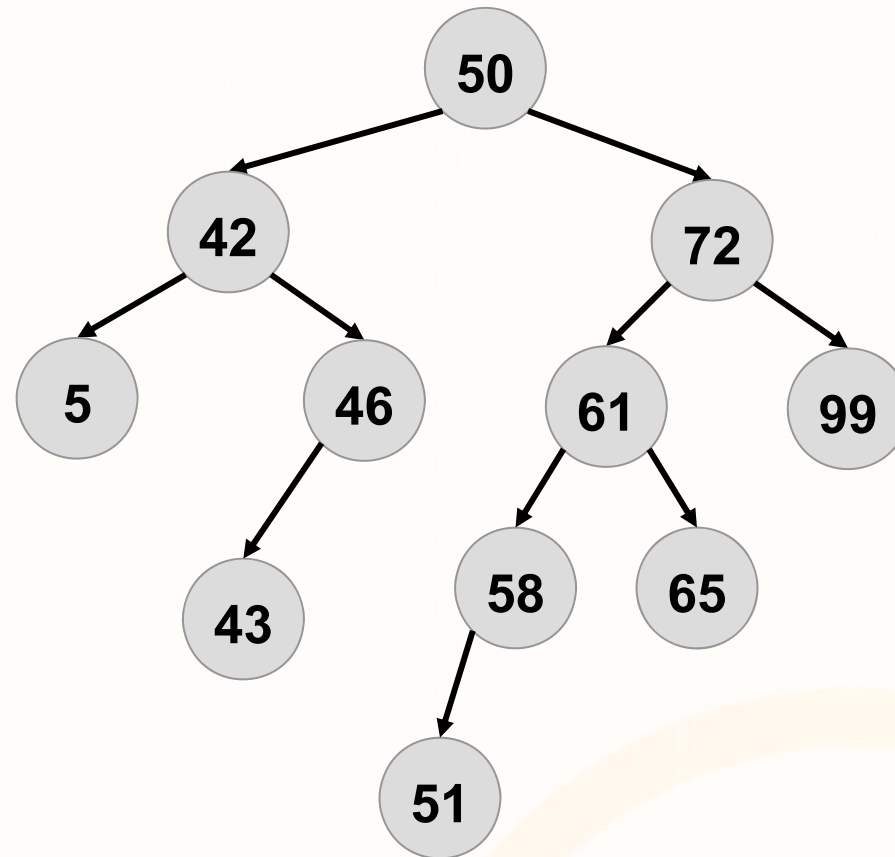


Πιο θα είναι το αποτέλεσμα της μεταθεματικής διάσχισης?



5, 43, 46, 42, 51, 58, 65, 61, 99, 72, 50

Πιο θα είναι το αποτέλεσμα της μεταθεματικής διάσχισης?



5, 43, 46, 42, 51, 58, 65, 61, 99, 72, 50

## Δυαδικά Δέντρα

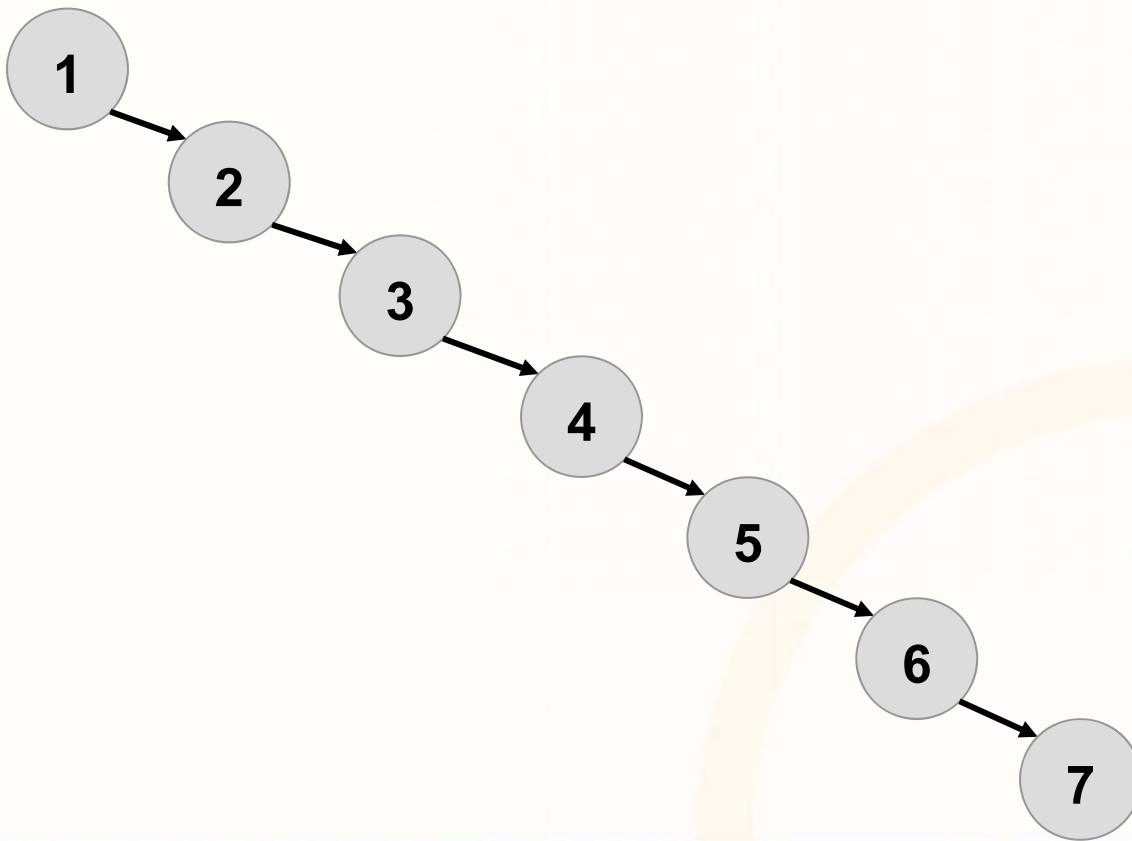
Ποιος είναι ο ύψος ενός δυαδικού δέντρου όταν εισάξουμε τα στοιχεία 1,2,3,4,5,6,7 με αυτή τη σειρά;

Ποιος θα είναι ο χρόνος αναζήτησης χειρίστης περίπτωσης στο πιο πάνω δέντρο σε σχέση με το  $n$ ;

## Δυαδικά Δέντρα

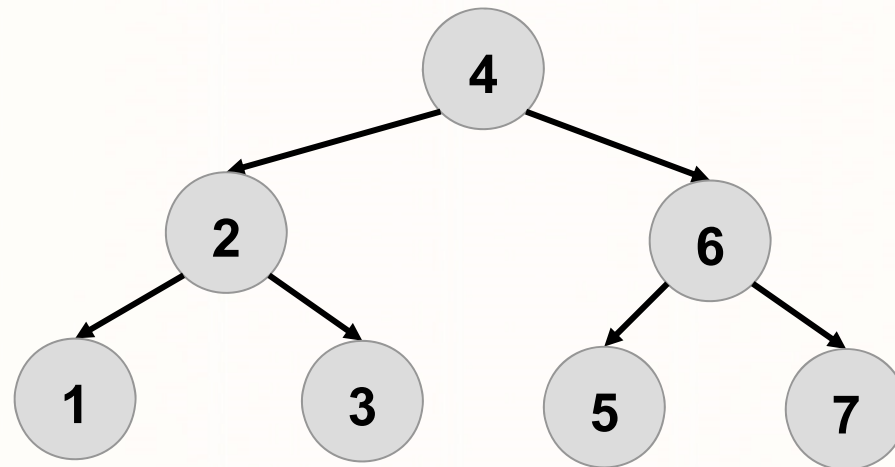
Ποιος είναι ο ύψος ενός δυαδικού δέντρου όταν εισάξουμε τα στοιχεία 1,2,3,4,5,6,7 με αυτή τη σειρά;

Ποιος θα είναι ο χρόνος αναζήτησης χειρίστης περίπτωσης στο πιο πάνω δέντρο σε σχέση με το  $n$ ;  $\rightarrow O(n)$



## Δυαδικά Δέντρα

Με ποια σειρά πρέπει να εισάξουμε τα στοιχεία 1,2,3,4,5,6,7 ώστε να πάρουμε το πιο κάτω δέντρο;

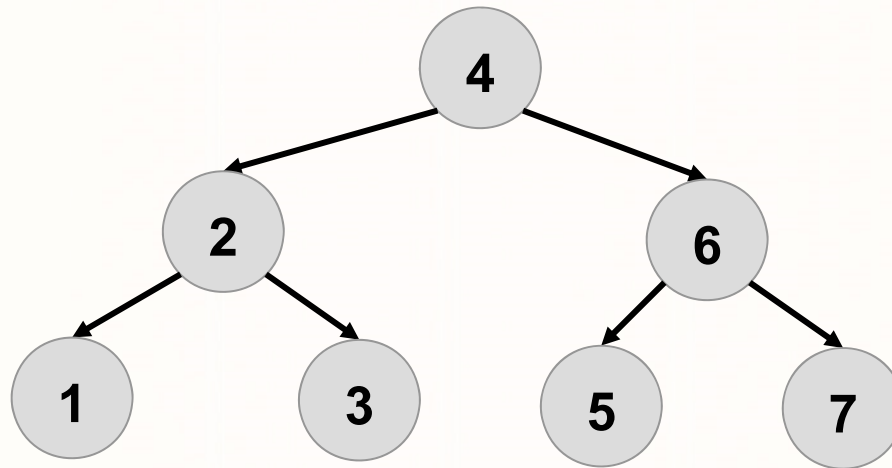


Τι είναι το πιο πάνω δέντρο;



## Δυαδικά Δέντρα

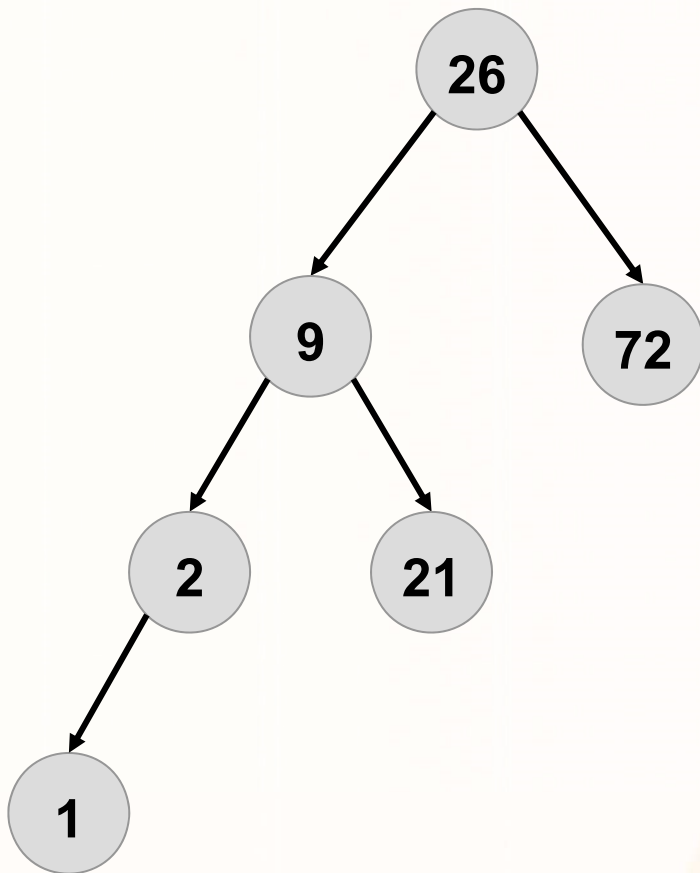
Με ποια σειρά πρέπει να εισάξουμε τα στοιχεία  
1,2,3,4,5,6,7 ώστε να πάρουμε το πιο κάτω δέντρο;  
4,2,6,1,3,5,7



Τι είναι το πιο πάνω δέντρο; Τέλειο

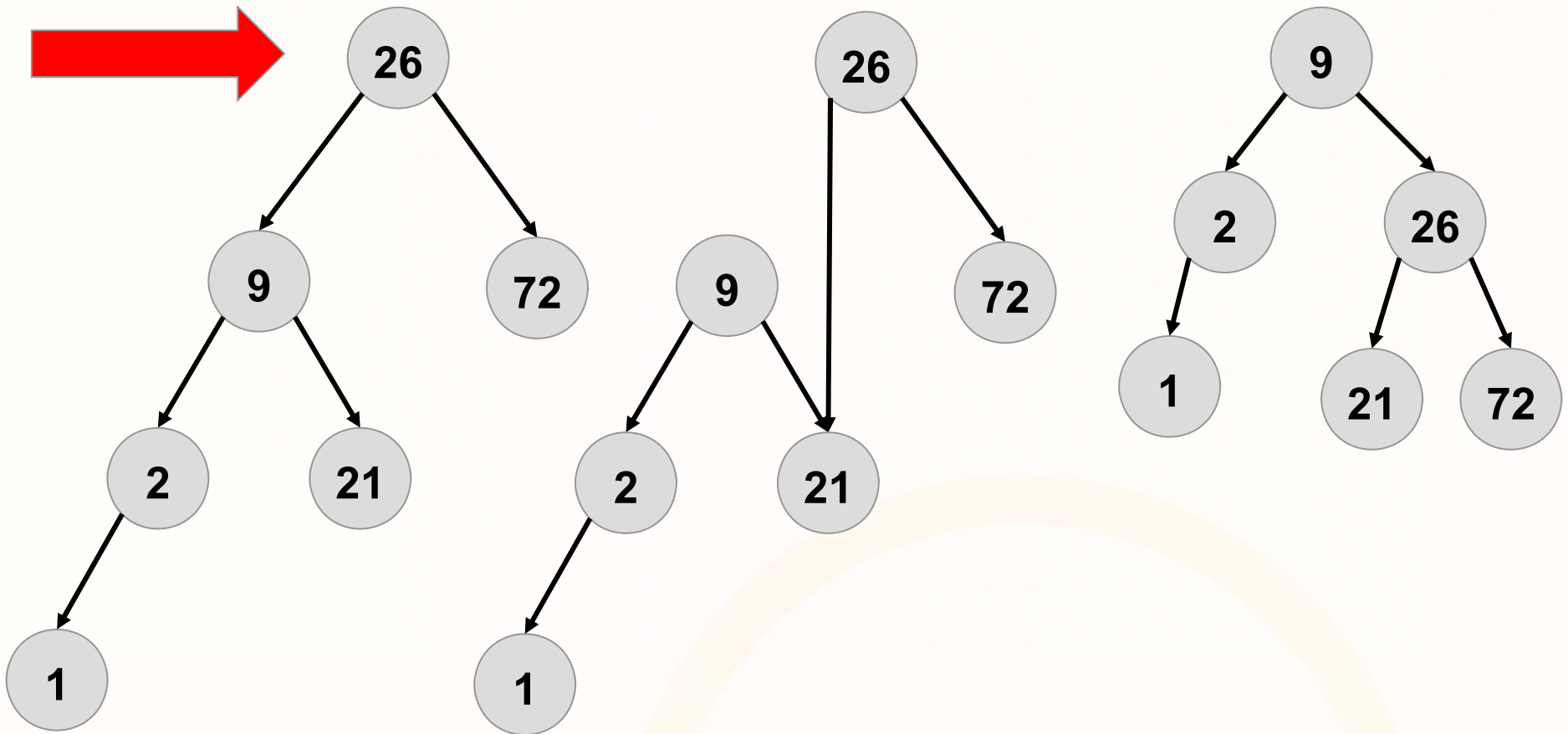
# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 1;



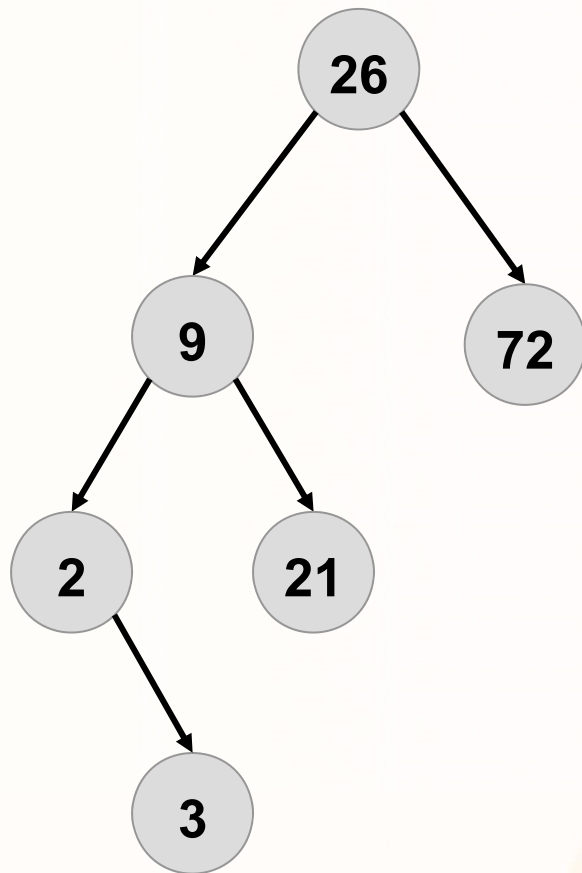
# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 1;



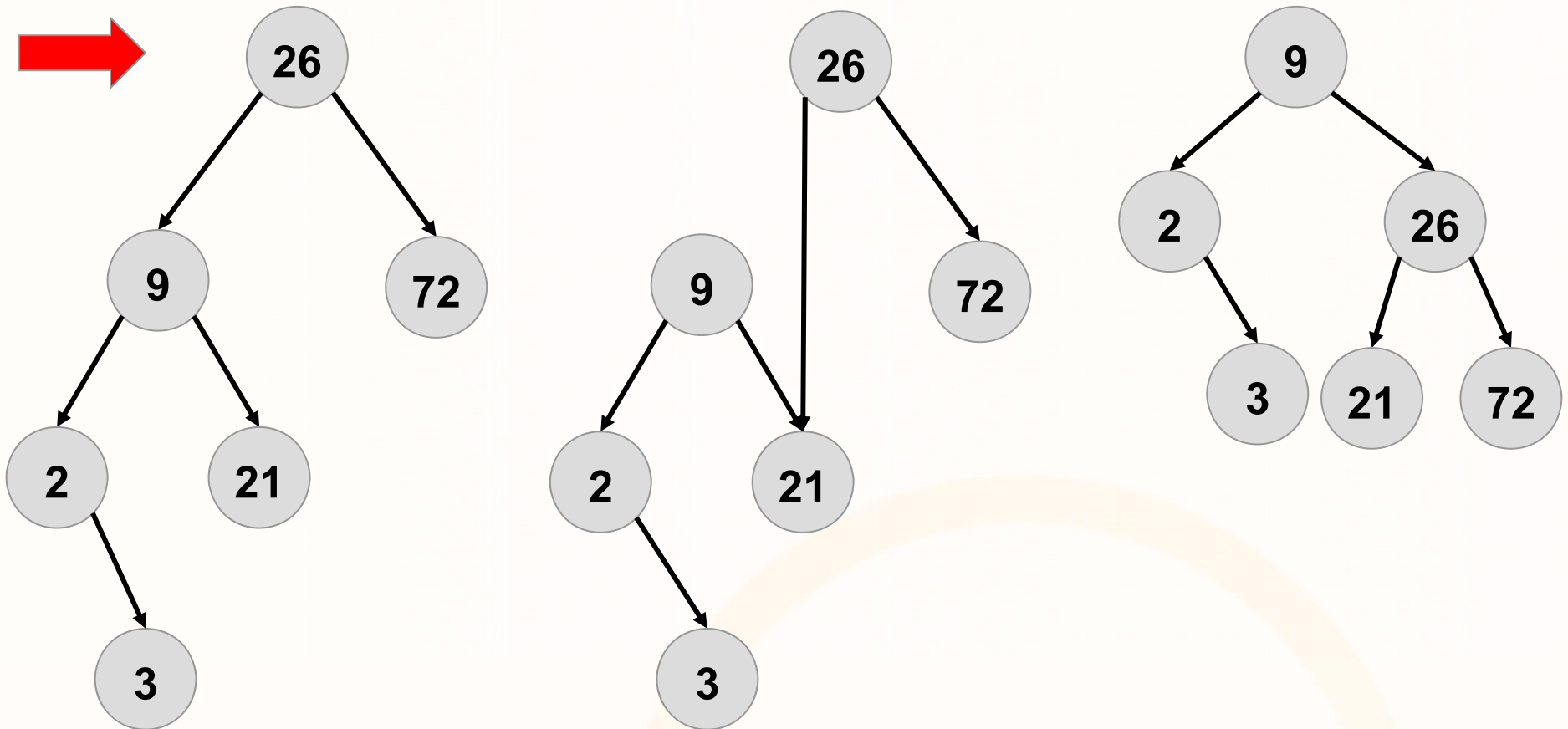
# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 3;



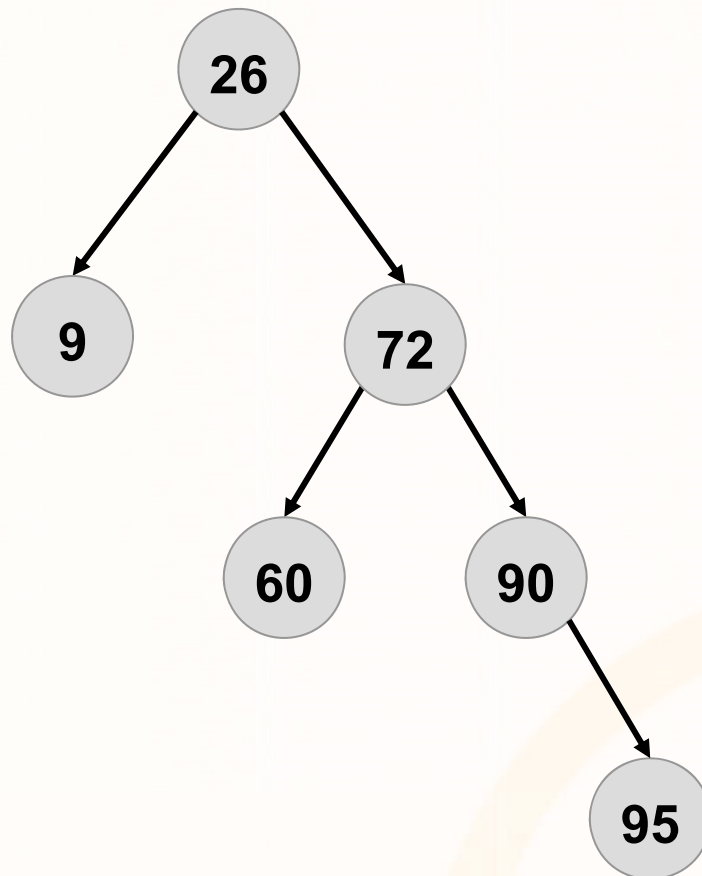
# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 3;



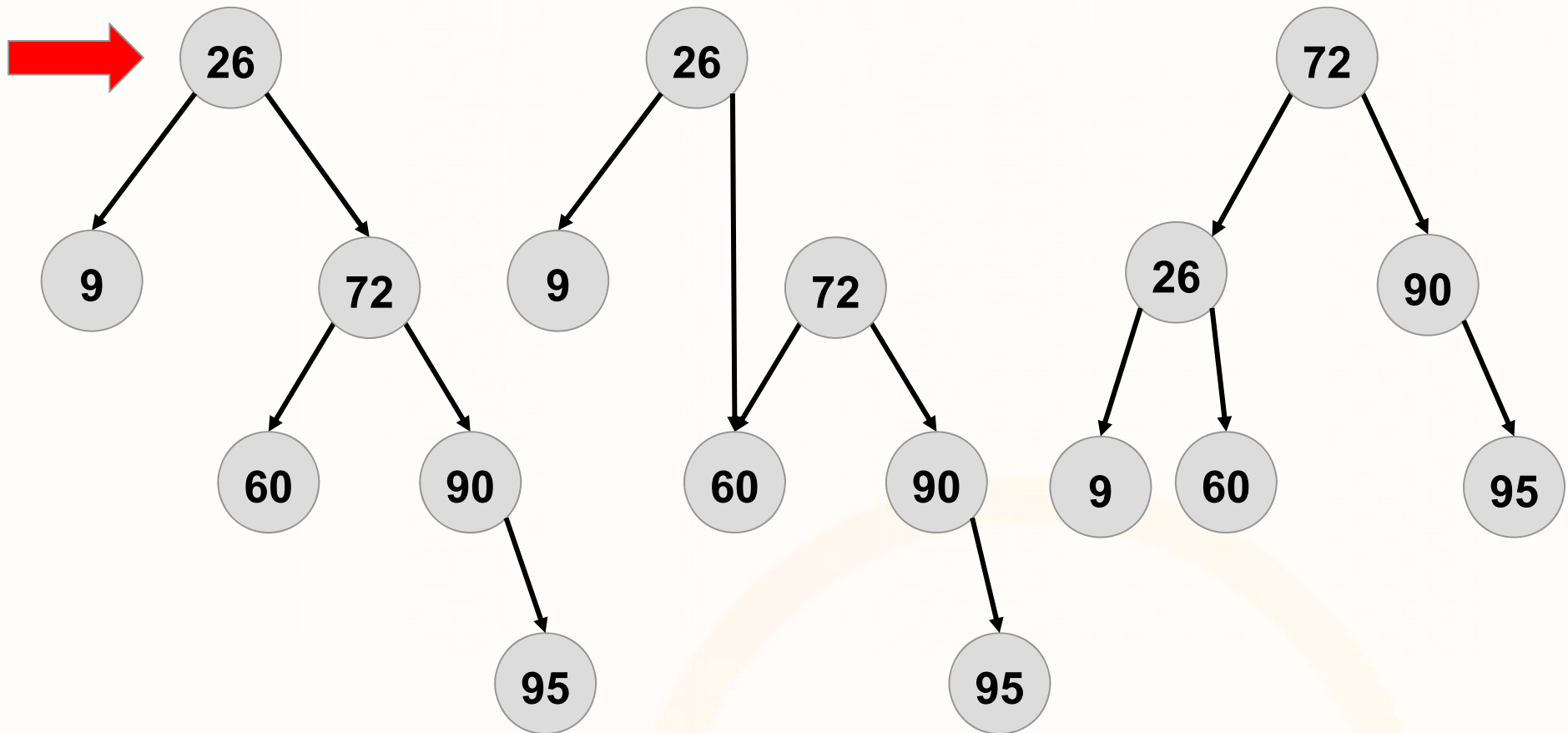
# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 95;



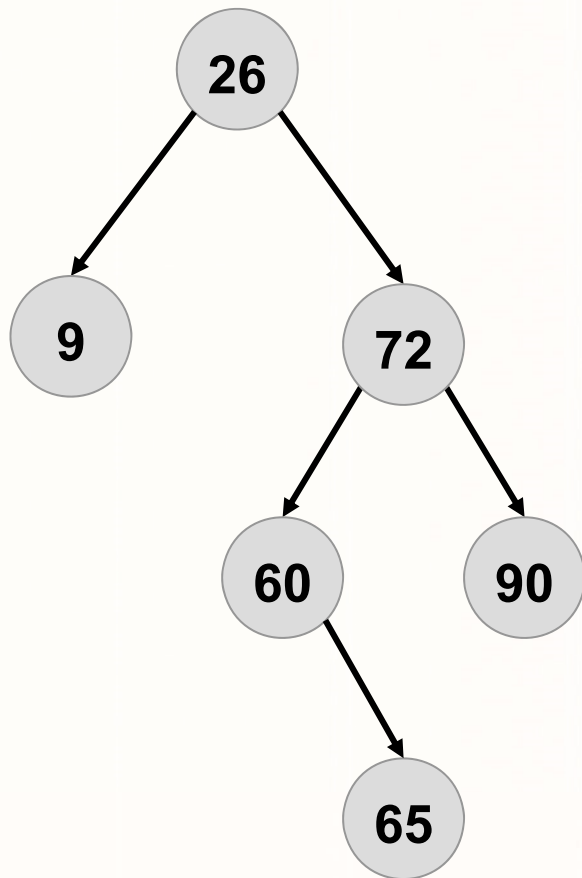
# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 95;



# AVL Δέντρα

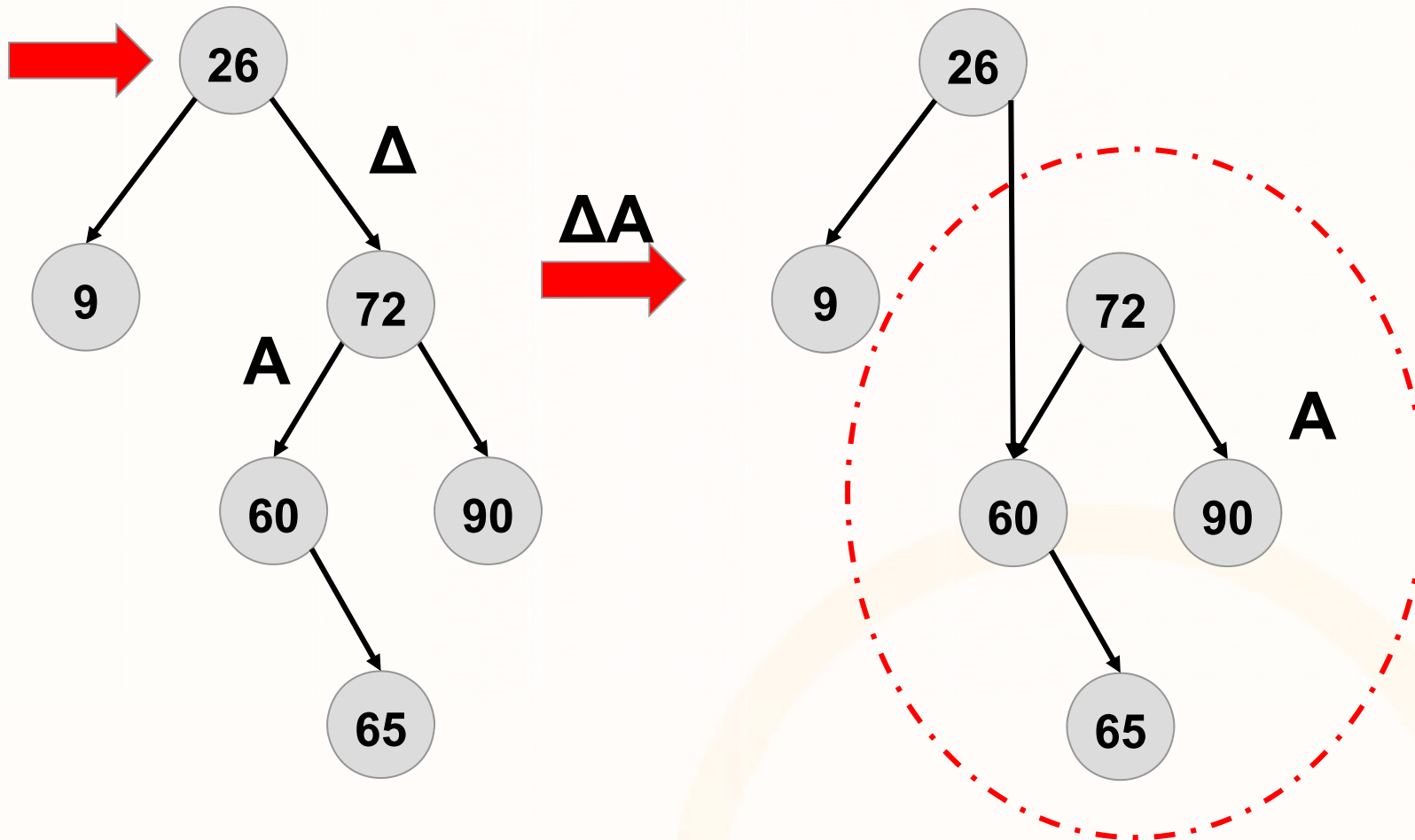
Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 65;





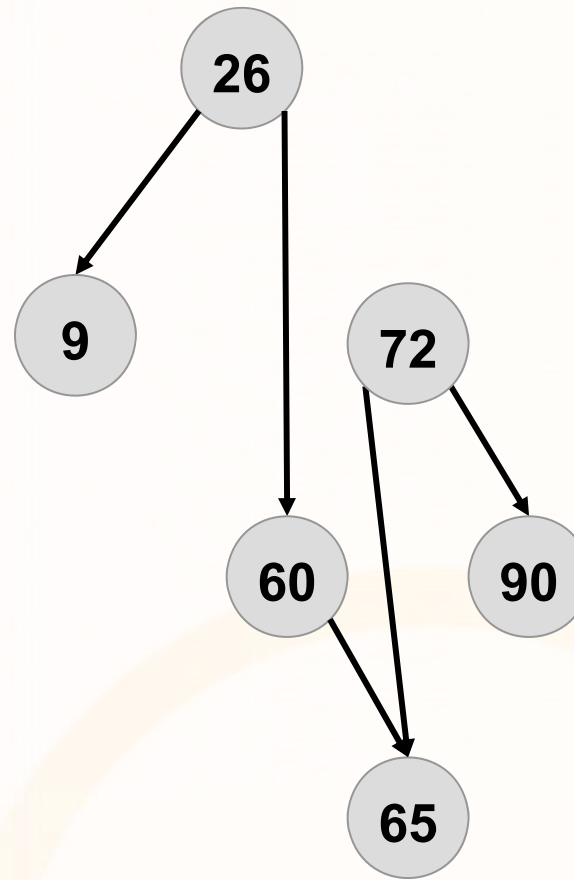
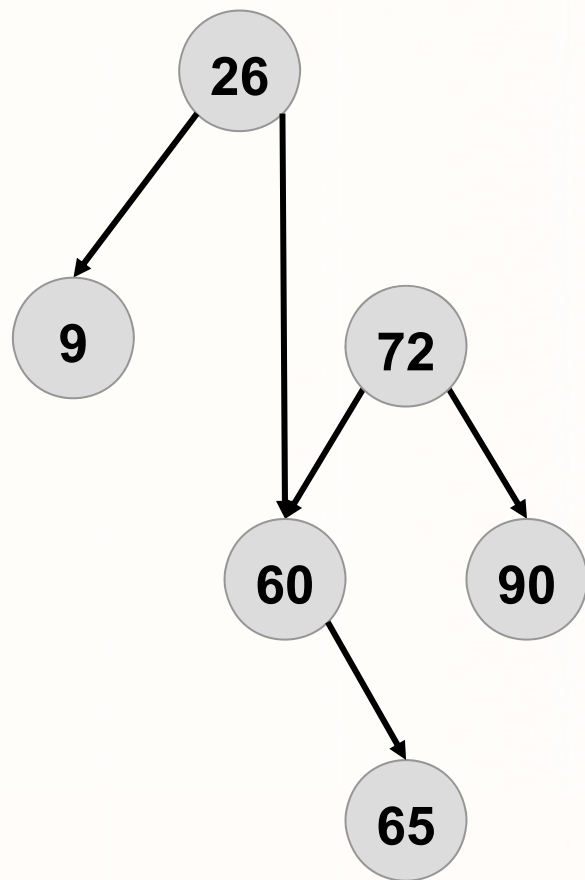
# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 65;



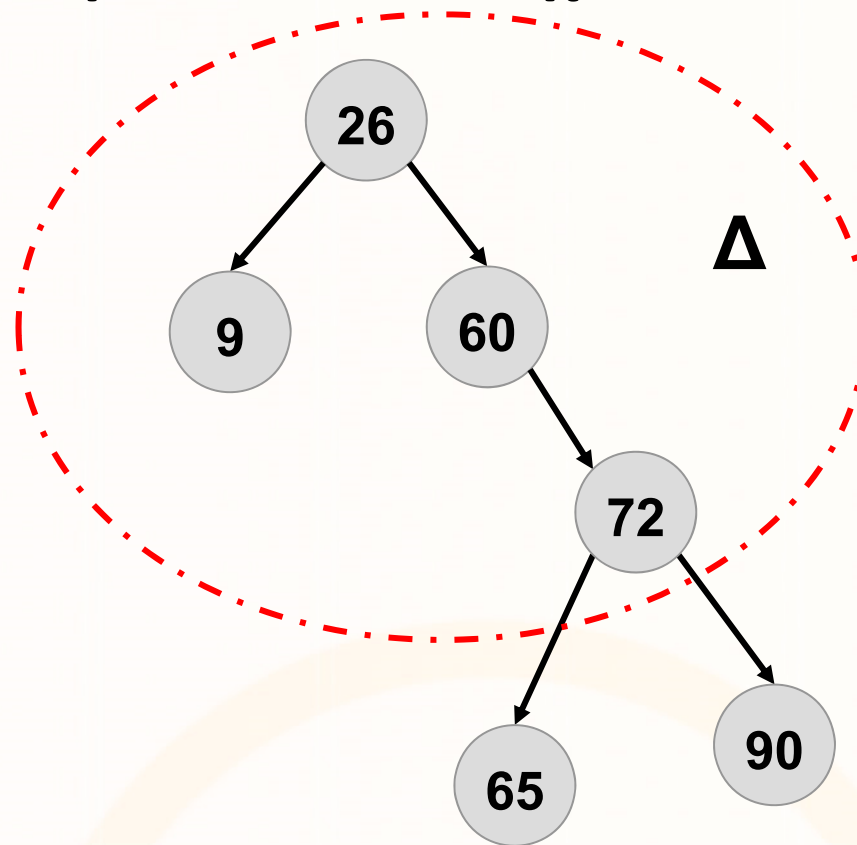
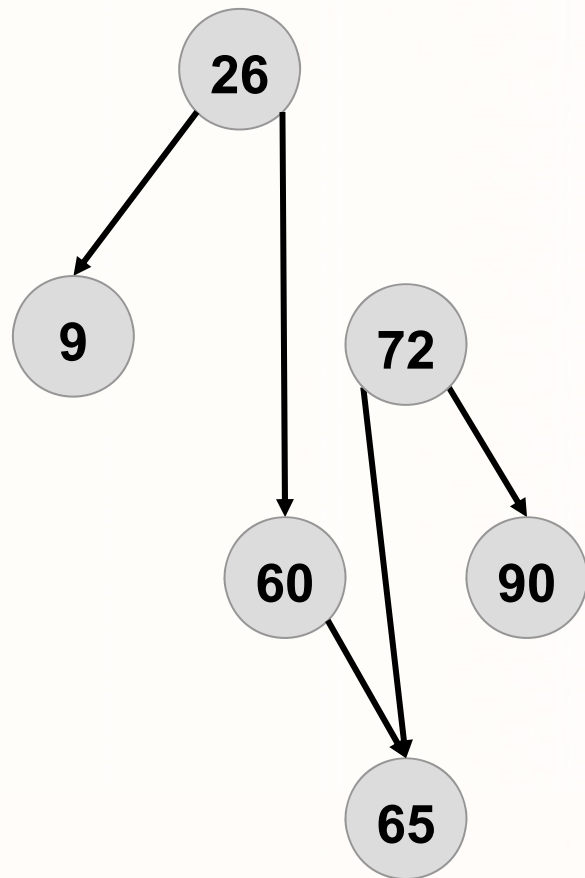
# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 65;



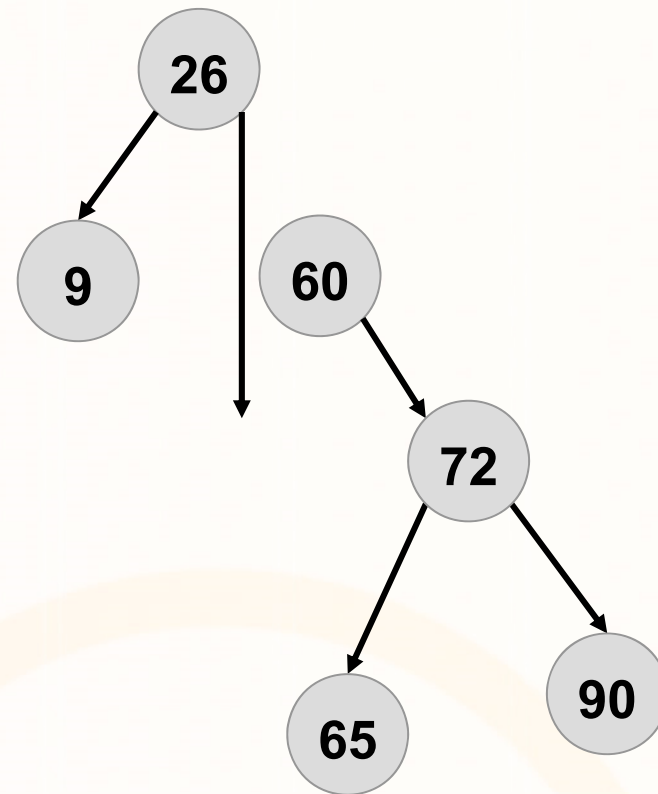
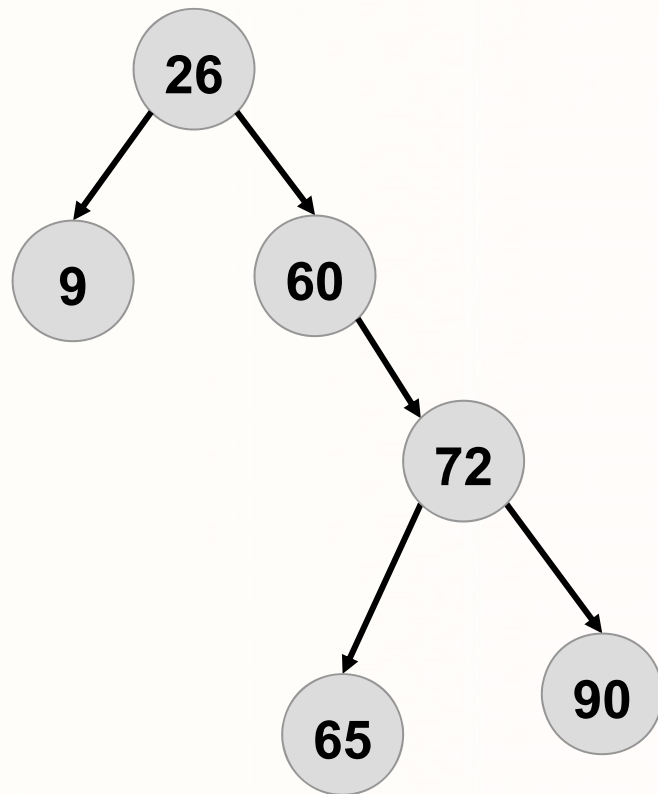
# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 65;



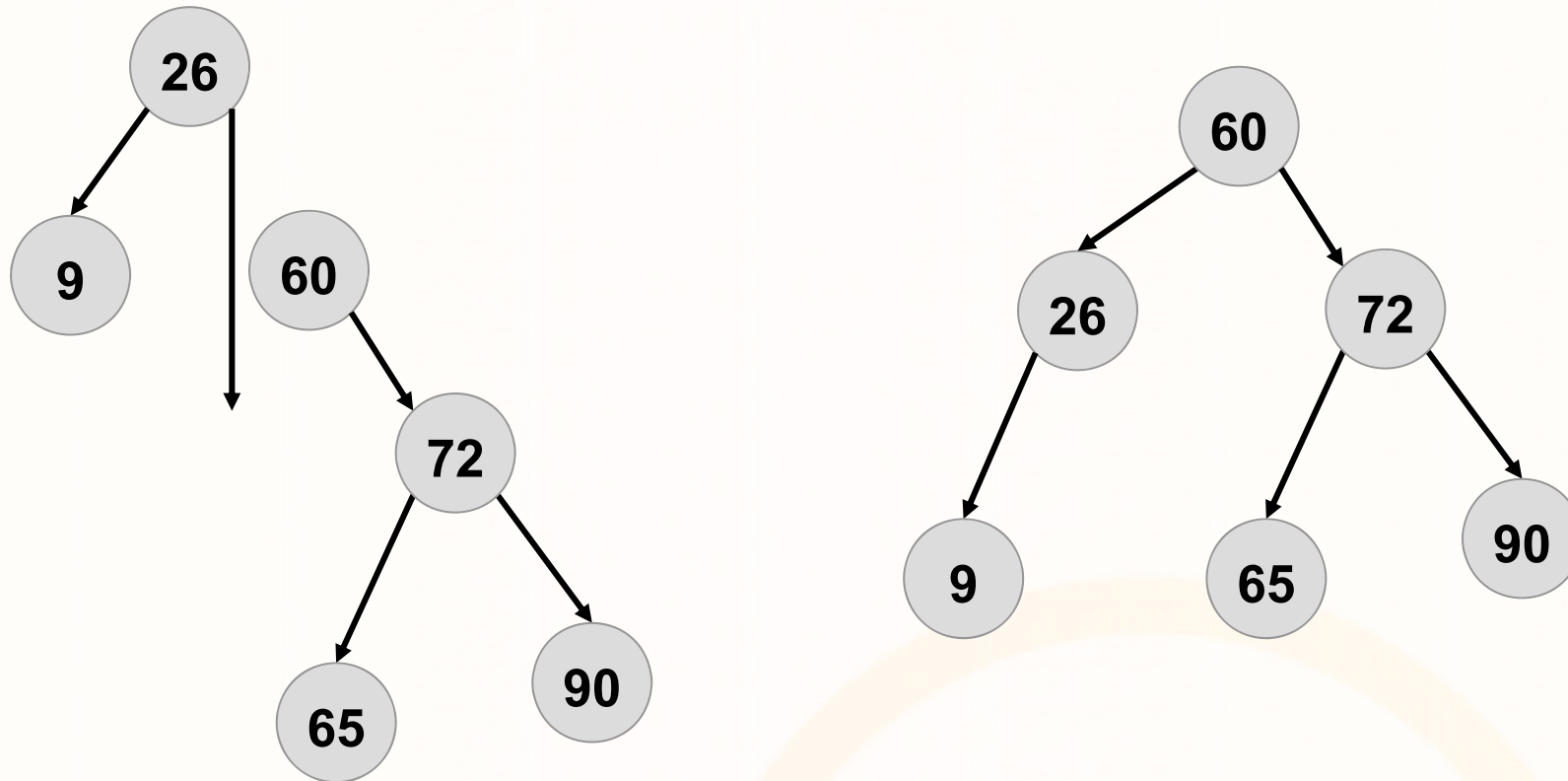
# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 65;



# AVL Δέντρα

Τι περιστροφή πρέπει να γίνει όταν εισαχθεί το 65;

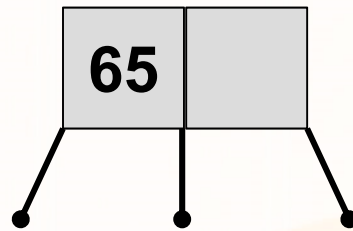


## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο

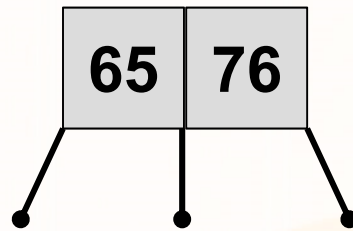
## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 65**



## 2-3 Δέντρα

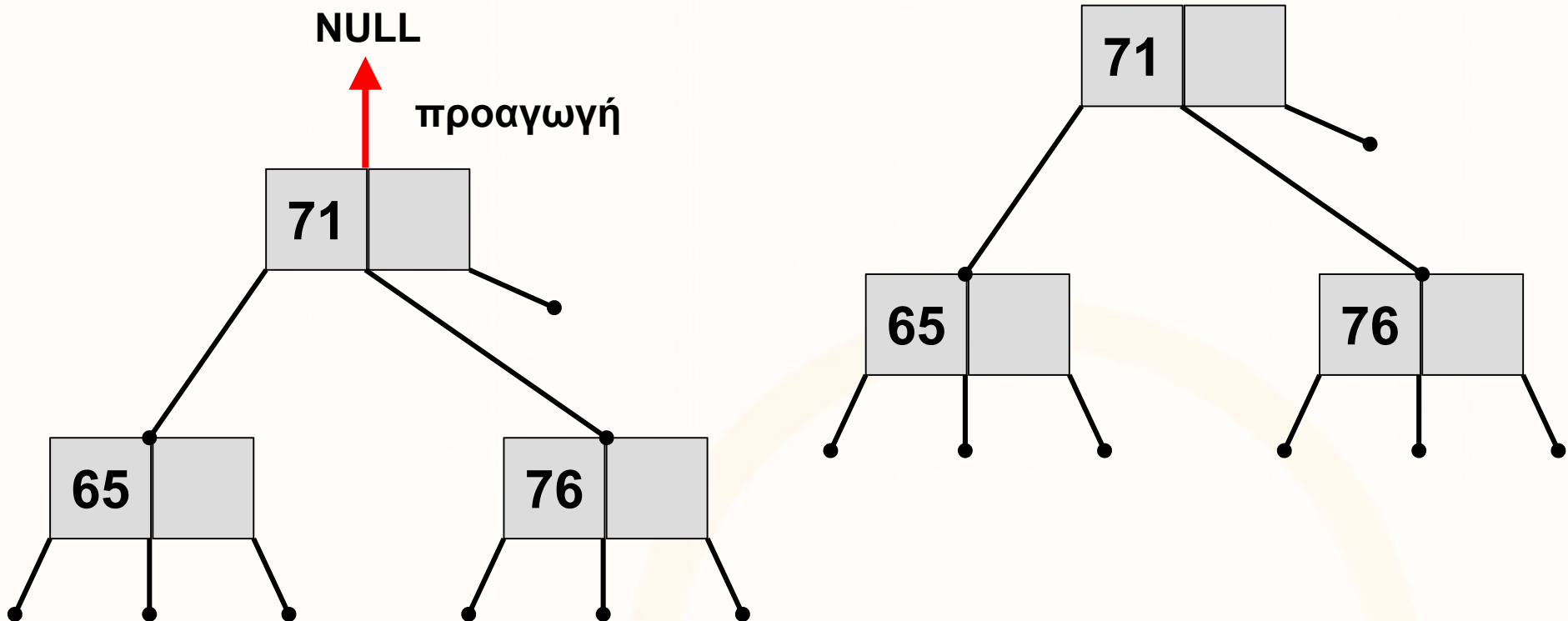
- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 76**





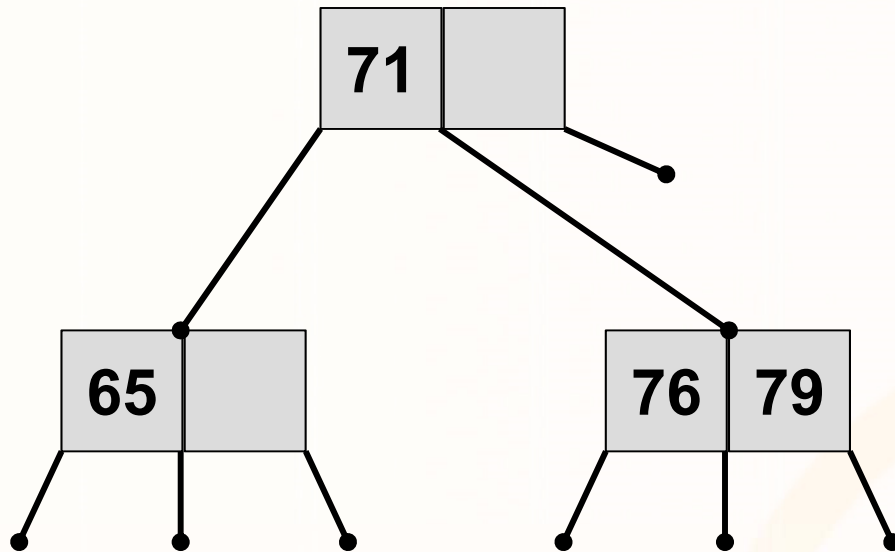
## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 71**



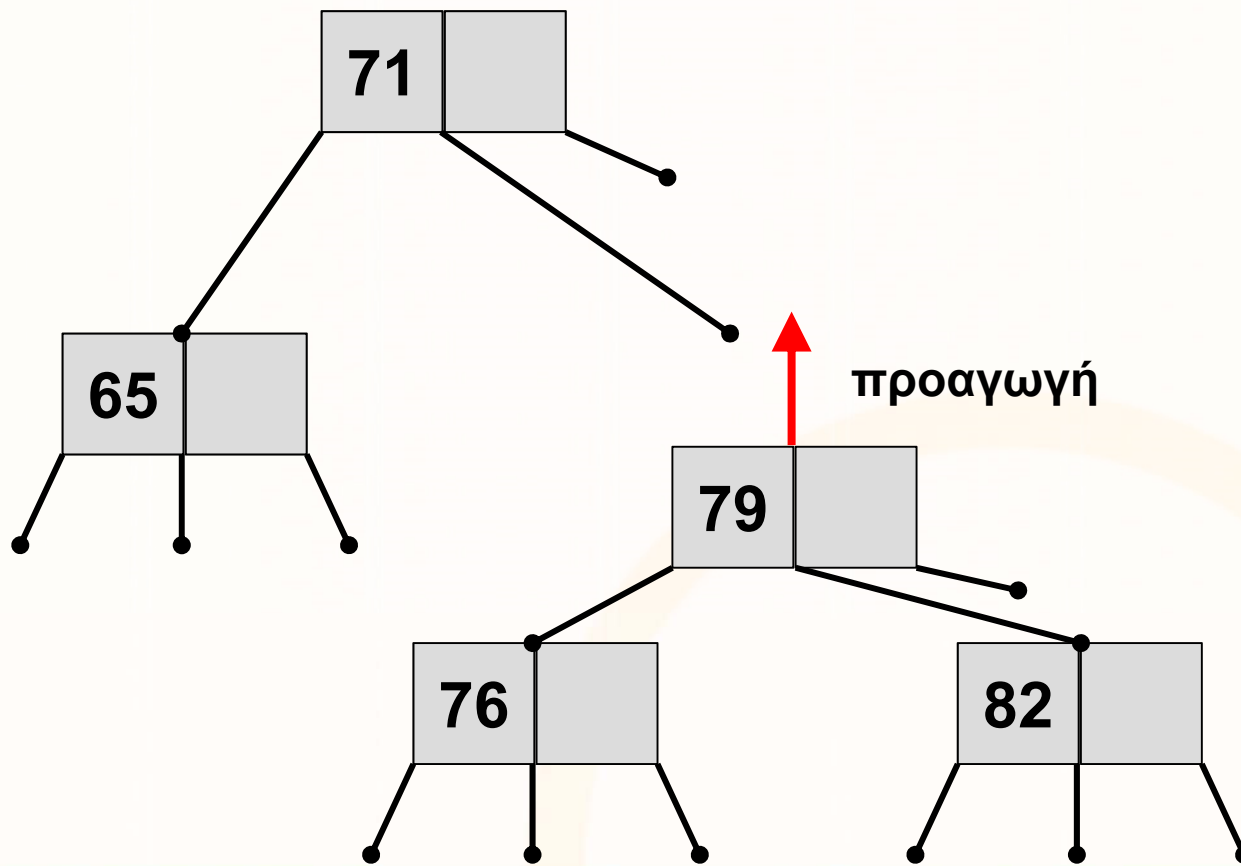
## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 79**



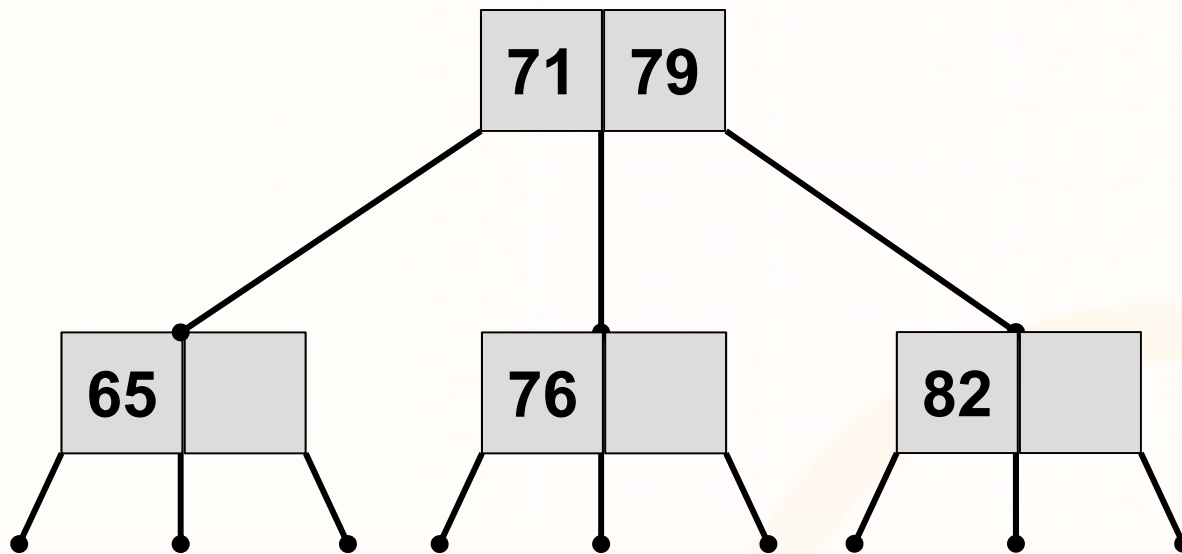
## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 82**



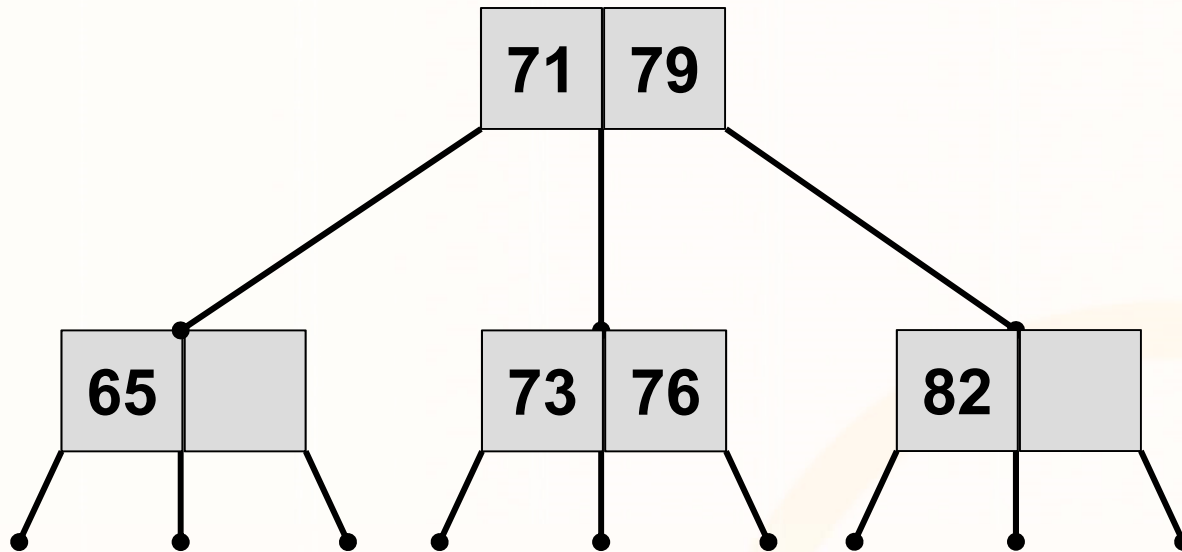
## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 82**



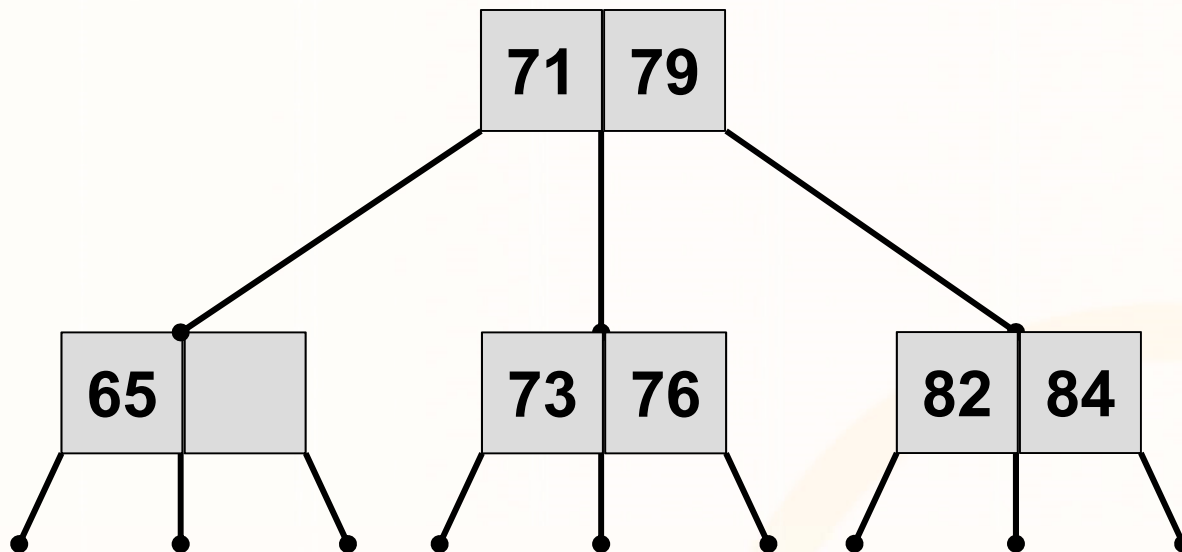
## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 73**



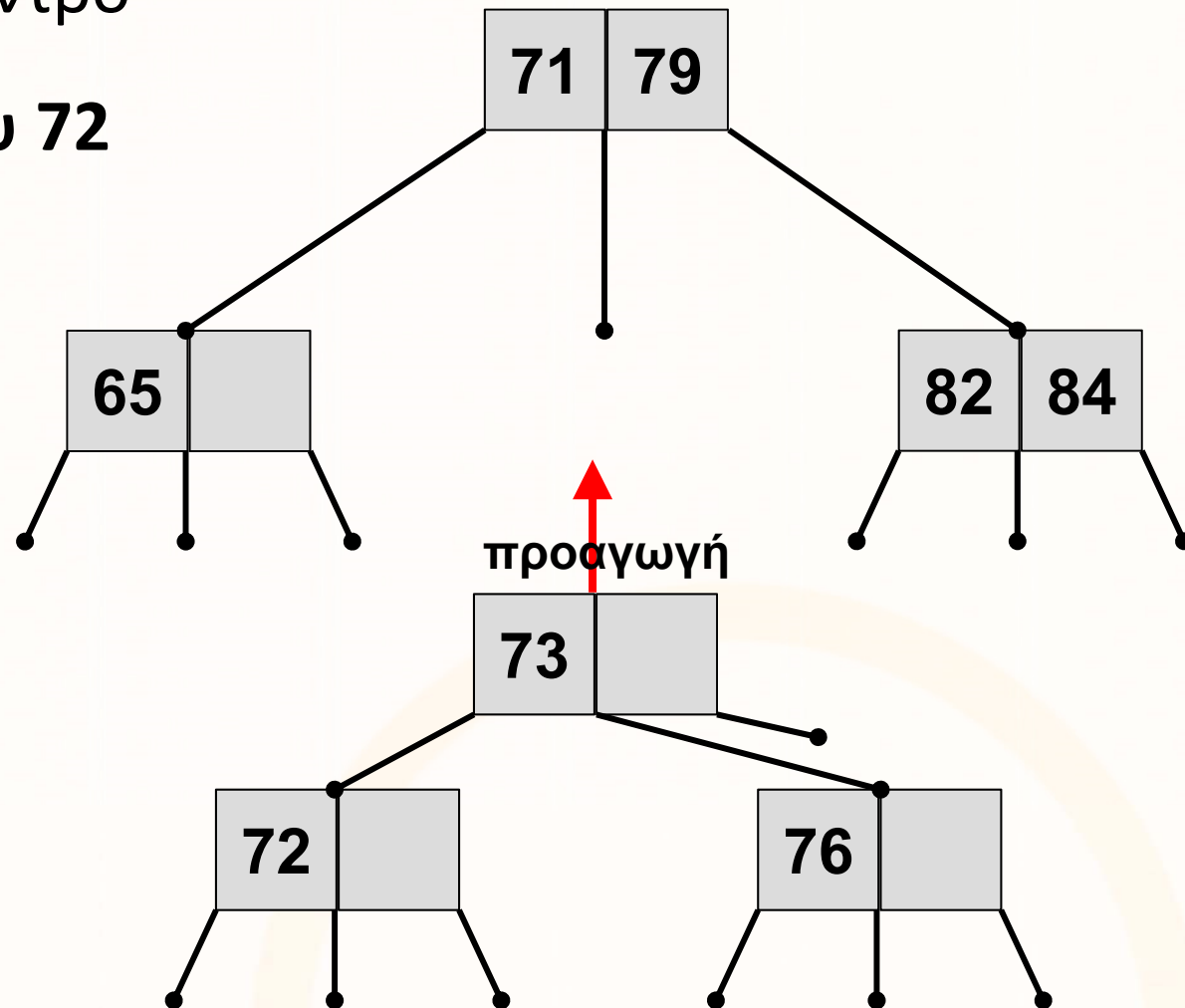
## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 84**



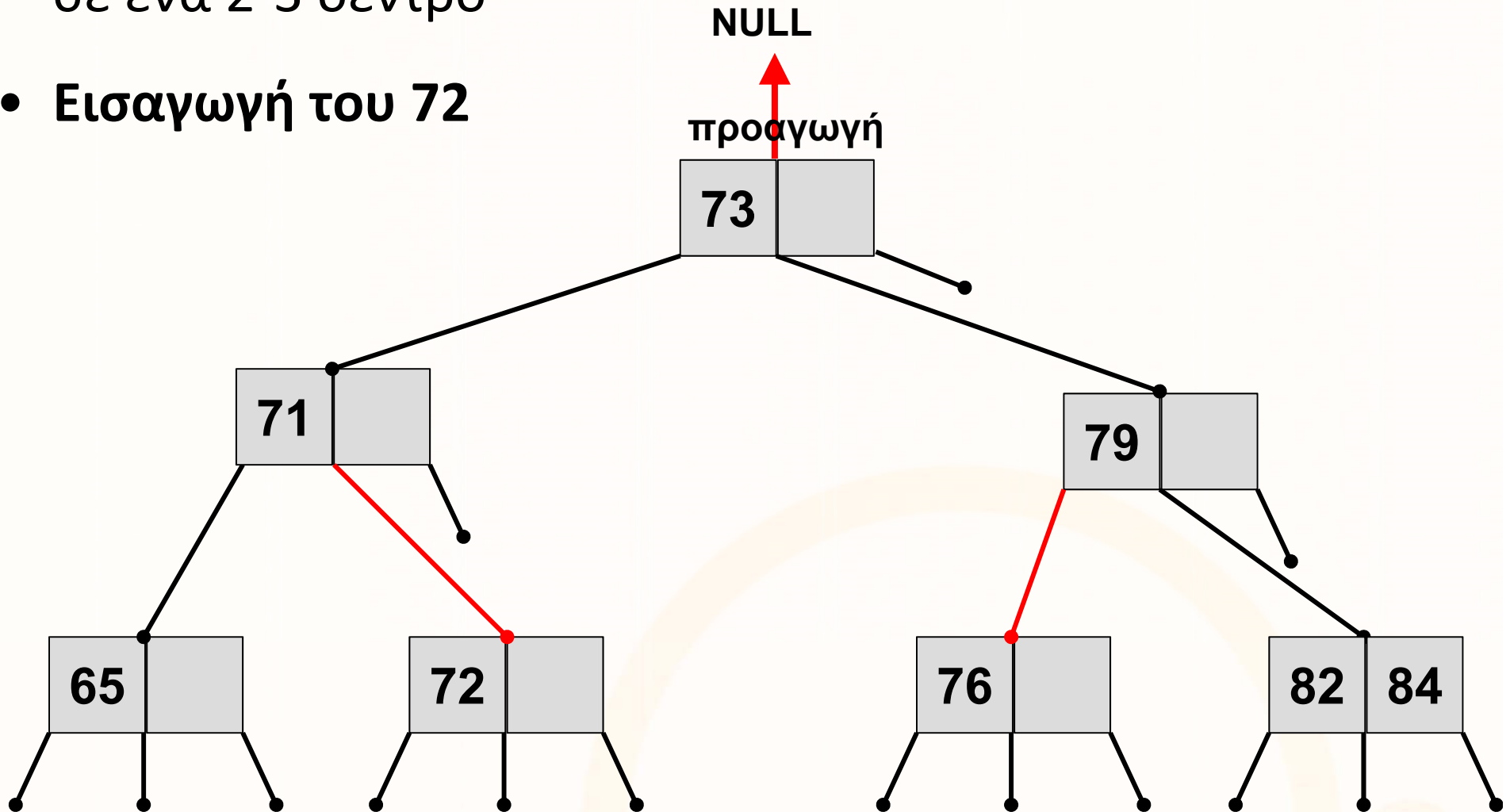
## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 72**



## 2-3 Δέντρα

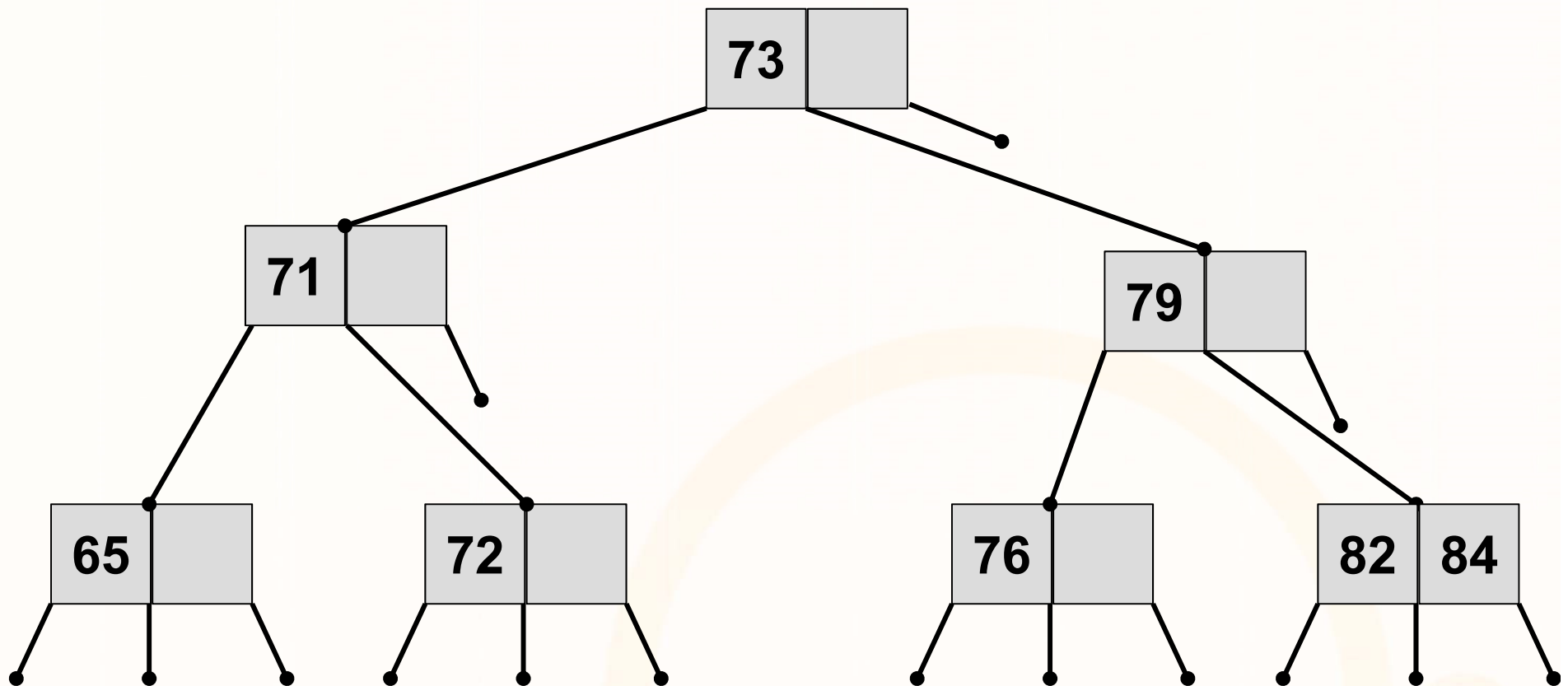
- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 72**





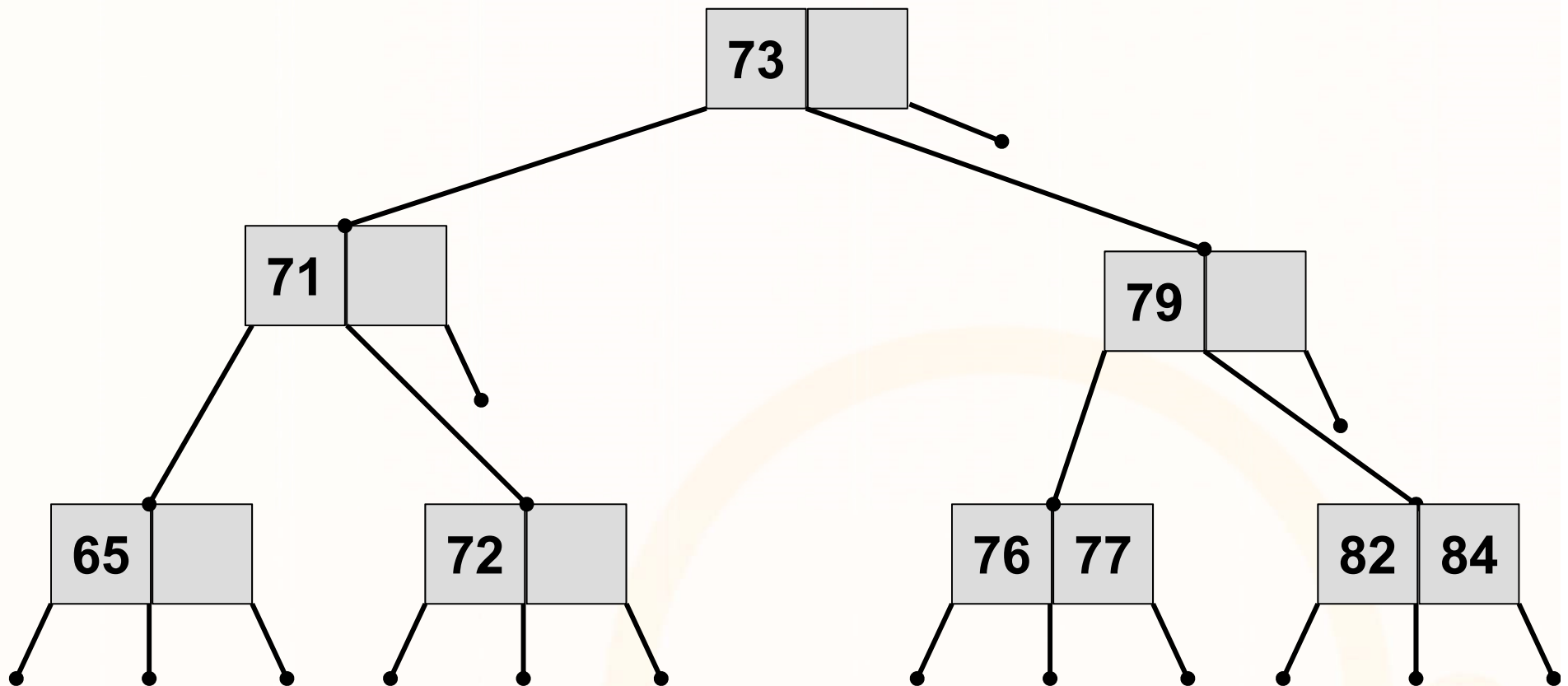
## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 72**



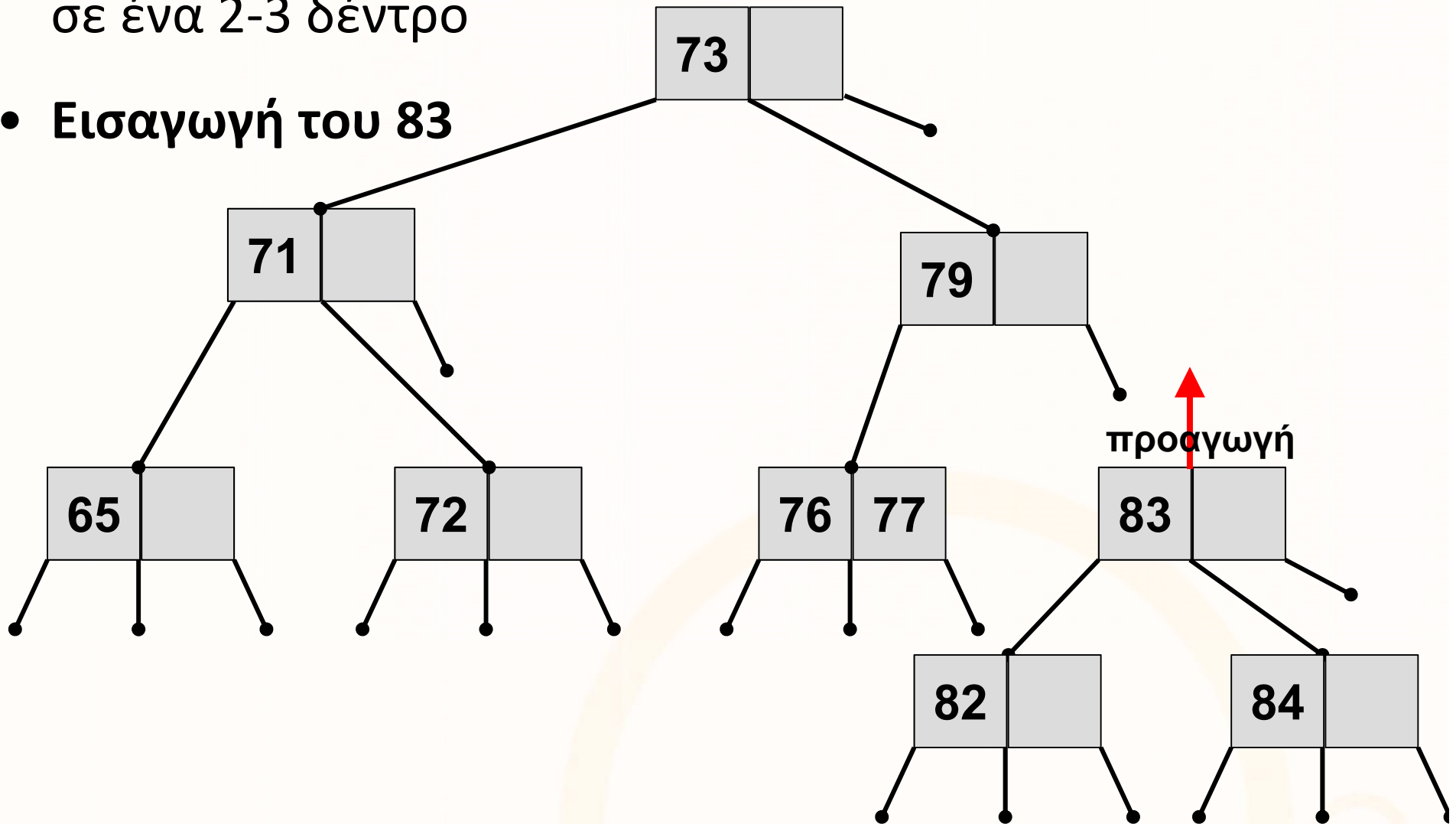
## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 77**



## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 83**



## 2-3 Δέντρα

- Εισάγετε τα στοιχεία 65, 76, 71, 79, 82, 73, 84, 72, 77, 83 σε ένα 2-3 δέντρο
- **Εισαγωγή του 83**

