Διάλεξη 09: Αλγόριθμοι Ταξινόμησης Ι

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

- Οι αλγόριθμοι ταξινόμησης:

  Α. SelectionSort – Ταξινόμηση με Επιλογή

  Β. InsertionSort – Ταξινόμηση με Εισαγωγή

  Γ. MergeSort – Ταξινόμηση με Συγχώνευση

Διδάσκων: Παναγιώτης Ανδρέου

Αλγόριθμοι ταξινόμησης

Δοθέντων μιας **συνάρτησης f (ordering function)** και ενός **συνόλου στοιχείων**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

η ταξινόμηση συνίσταται στη **μετάθεση** των στοιχείων ώστε να μπουν σε μια σειρά

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}$$

η οποία να ικανοποιεί

$$f(x_{k_1}) \leq f(x_{k_2}) \leq \ldots \leq f(x_{k_n})$$ **αύξουσα σειρά**

ή

$$f(x_{k_1}) \geq f(x_{k_2}) \geq \ldots \geq f(x_{k_n})$$ **φθίνουσα σειρά**

- Ταξινόμηση Ονομάτων: f("Maria") < f("Michalis"), δηλαδή η συνάρτηση f συγκρίνει τις δυο λέξεις αλφαριθμητικά.

Θα εξετάσουμε αλγόριθμους ταξινόμησης με κύριο γνώμονα την αποδοτικότητά τους (χρόνος εκτέλεσης, χρήση μνήμης).

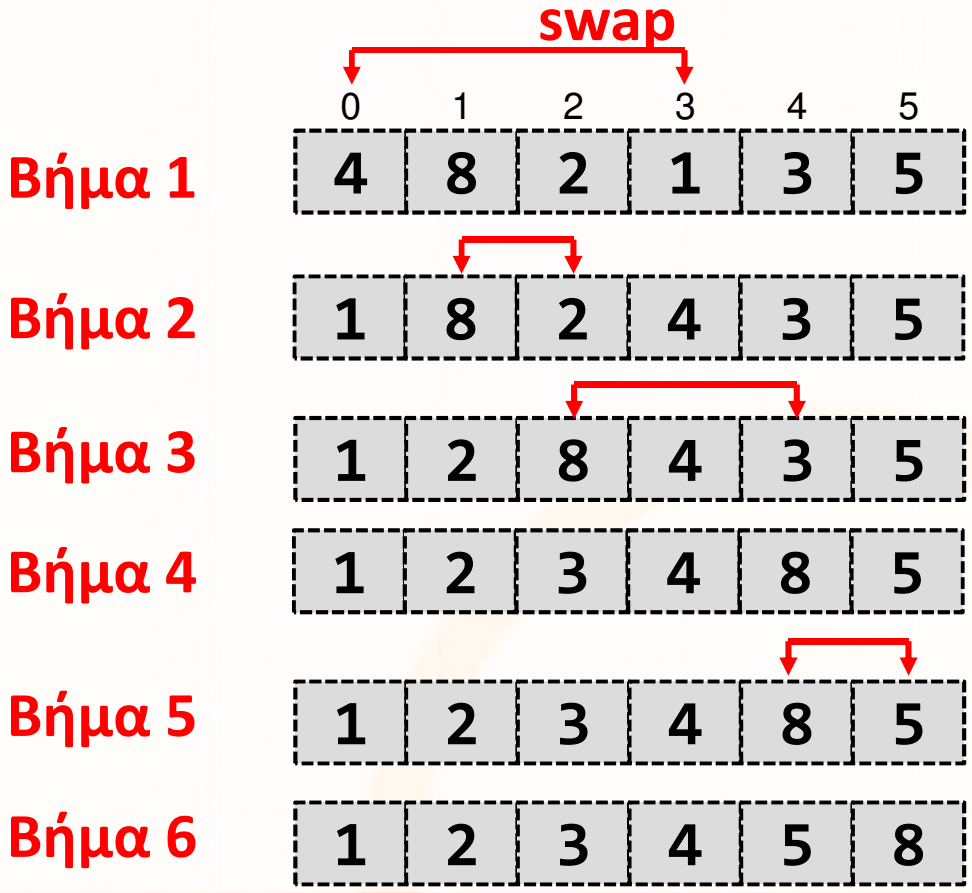
Α. Ταξινόμηση με Επιλογή - Selection Sort

- Η Ταξινόμηση με Επιλογή (Selection Sort) βασίζεται στα ακόλουθα τρία βήματα:
  1. επιλογή του ελάχιστου στοιχείου
  2. ανταλλαγή με το i-οστό στοιχείο (i είναι μια μεταβλητή που αυξάνεται κατά ένα).
  3. επανάληψη των βημάτων 1 και 2 για τα υπόλοιπα στοιχεία.
- Το ελάχιστο μεταξύ i στοιχείων μπορεί να βρεθεί με τη χρήση ενός while-loop, σε χρόνο O(i).
- Άρα ο χρόνος εκτέλεσης του Selection Sort είναι:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = O(n^2)$$

Ταξινόμηση με επιλογή: SelectionSort

- SelectionSort: ο αλγόριθμος αυτός ταξινομεί μία λίστα με στοιχεία. Σε κάθε βήμα i βρίσκει το i-οστό πιο μικρό στοιχείο και το τοποθετεί στην θέση i.
- Παράδειγμα: `int x = {4, 8, 2, 1, 3, 5};`



Ταξινόμηση με επιλογή: SelectionSort (συν.)

Πρότυπο Συνάρτησης

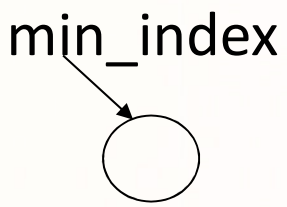
```
void selectionSort(int x[],     //ο πίνακας
                   int length)  //το μέγεθος του x
```

Αλγόριθμος

- Αρχικοποίησε μία μεταβλητή min_index η οποία θα αποθηκεύει τη θέση του ελάχιστου αριθμού
- Με ένα βρόγχο for που θα ελέγχει ένα ένα τα στοιχεία του πίνακα (i<length) κάνε τα εξής:
  - Θέσε σαν min_index το i
  - Ψάξε ένα-ένα τα στοιχεία με ένα δεύτερο εσωτερικό βρόγχο αρχίζοντας από j=i
    - Αν το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση j είναι μικρότερο από το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση min_index τότε θέσε min_index = j
  - Με την έξοδο από το βρόγχο, αντάλλαξε τα στοιχεία που βρίσκονται στη θέση i με το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση min_index

SelectionSort: Παράδειγμα Εκτέλεσης

Θέση	0	1	2	3	4	5
Αρχικός Πίνακας	*34*	*8*	*64*	*51*	*32*	*33*
Με i=0	8	34	64	51	32	33
Με i=1	8	32	64	51	34	33
Με i=2	8	32	33	51	34	64
Με i=3	8	32	33	34	51	64
Με i=4	8	32	33	34	51	64



Στοιχείο που θα εισαχθεί στην θέση i

SelectionSort: Υλοποίηση

```
void SelectionSort(int A[]) {
  int n = A.length;
  int min_index;
  int tmp;
  for(int i=0; i<n-1; i++){
    min_index = i;

    for(int j=i+1; j<n; j++){
      if(A[j]<A[min_index])
        min_index=j;
    }

    tmp = A[i];
    A[i] = A[min_index];
    A[min_index]=tmp;
  }
}
```

Αρχικοποίηση θέσης μικρότερου στοιχείου

Βρες το μικρότερο στοιχείο

Αντάλλαξε το μικρότερο στοιχείο με το τρέχον στοιχείο στη θέση [i]

SelectionSort: Ανάλυση Χρόνου Εκτέλεσης

```
void SelectionSort(){
    …
    for (i=0; i<n-1; i++){
        for (j=i+1; j<n; j++){
            sum++;
        }
    }
}
```

Εσωτερικός Βρόγχος

Εξωτερικός Βρόγχος

- **Εσωτερικός Βρόγχος:** $IL = \sum_{j=i+1}^{n} 1 = n - (i+1) + 1 = n - i$

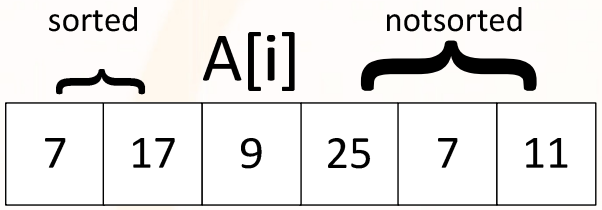
- **Εξωτερικός Βρόγχος:** $OL = \sum_{i=0}^{n-1} IL = \sum_{i=0}^{n} (n - i)$

$$= n\sum_{i=0}^{n} 1 - \sum_{i=0}^{n} i = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$$

Β. Ταξινόμηση με Εισαγωγή - Insertion Sort

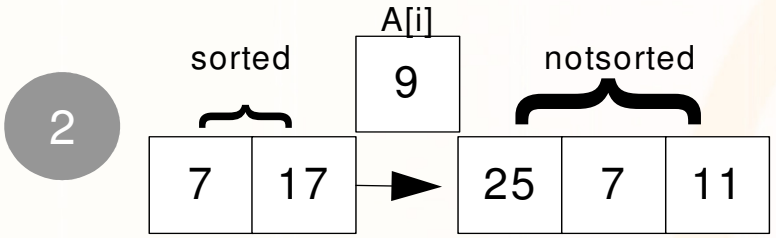
- Η ***Ταξινόμηση με Εισαγωγή*** **(InsertionSort)** εισάγει ένα-ένα τα στοιχεία του συνόλου που εξετάζεται, στη σωστή τους θέση.

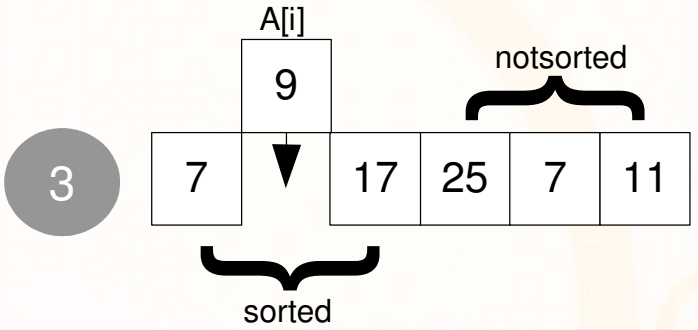
- Στη φάση *i*:
  1. υποθέτουμε πως ο πίνακας *A*[0..(*i*-1)] είναι ταξινομημένος,
  2. εισάγουμε το στοιχείο *A*[*i*] στην ακολουθία *A*[0..(i-1)] στη σωστή θέση. Αυτό επιτυγχάνεται μετακινώντας όλα τα στοιχεία που είναι μεγαλύτερα του *A*[*i*] μια θέση δεξιά.



Β. Ταξινόμηση με Εισαγωγή - Insertion Sort (συν.)

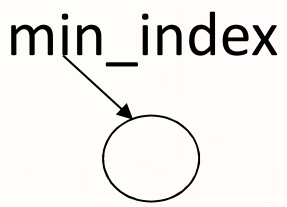
- Στη φάση *i*:
  1. υποθέτουμε πως ο πίνακας *A*[0..(*i*-1)] είναι ταξινομημένος,
  2. εισάγουμε το στοιχείο *A*[*i*] στην ακολουθία *A*[0..(i-1)] στη σωστή θέση. Αυτό επιτυγχάνεται μετακινώντας όλα τα στοιχεία που είναι μεγαλύτερα του *A*[*i*] μια θέση δεξιά.





InsertionSort: Παράδειγμα Εκτέλεσης

Θέση	0	1	2	3	4	5
Αρχικός Πίνακας	*34*	*8*	*64*	*51*	*32*	*21*
Με i=1	**8**	**34**	64	51	32	21
Με i=2	**8**	**34**	**64**	51	32	21
Με i=3	**8**	**34**	**51**	**64**	32	21
Με i=4	**8**	**32**	**34**	**51**	**64**	21
Με i=5	**8**	**21**	**32**	**34**	**51**	**64**



Στοιχείο που θα εισαχθεί στην θέση i

InsertionSort: Υλοποίηση

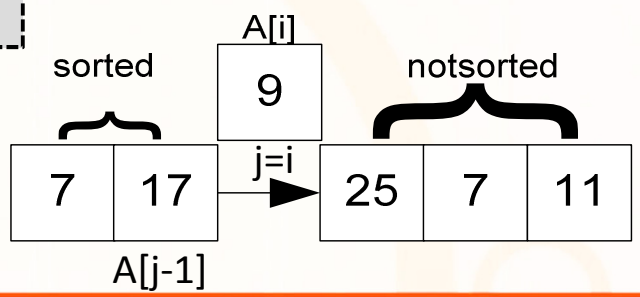
```
void InsertionSort(int A[]){
  int n = x.length;
  int index, i, j;
  for (i=1; i < n; i++) {
    index = A[i];

    for (j=i; j>0; j--){


      if (A[j-1] <= index) { break; }
      A[j] = A[j-1];
    }

     A[j] = index;
  }
}
```

Τρέχον στοιχείο εισαγωγής

μετακίνηση στοιχείων προς δεξιά

θέλουμε να μετακινήσουμε μόνο τα A[j-1] > index

τοποθέτηση στοιχείου



index=9

Insertion Sort: Παράδειγμα Εκτέλεσης 2

BEFORE:[8,4,8,43,3,5,2,] (Το κόκκινο δείχνει τα ταξινομημένα στοιχεία)

i:1(index:4) >8 (“>” Δείχνει τις μετακινήσεις)
[4,8,8,43,3,5,2,] (Νέος Πίνακας)

i:2(index:8) (Τίποτα δεν μετακινείται)
[4,8,8,43,3,5,2,]

i:3(index:43) (Τίποτα δεν μετακινείται)
[4,8,8,43,3,5,2,]

i:4(index:3) >43>8>8>4
[3,4,8,8,43,5,2,]

i:5(index:5) >43>8>8
[3,4,5,8,8,43,2,]

i:6(index:2) >43>8>8>5>4>3
[2,3,4,5,8,8,43,]

AFTER:[2,3,4,5,8,8,43,]

InsertionSort: Ανάλυση Χρόνου Εκτέλεσης

```
void InsertionSort(){
    …
    for (i=1; i<n; i++){
        for (j=i; j>0; j--){
            sum++;
        }
    }
}
```

Εσωτερικός Βρόγχος

Εξωτερικός Βρόγχος

- **Εσωτερικός Βρόγχος:** $IL = \sum_{j=0}^{i} 1 = i$
- **Εξωτερικός Βρόγχος:** $OL = \sum_{i=1}^{n} IL = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\in \Theta(n^2)$$

Σύγκριση InsertionSort και SelectionSort

- Υπάρχουν δυο κριτήρια: **Βήματα** (μέχρι να βρω ένα στοιχείο) και **Μετακινήσεις (**όταν το βρω, πόσα swap κάνω) .
- Ο αλγόριθμος **Selection sort** απαιτεί πάντα **$O(n^2)$ βήματα** (δεν είναι δυνατή η γρήγορη έξοδος από τους βρόχους), έτσι η βέλτιστη περίπτωση είναι η ίδια με τη χείριστη περίπτωση.
- Στον αλγόριθμο **Insertion Sort**, είναι δυνατό να βγούμε από το δεύτερο βρόχο γρήγορα. Στη βέλτιστη περίπτωση (ο πίνακας είναι ήδη ταξινομημένος), ο χρόνος εκτέλεσης είναι της τάξης **$\Omega(n)$ βήματα**.
- Παρά τούτου, το **Selection Sort** είναι πιο αποδοτικός αν κρίνουμε τους αλγόριθμους με βάση τον αριθμό των **μετακινήσεων (swaps**) που απαιτούν:
  - το **selection sort απαιτεί $O(n)$** μετακινήσεις,
  - το **insertion sort, απαιτεί $O(n^2)$** μετακινήσεις (στη χείριστη περίπτωση όπου ο αρχικός πίνακας είναι ταξινομημένος σε φθίνουσα σειρά).

Γ. Ταξινόμηση με Συγχώνευση (Merge sort)

- Η ***ταξινόμηση με συγχώνευση*** είναι διαδικασία ***διαίρει και βασίλευε*** (**Divide and Conquer:** αναδρομική διαδικασία όπου το πρόβλημα μοιράζεται σε μέρη τα οποία λύνονται ξεχωριστά, και μετά οι λύσεις συνδυάζονται.)

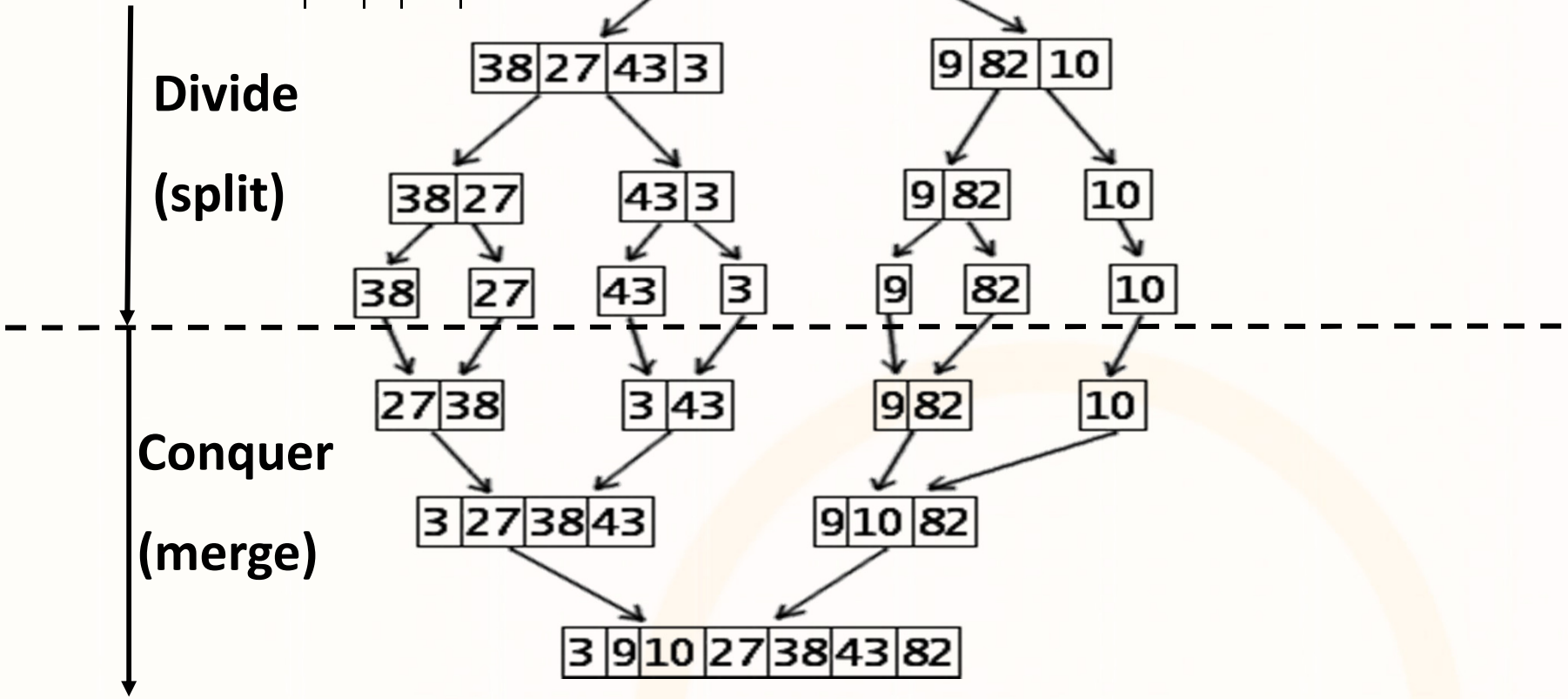
- Περιγραφή του Mergesort
  1. **Διαίρεση:** Αναδρομικά μοιράζουμε τον πίνακα στα δύο μέχρι να φτάσουμε σε πίνακες μεγέθους ένα **(DIVIDE)**
  2. **Συγχώνευση:** Ταξινομούμε αναδρομικά τους πίνακες αυτούς με την συγχώνευση γειτονικών πινάκων (χρησιμοποιώντας βοηθητικό πίνακα). **(CONQUER)**

MergeSort: Βασική Ιδέα

(#στοιχείων αριστερά) $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = 4$

n=7

(#στοιχείων δεξιά) $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3$



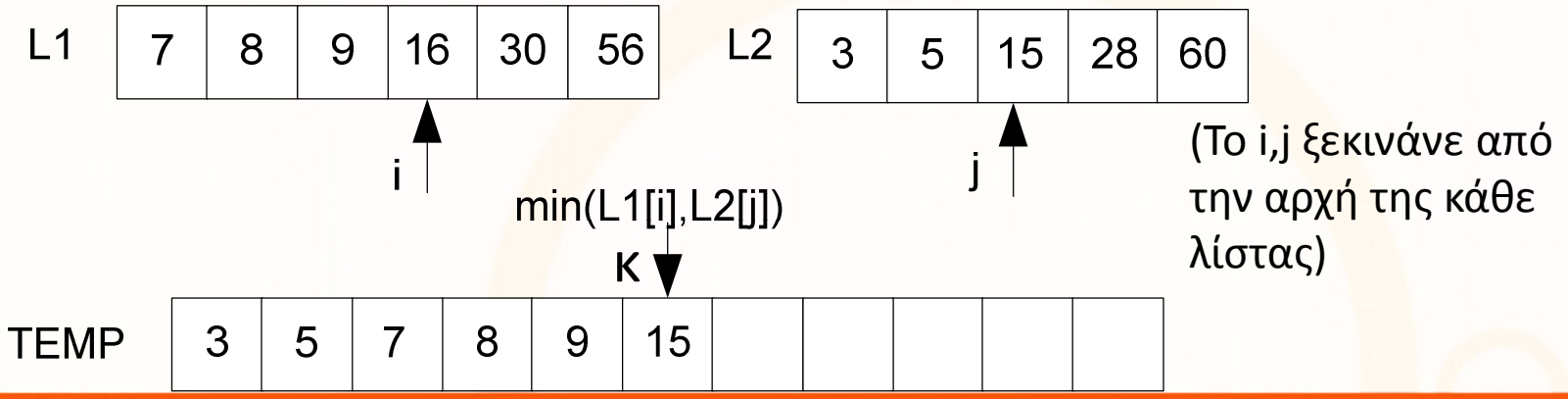
Συγχώνευση 2 Λιστών

Υποθέστε ότι θέλετε να συγχωνεύσετε 2 ταξινομημένες λίστες L1, L2 και να δημιουργήσετε μια νέα ταξινομημένη λίστα TEMP

Διαδικασία

1. Τοποθέτησε τους δείκτες i, j στην κεφαλή κάθε λίστας.
2. Διάλεξε το μικρότερο από την λίστα L1 και L2 και τοποθέτησε τον στον πίνακα TEMP στην θέση κ
3. Προχώρησε τον δείκτη i (αν το μικρότερο στοιχείο ήταν από την λίστα L1) ή τον δείκτη j στην αντίθετη περίπτωση.
4. Επανέλαβε τα βήματα 2-4 μέχρι να εισαχθούν όλα τα στοιχεία στον TEMP

Μέτα από 6 εκτελέσεις:



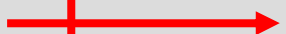
MergeSort: Υλοποίηση

```
void MergeSort(int A[], int temp[], int l, int r){

// η συνθήκη τερματισμού της ανάδρομης
if (l==r) return;
int mid = (l+r)/2;
// για ελαχιστοποίηση overflow(για μεγάλα l,r)
// int mid = l + ((r - l) / 2);

// μοιράζουμε αναδρομικά τον πίνακα
MergeSort(A, temp, l, mid);
MergeSort(A, temp, mid+1, r);

// συνεχίζεται
```

DIVIDE

MergeSort: Πρόγραμμα στην C (συν.)

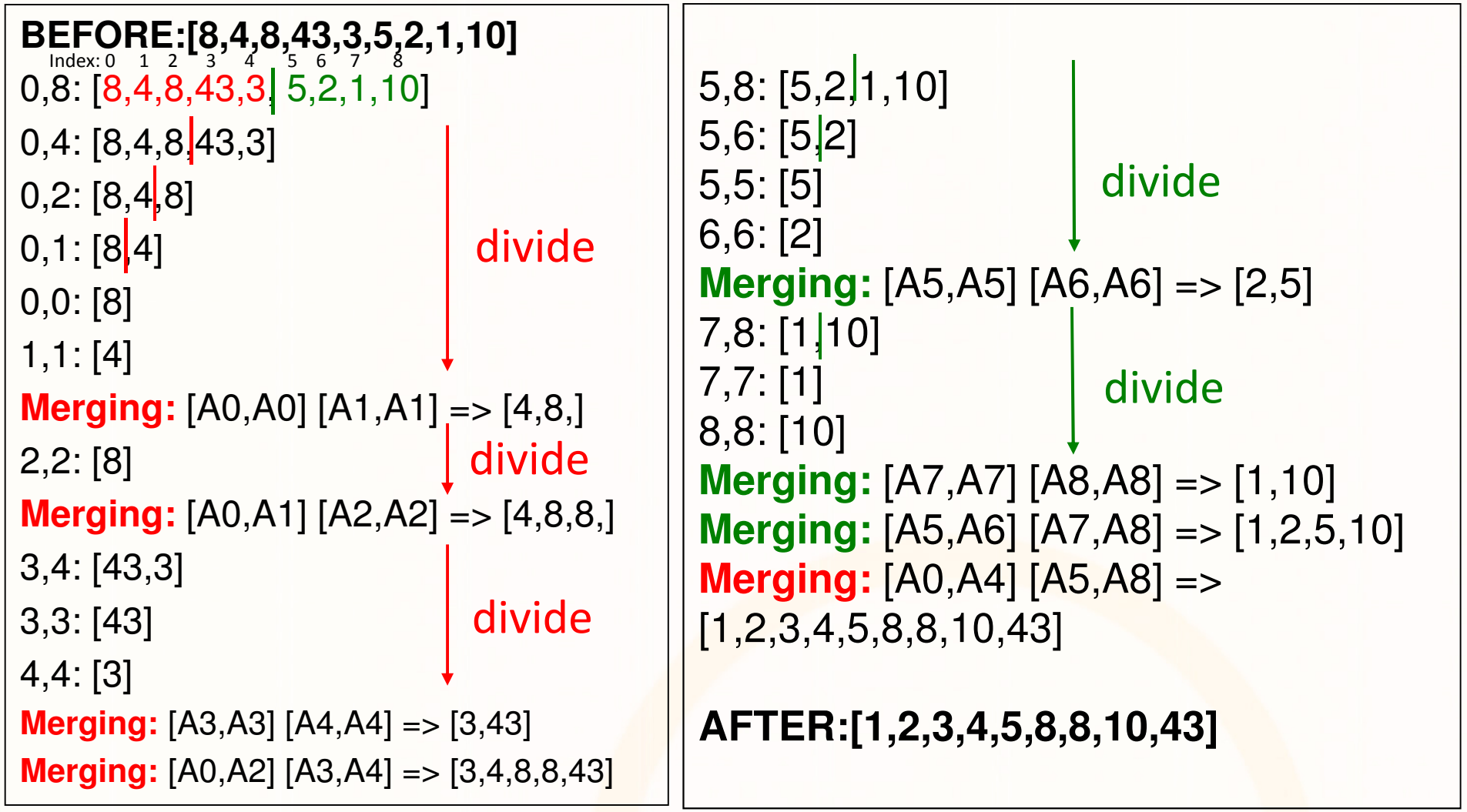
```
  // Τώρα οι πίνακες [l..mid] και [mid+1..r] είναι
  // ταξινομημένοι ➔ Η διαδικασία συγχώνευσης
  int k=l, i=l, j=mid+1;

  // συγχώνευση στον temp μέχρι μια από
  // τις λίστες αδειάσει
  while ((i<=mid) && (j<=r)) {
    if (A[i]<A[j]){
      temp[k] = A[i]; i++;
    }
    else {
      temp[k] = A[j]; j++;
    }
    k++;
  }
// συνεχίζεται
```



MergeSort: Πρόγραμμα στην C (συν.)

```
  // copy όλων των υπόλοιπων στοιχείων λίστας L1
  while (i<=mid) {
    temp[k] = A[i];
    k++;i++;
  }
  // copy όλων των υπόλοιπων στοιχείων λίστας L2
  while (j<=r) {
    temp[k] = A[j];
    k++;j++;
  }
  // αντιγραφή όλων των στοιχείων από TEMP -> A
  for (i=l; i<=r; i++) {
    A[i] = temp[i];
  }
}
```

Παράδειγμα Εκτέλεσης Merge Sort



MergeSort: Ανάλυση Χρ. Εκτέλ. - Αναδρομή

- Το πρόβλημα μοιράζει αναδρομικά σε δυο μέρη την λίστα που θέλουμε να ταξινομήσουμε.

- Όταν φτάσουμε στην λίστα που έχει μέγεθος 1 τότε σταματά η αναδρομή και το πρόγραμμα αρχίζει να συνδυάζει (merge) τις επιμέρους λίστες.

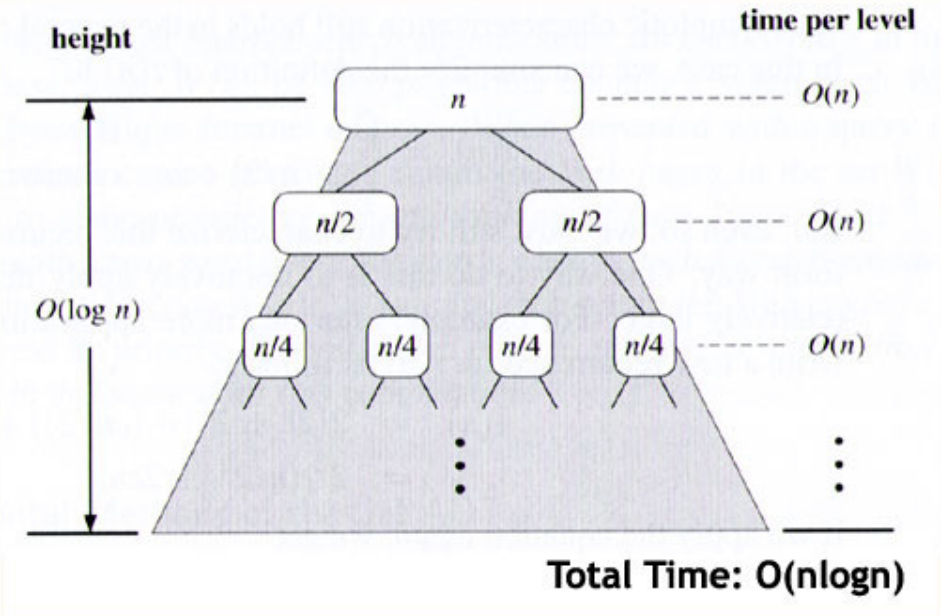
- Παρατηρούμε ότι πάνω σε μια λίστα μεγέθους N η αναδρομή εκτελείται **$2\log_2 n$** φορές. Δηλαδή ο πίνακας μοιράζεται ως εξής: **n, n/2, n/4, …, 2, 1**

```
void MergeSort(int A[], int temp[], int l, int r){
  if (l==r) return;
  int mid = (l+r)/2;

  MergeSort(A, temp, l, mid);
  MergeSort(A, temp, mid+1, r);
```

$\Theta(\log n)$

MergeSort: Ανάλυση Χρ. Εκτέλ. - Συγχώνευση

- **Σε κάθε επίπεδο της ανάδρομης περνάμε μια φορά από το κάθε στοιχείο.**
- Επομένως η συγχώνευση των στοιχείων σε κάθε επίπεδο της εκτέλεσης χρειάζεται **γραμμικό** χρόνο **Θ(n).**
- Σημειώστε ότι η διαδικασία απαιτεί τη χρήση βοηθητικού πίνακα.
- Μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον ίδιο βοηθητικό πίνακα temp για όλες τις (αναδρομικές) κλήσεις του MergeSort.



MergeSort: Ανάλυση Χρ. Εκτέλ. - Συνολικός

- Η αντιγραφή και η συγχώνευση παίρνουν χρόνο Θ(n) και η αναδρομή παίρνει χρόνο Θ(log n). Συνολικά **Θ(n log n).**
- Ο χρόνος εκτέλεσης εκφράζεται και από την αναδρομική εξίσωση

$$T(0) = T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$$

- … η οποία μπορεί να λυθεί με το Master Theorem ή με την μέθοδο της αντικατάστασης**.**

- **Πλεονέκτημα MergeSort:**

  Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης είναι **Θ(n log n)**

  (σε αντίθεση με το SelectionSort ($\Theta(n^2)$) και το InsertionSort ($O(n^2)$)

- **Μειονέκτημα**:

  Απαιτεί τη χρήση βοηθητικού πίνακα (δηλαδή χρειάζεται διπλάσιο χώρο αποθήκευσης για την εκτέλεση του). Αυτό δεν καθιστά την μέθοδο πολύ εύχρηστη.