

## Διάλεξη 4: Εκλογή Προέδρου σε Δακτύλιους

ΕΠΛ 432: Κατανεμημένοι Αλγόριθμοι

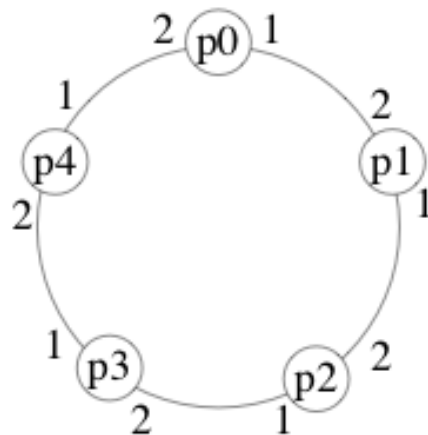


# Τι θα δούμε σήμερα

- Δακτύλιοι
- Το πρόβλημα της Εκλογής Προέδρου
- Εκλογή Προέδρου σε Ανώνυμους Δακτύλιους
- Ασύγχρονος Αλγόριθμος με  $O(n^2)$  μηνύματα
- Ασύγχρονος Αλγόριθμος με  $O(n \log n)$  μηνύματα

# Δακτύλιοι

- **Δακτύλιος: Δομή** στα συστήματα ανταλλαγής μηνυμάτων όπου ο κάθε επεξεργαστής είναι συνδεδεμένος με δύο άλλους επεξεργαστές, **τον δεξί και τον αριστερό**.
- **Προσανατολισμένος Δακτύλιος:** Διαθέτει συνέπεια στον τρόπο καθορισμού της αριστερής και δεξιάς πλευράς των επεξεργαστών.



**1 - αριστερά**  
**2 - δεξιά**

- Παράδειγμα: Αν όλοι οι επεξεργαστές προωθούν μηνύματα στο κανάλι 1, τότε θα κάνουν κύκλους επ' άπειρον στο δακτύλιο.

# Γιατί Δακτύλιους

- Σχετική **ευκολία ανάλυσης** αλγορίθμων σε δακτύλιους
- **Αφαιρετικότητα** του δακτυλίου με κουπόνια
- Κάτω φράγματα για την τοπολογία του δακτυλίου συνήθως συνεπάγονται **κάτω φράγματα για αυθαίρετες τοπολογίες**

# Πρόβλημα Εκλογής Προέδρου

- Κάθε επεξεργαστής έχει:
  - Ένα σύνολο από καταστάσεις *προεδρίας*
  - Ένα σύνολο από καταστάσεις *μη-προεδρίας*
- Η απόφαση κάθε επεξεργαστή είναι *μη-αντιστρέψιμη*
  - Αν μπει σε κατάσταση προεδρίας μένει στην κατάσταση προεδρίας
  - Αν μπει σε κατάσταση μη-προεδρίας μένει στην κατάσταση μη-προεδρίας
- Σε κάθε νόμιμη εκτέλεση:
  - *Συνθήκη Ασφαλείας*: Ακριβώς ένας επεξεργαστής (ο πρόεδρος) μπαίνει σε κατάσταση προεδρίας.
  - *Συνθήκη Ζωτικότητας*: Κάθε επεξεργαστής μπαίνει κάποτε σε κατάσταση προεδρίας ή κατάσταση μη-προεδρίας.

# Χρήσεις Προέδρου

- Συντονισμό δραστηριοτήτων του συστήματος π.χ.:
  - Κατασκευή γεννητορικού δέντρου με τον πρόεδρο ως ρίζα
  - Ανακατασκευή ενός χαμένου κουπονιού σε ένα δακτύλιο με κουπόνια.

# Ομοιομορφία στους Ανώνυμους Αλγορίθμους

- **Ανωνυμία:** Οι επεξεργαστές δεν έχουν μοναδικές ταυτότητες
- **Ομοιόμορφος Αλγόριθμος:** δεν χρησιμοποιεί το μέγεθος του δακτυλίου
  - Ο ίδιος αλγόριθμος δουλεύει για κάθε μέγεθος δακτυλίου
  - Κάθε επεξεργαστής παριστάνεται από την ίδια μηχανή καταστάσεων σε κάθε δακτύλιο
- **Μη-Ομοιόμορφος Αλγόριθμος:** χρησιμοποιεί το μέγεθος του δακτύλιου
  - Διαφορετικός αλγόριθμος για κάθε μέγεθος δακτυλίου
  - Κάθε επεξεργαστής παριστάνεται από την ίδια μηχανή καταστάσεων η οποία όμως εξαρτάται από το μέγεθος του δακτυλίου.

# Εκλογή Προέδρου σε Ανώνυμους Δακτύλιους

**Θεώρημα:** Δεν υπάρχει αλγόριθμος εκλογής προέδρου σε ανώνυμους δακτύλιους, ακόμη κι αν ο αλγόριθμος είναι σύγχρονος και μη ομοιόμορφος.



# Εκλογή Προέδρου σε Ανώνυμους Δακτύλιους

- Απόδειξη (Επαγωγικά)
  - Κάθε επεξεργαστής βρίσκεται στην ίδια αρχική κατάσταση και έχει τα ίδια εξερχόμενα μηνύματα
  - Κάθε επεξεργαστής λαμβάνει τα ίδια μηνύματα, εκτελεί την ίδια μετάβαση κατάστασης και στέλνει τα ίδια μηνύματα στον γύρο 1.
  - Κάθε επεξεργαστής λαμβάνει τα ίδια μηνύματα, εκτελεί την ίδια μετάβαση κατάστασης και στέλνει τα ίδια μηνύματα στον γύρο 2.
  - Κ.ο.κ.
  - Αφού όλοι διατηρούν την ίδια κατάσταση τότε αν μπει κάποιος επεξεργαστής σε κατάσταση προεδρίας τότε όλοι θα βρίσκονται στην κατάσταση προεδρίας. Αντίφαση.

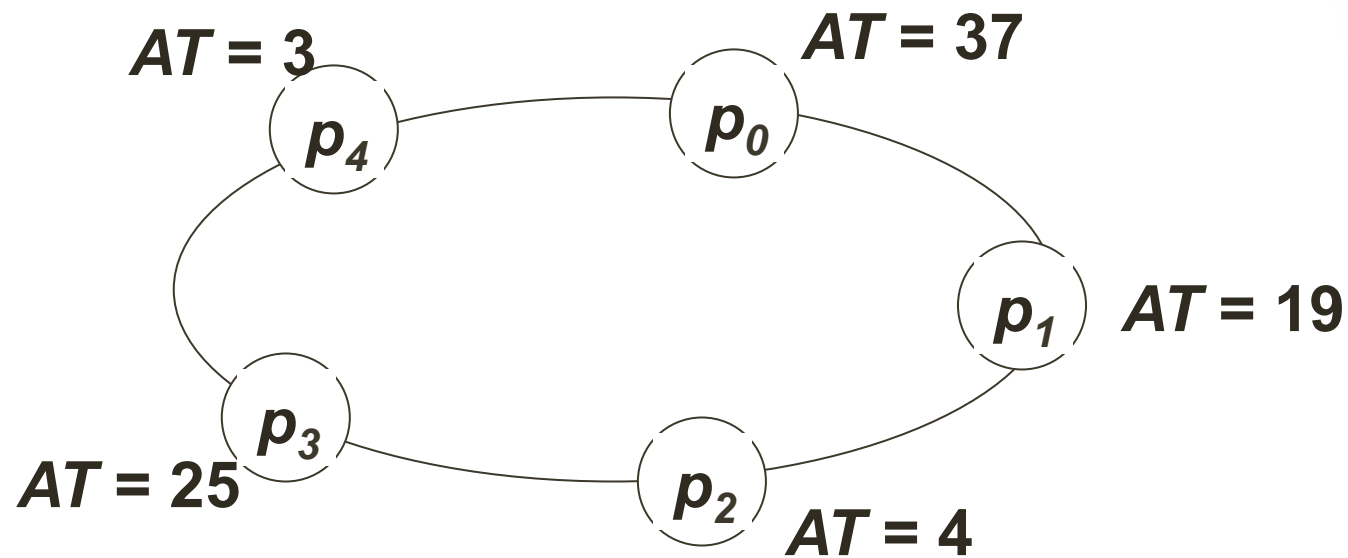
# Εκλογή Προέδρου σε Ανώνυμους Δακτύλιους

- Αν εκλεγούν όλοι πρόεδροι παραβιάζεται η **συνθήκη ασφαλείας**
- Αν δεν εκλεγεί κανένας παραβιάζεται η **συνθήκη ζωτικότητας**
- Άρα **δεν υπάρχει νόμιμη εκτέλεση** μη ομοιόμορφων και σύγχρονων αλγορίθμων εκλογής προέδρου **σε ανώνυμους δακτύλιους**
- Κατα συνέπεια **δεν υπάρχει ούτε ομοιόμορφος ή ασύγχρονος αλγόριθμος** εκλογής προέδρου **σε ανώνυμους δακτύλιους**.
  - Γιατί;

# Δακτύλιοι με Ταυτότητες

- Κάθε επεξεργαστής διαθέτει μια **μοναδική ταυτότητα**
- Μην συγχύζετε τους δείκτες με τις ταυτότητες
  - **Δείκτες:**  $0 \dots n-1$  **δεν είναι διαθέσιμοι στους επεξεργαστές** και χρησιμοποιούνται μόνο στην ανάλυση
  - **Ταυτότητες:** **αυθαίρετοι μη αρνητικοί αριθμοί διαθέσιμοι στους επεξεργαστές** μέσω μιας τοπικής μεταβλητής AT

# Παράδειγμα Δακτυλίου



# Ομοιομορφία στους Μη-Ανώνυμους Αλγορίθμους

- **Ομοιόμορφος Αλγόριθμος:** Υπάρχει μια μηχανή καταστάσεων για κάθε ταυτότητα, ανεξάρτητα από το μέγεθος του δακτυλίου
- **Μη-Ομοιόμορφος Αλγόριθμος:** Υπάρχει μια μηχανή καταστάσεων για κάθε ταυτότητα, και για κάθε μέγεθος δακτυλίου

# Επισκόπηση Αλγορίθμων

- Υπάρχουν αλγόριθμοι εκλογής προέδρου σε δακτύλιους με ταυτότητες
- Ασυμπτωτικά Βέλτιστα Φράγματα (με βάση την πολυπλοκότητα μηνυμάτων):
  - Ασύγχρονο Δακτύλιο
    - $\Theta(n \log n)$  μηνύματα
  - Σύγχρονο Δακτύλιο
    - $\Theta(n)$  κάτω από κάποιες προϋποθέσεις
    - αλλιώς,  $\Theta(n \log n)$  μηνύματα

# Αλγόριθμος με $O(n^2)$ Μηνύματα

- Αλγόριθμος επεξεργαστή με  $AT=\chi$

- Στείλε τον  $AT$  σου  $\chi$  προς τα αριστερά
- Όταν λάβεις ένα  $AT=\psi$  (από δεξιά):
  - Αν  $\psi > \chi$ 
    - προώθησέ τον  $\psi$  προς τα αριστερά (δεν θα γίνεις ποτέ πρόεδρος)
  - Αν  $\psi = \chi$ 
    - αυτοανακυρήξου πρόεδρος
  - Αν  $\psi < \chi$ 
    - μην κάνεις τίποτα

# Ανάλυση Αλγορίθμου

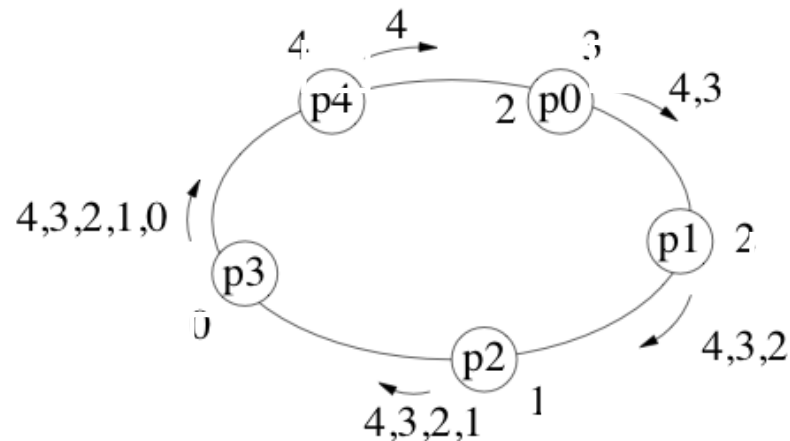
- **Ορθότητα:**
  - **Ικανοποιεί ΣΑ:** Εκλέγει ένα πρόεδρο, αυτόν με τον μεγαλύτερο ΑΤ.
    - το μήνυμα που κουβαλά τον μεγαλύτερο ΑΤ κάνει το γύρο του δακτύλιου
  - **Ικανοποιεί ΣΖ:** Κάθε επεξεργαστής μπαίνει σε κατάσταση προεδρίας η μη προεδρίας
- **Χρονική Πολυπλοκότητα:**  $O(n)$
- **Πολυπλοκότητα Μηνυμάτων:** Εξαρτάται από την διάταξη των ταυτοτήτων στο δακτύλιο
  - Μέγιστος ΑΤ κάνει το γύρο ( $n$  μηνύματα)
  - 2<sup>ος</sup> Μεγιστος μέχρι να συναντήσει το μέγιστο
  - Κτλ.



# Ανάλυση Αλγορίθμου

- Χειρότερη Διάταξη Ταυτοτήτων: Φθίνουσα σειρά από αριστερά
  - 2<sup>ος</sup> μέγιστος ΑΤ συνεισφέρει n-1 μηνύματα
  - 3<sup>ος</sup> μέγιστος ΑΤ συνεισφέρει n-2 μηνύματα
- Συνολικός Αριθμός μηνυμάτων:

$$\sum_{i=1}^n (n - i + 1) = \sum_{i=1}^n i = \Theta(n^2)$$



# Αλγόριθμος με $O(n \log n)$ Μηνύματα

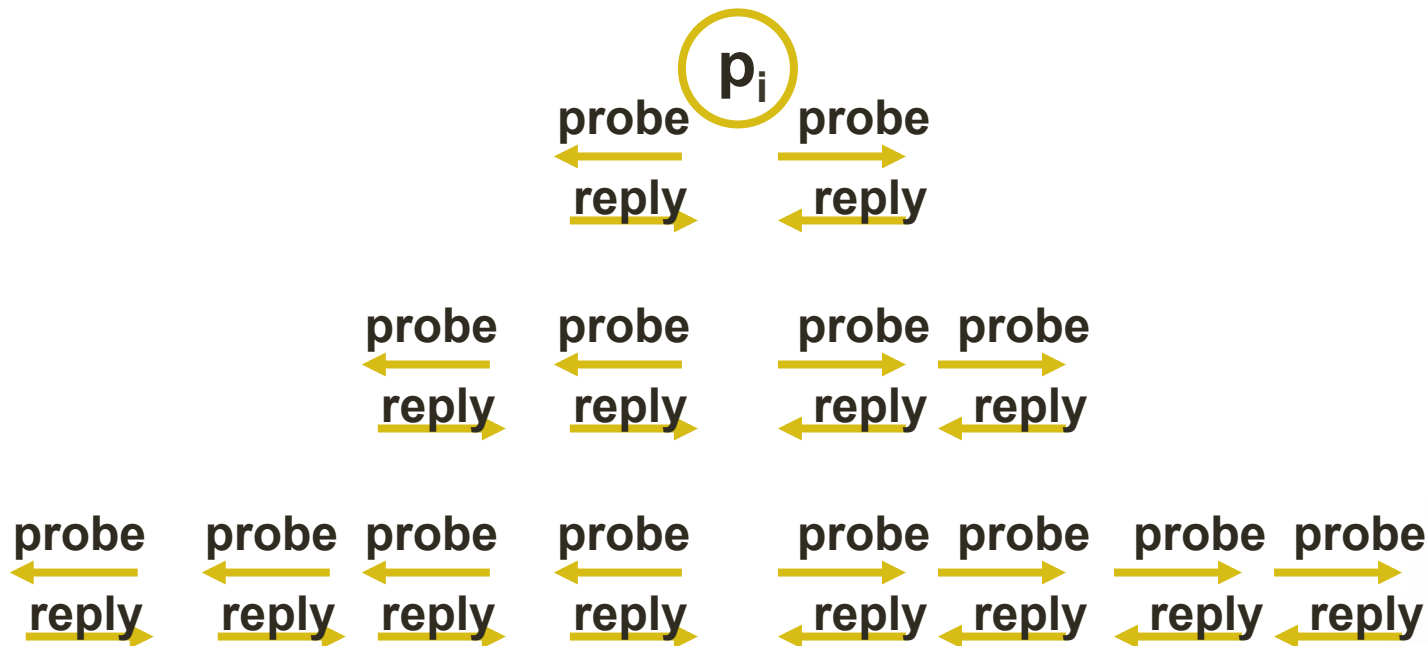
- Ο αλγόριθμος προχωρά σε *φάσεις*.
- Κάθε επεξεργαστής προσπαθεί να κυριαρχήσει σε μεγαλύτερες γειτονιές δεξιά και αριστερά του στέλνοντας *μηνύματα εξερεύνησης*.
- Το μέγεθος της γειτονιάς διπλασιάζεται σε κάθε *φάση*.
- Κάθε μήνυμα εξερεύνησης περιέχει
  - ΑΤ του αποστολέα
  - Απόσταση που πρέπει να διανύσει

# Αλγόριθμος με $O(n \log n)$ Μηνύματα

- Αλγόριθμος επεξεργαστή με  $AT=\chi$  και  $\delta$  η απόσταση που θα διανύσει το μήνυμα
- Αρχικά στείλε μήνυμα εξερεύνησης προς τα δεξιά και αριστερά σου με:  $AT=\chi$ ,  $\delta=1$
- Όταν **λάβεις ένα μήνυμα με  $AT=\psi$  και  $\delta$**  (από δεξιά ή αριστερά):
  - Μείωσε  $\delta=\delta-1$
  - Αν  $\psi > \chi$ 
    - $\delta>0$ : προώθησέ το  $\psi, \delta$  (δεν θα γίνεις ποτέ πρόεδρος)
    - $\delta=0$ : στείλε επιβεβαίωση στον αποστολέα
  - Αν  $\psi = \chi$ 
    - αυτοανακυρήξου πρόεδρος
  - Αν  $\psi < \chi$ 
    - μην κάνεις τίποτα
- Όταν **λάβεις επιβεβαίωση** που δεν προορίζεται στον  $\chi$  τότε προώθησέ την
- Όταν **λάβεις δύο επιβεβαιώσεις** θέσε  $\delta=\delta*2$  και πέρνα στην επόμενη φάση

# Αλγόριθμος με $O(n \log n)$ Μηνύματα

- Παράδειγμα εκτέλεσης επεξεργαστή  $p_i$



# Ανάλυση Αλγορίθμου

- **Ορθότητα:**
  - **Ικανοποιεί ΣΑ:** Εκλέγει ένα πρόεδρο, αυτόν με τον μεγαλύτερο ΑΤ.
    - το μήνυμα που κουβαλά τον μεγαλύτερο ΑΤ κάνει το γύρο του δακτύλιου
  - **Ικανοποιεί ΣΖ:** Κάθε επεξεργαστής μπαίνει σε κατάσταση προεδρίας η μη προεδρίας
- **Χρονική Πολυπλοκότητα:**  $O(n)$
- **Πολυπλοκότητα Μηνυμάτων:** Εξαρτάται πόσοι επεξεργαστές μένουν ζωντανοί μετά από κάθε φάση.

# Ερωτήσεις;

