ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 18: Χρονική και Χωρική Πολυπλοκότητα

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Εισαγωγικά
- Χρονική Πολυπλοκότητα (7)
  - Κλάση P (7.2)
  - Κλάση NP (7.3)
  - NP-πληρότητα (7.4)
- Χωρική Πολυπλοκότητα (8)
  - Κλάση PSPACE

Υπολογίσιμα Προβλήματα

Είδαμε ότι

1. Οτιδήποτε μπορούμε να περιγράψουμε με ένα αλγόριθμο μπορεί να υπολογιστεί με μια μηχανή Turing
2. υπάρχουν προβλήματα που δεν μπορούν να επιλυθούν (π.χ. πρόβλημα τερματισμού
3. υπάρχουν προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν

- Επιλύσιμα προβλήματα
  - Πόσους υπολογιστικούς πόρους απαιτούν;
  - **Χρόνο:** Πόσα βήματα απαιτούνται από μια TM για την επίλυση του προβλήματος.
  - **Χώρο:** Πόσα κελιά πάνω στην ταινία μιας TM απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος.

Χρονική πολυπλοκότητα

- Έστω M μια TM που τερματίζει σε κάθε είσοδο. Ο **χρόνος εκτέλεσης** ή **χρονική πολυπλοκότητα** της M με είσοδο x, **$TIME_M(x)$**:
  - Συνάρτηση f: N -> N όπου f(n) είναι το μέγιστο πλήθος βημάτων που είναι δυνατόν να πραγματοποιήσει η M όταν το μήκος της εισόδου της είναι n=|x|.

Ασυμπτωτική Ανάλυση

- Ορισμός: Κεφαλαίο Όμικρον
  - Έστω f και g δύο συναρτήσεις από το σύνολο N στο σύνολο R^+ . Λέμε ότι **f(n)=O(g(n))** εάν υπάρχουν θετικόι ακέραιοι c και n_0 τέτοιοι ώστε, για κάθε ακέραιο $n \geq n_0$ να ισχύει:

$$f(n) \leq cg(n)$$

Η g(n) αποτελεί το ασυμπτωτικό άνω φράγμα της f(n).

- Π.χ. $f(n) = 6n^3 + 2n^2 + 20n + 45 \Rightarrow f(n) = O(n^3)$
  - Ο μεγιστοβάθμιος όρος υπερισχύει των υπολοίπων για μεγάλα n

Ασυμπτωτική Ανάλυση

- Ορισμός: Μικρό Όμικρον
  - Έστω f και g δύο συναρτήσεις από το σύνολο N στο σύνολο R^+ . Λέμε ότι **f(n)=o(g(n))** εάν ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$$

Με άλλα λόγια για κάθε ακέραιο c > 0 υπάρχει ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε, $f(n) < cg(n)$ για κάθε ακέραιο $n \geq n_0$.

- Π.χ.
  - $f(n) = 6n^3 + 2n^2 + 20n + 45 \Rightarrow f(n) = o(n^4)$
  - n = o(nlogn)
  - $n\log n = o(n^2)$

Κλάση Χρονικής Πολυπλοκότητας

- **TIME(g(n))**={L | L μπορεί να διαγνωστεί σε χρόνο O(g(n)) από κάποια TM}

- Έστω $A = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$
  M1=' Για είσοδο w:
  1. Διατρέχουμε την ταινία και εάν εντοπίσουμε κάποιο 0 δεξιά κάποιου 1 απορρίπτουμε
  2. Ενόσω η ταινία περιέχει 0 και 1:
  3. Διατρέχουμε την ταινία διαγράφοντας ένα 0 και ένα 1
  4. Εάν η ταινία εξακολουθεί να περιέχει 0 ή 1 απορρίπτουμε. Αλλιώς αποδεχόμαστε
- $TIME_{M1}(w) = O(n) + (n/2)O(n) + O(n) = O(n^2)$

$$A \in TIME(n^2)$$

Κλάση P (Polynomial Time)

- Ορισμός: Η κλάση γλωσσών P αποτελείται από τις γλώσσες που μπορούν να διαγνωστούν σε πολυωνιμικό χρόνο από κάποια **Ντετερμινιστική TM** M:

$$P = \bigcup_k TIME(n^k)$$

- Μια γλώσσα L είναι **πολυνωνυμικά αποφασίσιμη** αν υπάρχει μηχανή NTM πολυωνυμικού χρόνου M που την αποφασίζει.

- Συμπερασματικά: Η κλάση P περιέχει προβλήματα που μπορούν να αποφασιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο από μια Ντετερμινιστική μηχανή Turing.

Παραδειγμα

- ΔΙΑΔΡΟΜΗ = {<G,s,t> | το G είναι ένα κατευθυντό γράφημα που περιλαμβάνει μια διαδρομή από τον κόμβο s μέχρι τον t}

- M=‘Για είσοδο <G,s,t>
  1. Σημαδεύουμε το κόμβο s
  2. Επαναλαμβάνουμε μέχρι να μην σημαδεύονται άλλοι κόμβοι
  3. Διατρέχουμε τις ακμές του G. Αν βρούμε ακμή (α,β) όπου α είναι σημασμένος και ο β όχι, σημαδεύουμε το β
  4. Εάν ο t είναι σημαδεμένος αποδεχόμαστε.

- $TIME_M$(<G,s,t>)=O(nm) (n:#κόμβων, m:#ακμών)

Κλάση NP (Non-Deterministic Polynomial Time)

- Ορισμός: Η κλάση γλωσσών NP αποτελείται από τις γλώσσες που μπορούν να διαγνωστούν σε πολυωνιμικό χρόνο από κάποια **Μη Ντετερμινιστική TM** M:

$$NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$$

- **NTIME(g(n))**={L | L μπορεί να διαγνωστεί σε χρόνο O(g(n)) από κάποια NTM}

- Όλες οι γλώσσες στην NP μπορούν να επαληθευτούν σε πολυωνιμικό χρόνο από μια ντετερμινιστική TM.
  - Δοθέντος της NP γλώσσας Γ και ενός αποτελέσματος w μπορούμε να πούμε σε πολυωνιμικό χρόνο εάν w ανήκει στην Γ

Παράδειγμα

- Το πρόβλημα του Πλανώδιου πωλητή: Για ένα σύνολο από πόλεις και κόστη διαδρομών από πόλη σε πόλη, βρες μια διαδρομή
  - που να περνά από κάθε κόμβο του δικτύου ακριβώς μια φορά και
  - να ελαχιστοποιεί την συνολικό κόστος της διαδρομής που θα ακολουθηθεί.
- Μπορεί να λυθεί σε (n-1)! χρόνο.
- Μπορεί να επαληθευτεί σε n χρόνο δοθέντος του μονοπατιού

- Συμπέρασμα. Ορισμένα επιλύσιμα προβλήματα είναι υπολογιστικά δύσκολα

P vs NP

- P=NP ????

- P=η κλάση των γλωσσών στις οποίες η συμμετοχή μπορεί να διαγνωστεί γρήγορα

- NP=η κλάση των γλωσσών στις οποίες η συμμετοχή μπορεί να επαληθευτεί γρήγορα

$$NP \subseteq EXPTIME = \bigcup_k TIME(2^{n^k})$$

Αναγωγιμότητα Πολυωνιμικού Χρόνου

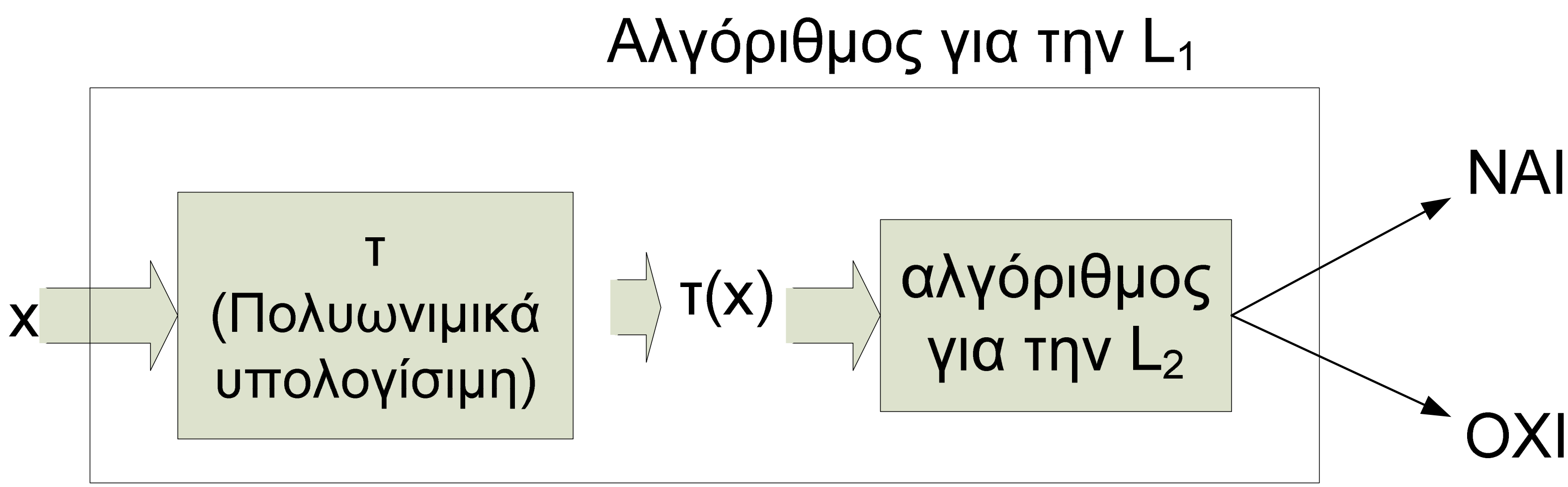
- Ορισμός: Μια συνάρτηση είναι υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο εάν υπάρχει TM πολυωνιμικού χρόνου που την υπολογίζει.

- Ορισμός: Έστω γλώσσες A και B. Λέμε ότι η A είναι αναγώγιμη σε πολυωνιμικό χρόνο στη B ($A \leq_p B$) εάν υπάρχει συνάρτηση πολυωνιμικού χρόνου $f:\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ τ.ω. για κάθε w

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$$

Αναγωγιμότητα Πολυωνιμικού Χρόνου

$L_1 \leq_p L_2$



NP-πληρότητα

- Ορισμός: Μια γλώσσα B είναι NP-πλήρης αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:
  1. H B ανήκει στην κλάση NP
  2. Κάθε γλώσσα $A \in NP$ ανάγεται στη B σε πολυωνιμικό χρόνο.

- **Θεώρημα: Εάν η B είναι NP-πλήρης και $B \in P$ τότε P=NP.**

Κλάσεις Χρονικής Πολυπλοκότητας

$$
\begin{aligned}
P &= \bigcup_{c>0} DTIME(n^c) \\
EXP &= \bigcup_{c>0} DTIME(2^{cn}) \\
EXPPOLY &= \bigcup_{c>0} DTIME(2^{n^c}) \\
PSPACE &= \bigcup_{c>0} DSPACE(n^c)
\end{aligned}
$$

Χωρική Πολυπλοκότητα

- Έστω M μια TM που τερματίζει σε κάθε είσοδο. Ο **χώρος μνήμης** ή **χωρική πολυπλοκότητα** της M σε είσοδο x, **$Space_M(x)$:**
  - Συνάρτηση f: N -> N όπου f(n) είναι το μέγιστο πλήθος θέσεων ταινίας που είναι δυνατόν να διατρέξει η M όταν το μήκος της εισόδου της είναι n=|x|.

- **SPACE(g(n))**={L | L μπορεί να διαγνωστεί από κάποια ντετερμινιστικη TM χώρου O(g(n))}

- **NSPACE(g(n))**={L | L μπορεί να διαγνωστεί από κάποια μη ντετερμινιστικη TM χώρου O(g(n))}

Η Κλάση PSPACE

- Ορισμός: Η κλάση γλωσσών PSPACE αποτελείται από τις γλώσσες που μπορούν να διαγνωστούν σε πολυωνιμικό χώρο από κάποια **Ντετερμινιστική TM** M:

$$PSPACE = \bigcup_k SPACE(n^k)$$

- Θεώρημα Savitch:

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n))$$

- Από το θεώρημα του Savitch:

$$PSPACE = NPSPACE$$

Ερωτήσεις;