ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 17: Αναγωγές (Παραδείγματα)

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Απεικονιστικές Αναγωγές (5.3)

- Παραδείγματα

Μέθοδος Αναγωγής

- Χρήση: **Για να μπορούμε να δείξουμε ότι ένα πρόβλημα είναι υπολογιστικά μη επιλύσιμο.**

Ορισμός:
Αναγωγή είναι η μετατροπή κάποιου προβλήματος σε κάποιο άλλο η οποία γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η λύση του δεύτερου προβλήματος να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του πρώτου

ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM

- ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM = {<M,w> | η M είναι μια TM που τερματίζει για είσοδο w}

- S = ‘ Για είσοδο <M,w>, όπου M μια TM και w μια λέξη:
  1. Εκτελούμε την R για είσοδο <M,w>
  2. Εάν R απορρίψει, απορρίπτουμε
  3. Εάν η R αποδεχτεί, προσομοιώνουμε την M στην w μέχρι η M να τερματίσει.
  4. Εάν η M αποδεχθεί τότε αποδεχόμαστε. Εάν απορρίψει, απορρίπτουμε.’

- Αφού η ΑΠΟΔΟΧΗ/TM είναι μη διαγνώσιμη => η R είναι αδύνατον να υπάρχει
- Άρα η ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM είναι μη διαγνώσιμη

ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ

- ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ={<M> | η M είναι μια ΤΜ και L(M)=∅}

- Ιδέα: ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ **ανάγεται** στην ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ

- Έστω ότι R μια TM που διαγιγνώσκει την ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ

- Ιδέα 1: Εκτελούμε την R πάνω στην M (<M,w> είσοδος της ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ)
  - Αν R αποδεχτεί τότε ξέρουμε ότι η w δεν ανήκει στην L(M)
  - Αν R απορρίψει δεν γνωρίζουμε σίγουρα αν η w ανήκει L(M) (και άρα η M θα αποδεχτεί την w)

KENOTHTA/TM

- KENOTHTA/TM={<M> | η M είναι μια TM και L(M)=∅}

- S=‘Για είσοδο <M,w>,όπου M μια TM και w λέξη:
  1. Κατασκευάζουμε την TM M1:
     ‘Για είσοδο x:
     1. Εάν $x \neq w$ απορρίπτουμε.
     2. Εάν x = w εκτελούμε την M στο w. Αν αποδεχτεί αποδεχόμαστε.’
  2. Εκτελούμε την R για είσοδο <M1>.
  3. Αν η R αποδέχεται, απορρίπτουμε, αλλιώς αποδεχόμαστε.

- H KENOTHTA/TM είναι μη διαγνώσιμη

Απεικονιστικές Αναγωγές

- Πως μπορούμε να περιγράψουμε μαθηματικά ότι ένα πρόβλημα A ανάγεται σε ένα άλλο πρόβλημα B?
  - Υπάρχει μια **υπολογίσιμη συνάρτηση** που μετατρέπει τα στιγμιότυπα του A σε στιγμιότυπα του B

- Ορισμός: Μια συνάρτηση f: $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ λέγεται **υπολογίσιμη** εάν υπάρχει TM που, για κάθε είσοδο w, τερματίζει έχοντας στην ταινία της μόνο τη λέξη f(w).

Τυπικός Ορισμός της Απεικονιστικής Αναγωγιμότητας

Γνωστή Μη Αναδρομική Γλώσσα L_1 → αναδρομική συνάρτηση τ: $x \in L_1$ αν και μόνο αν $\tau(x) \in L_2$ → Γλώσσα L_2 (Αναδρομική?)

- Ορισμός. (**Απεικονιστική Αναγωγιμότητα**) Έστω L_1, $L_2 \subseteq \Sigma^*$ δύο γλώσσες. Η L_1 είναι **απεικονιστικά αναγώγιμη στην** L_2 , $L_1 \leq_m L_2$, εάν υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση $\tau: \Sigma^* \to \Sigma^*$ τέτοια ώστε $x \in L_1$ αν και μόνο αν $\tau(x) \in L_2$.
- **Χρήση**: **Για να δείξουμε ότι η L_2 δεν είναι αναδρομική:**
  - Προσδιορίζω μια γλώσσα L_1 που είναι γνωστό ότι είναι μη αναδρομική
  - Ανάγω την L_1 στην L_2.

Χρήση Αναγωγών

- Θεώρημα 1. Εάν A $\leq_m$ B και η B είναι διαγνώσιμη (αναδρομική) τότε και η A είναι διαγνώσιμη (αναδρομική).

- Απόδειξη. Υποθέστε ότι M διαγνώστης της B.
  - N=‘ Για είσοδο w:
    1. Υπολογίζουμε την λέξη f(w).
    2. Εκτελούμε την M για είσοδο f(w) και επιστρέφουμε ως έξοδο την έξοδο της M.’
  - H N είναι ένας διαγνωστής της A.
    - η f είναι μια αναγωγή από το A στο B
    - w ανήκει στην A αν και μόνο αν f(w) ανήκει στο B

- Θεώρημα 2. Εάν A $\leq_m$ B και η A είναι μη διαγνώσιμη τότε και η B είναι μη διαγνώσιμη.

Παράδειγμα 1

- ΑΠΟΔΟΧΗ/TM $\leq_m$ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM

- **Στόχος**: Υπολογισμός συνάρτησης f που δέχεται είσοδο <M,w> και επιστρέφει μια έξοδο της μορφής <M’,w’> τ.ω.
  - <M,w> ∈ ΑΠΟΔΟΧΗ/TM και <M’,w’> ∈ ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM

- F = ‘Για είσοδο <M,w>, όπου M μια TM και w μια λέξη:
  1. Κατασκευάζουμε την εξής μηχανή
     M’ = ‘Για είσοδο x:
     1. Εκτελούμε την M επί της x
     2. Εάν η M αποδέχεται, αποδεχόμαστε.
     3. Εάν η M απορρίπτει, εγκλωβιζόμαστε.’
  2. Επιστρέφουμε την λέξη <M’,w>. ‘

Παράδειγμα 2

- ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM $\leq_m$ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM

- F=‘ Για είσοδο M μια TM :
  1. Κατασκευάζουμε την εξής μηχανή.
     M_0 = ‘ Για είσοδο x:
     1. Η M_0 απορρίπτει και τερματίζει. ‘
  2. Επιστρέφουμε τη λέξη <M, M_0>. ‘

- Χρειάζεται να αποδείξουμε τις δύο κατευθύνσεις της f
  - => εάν <M>$\in$ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM
    τότε <M, M_0>$\in$ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM
  - <= εάν <M, M_0>$\in$ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM
    τότε <M>$\in$ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM

Παράδειγμα 3

- ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ $\leq_m$ ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ (???)

- F = ‘ Για είσοδο <M,w> όπου Μ μια ΤΜ και w μια λέξη:
  1. Κατασκευάζουμε ΤΜ.
     M_1 = ‘ Για είσοδο μια λέξη x:
     1. Εάν x $\neq$ w απορρίπτουμε.
     2. Εάν x = w εκτελούμε την Μ στο w. Αν αποδεχτεί αποδεχόμαστε.’
  2. Επιστρέφουμε την λέξη <M_1>. ‘

- Είναι η <M_1> σωστή είσοδος για την ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ?
  - Αν περάσουμε την M_1 ως είσοδο της ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ τότε η έξοδος θα είναι και έξοδος για την ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ?
  - ΌΧΙ!! - Η ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ αποδέχεται την <M,w> αν $L(M_1)$ δεν είναι κενή
- Άρα για την ακρίβεια ανάγουμε
  - ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ $\leq_m \overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ / ΤΜ}}$

Απόδειξη Μη Αναγνωρισιμότητας

- Θεώρημα 3. Εάν Α $\leq_m$ Β και η Β είναι αναγνωρίσιμη(αναδρομικά απαριθμήσιμη) τότε και η Α είναι αναγνωρίσιμη (αναδρομικά απαριθμήσιμη).

- Θεώρημα 4. Εάν Α $\leq_m$ Β και η Α δεν είναι αναγνωρίσιμη(μη αναδρομικά απαριθμήσιμη) τότε και η Β δεν είναι αναγνωρίσιμη (μη αναδρομικά απαριθμήσιμη).

Παράδειγμα 4

- Θεώρημα: ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM δεν είναι ούτε αναγνωρίσιμη ούτε συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη

- Για απόδειξη της μη αναγνωρισιμότητας μιας γλώσσας B πρέπει να δείξουμε ότι
  - $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}/\text{TM}} \leq_m B$
  - Με βάση τον ορισμό της απεικονιστικής αναγωγής η σχέση $A \leq_m B$ είναι ισοδύναμη με την $\overline{A} \leq_m \overline{B}$
  - Έτσι μπορούμε να δείξουμε $\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}/\text{TM} \leq_m \overline{B}$

- Έτσι αρχικά θα δείξουμε την μη αναγνωρισιμότητα της ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM με την αναγωγή

$$\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}/\text{TM} \leq_m \overline{\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}/\text{TM}}$$

Παράδειγμα 4

- Η ανάγουσα συνάρτηση f είναι η ακόλουθη
  F = 'Για είσοδο <M,w>, όπου M μια TM και w λεξη:
  1. Κατασκευάζουμε τις παρακάτω μηχανές.
     M_1 = 'Για κάθε είσοδο:
     1. Απορρίπτουμε. '

     M_2 = 'Για κάθε είσοδο:
     1. Εκτελούμε την M επί της w.
     2. Εάν η M αποδέχεται, αποδεχόμαστε. '
  1. Επιστρέφουμε τη λέξη < M_1, M_2>. '

- Εάν η M αποδέχεται την w τότε η M_2 αποδέχεται όλες τις εισόδους και άρα οι < M_1, M_2> δεν είναι ισοδύναμες.
- Από την άλλη εάν η M δεν αποδέχεται τότε η M_2 δεν αποδέχεται καμιά είσοδο και άρα οι < M_1, M_2> είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 4

- Πρέπει να δείξουμε ότι και η $\overline{\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ / TM}}$ δεν είναι αναγνωρίσιμη παραθέτουμε την αναγωγή

$$\text{ΑΠΟΔΟΧΗ / TM} \leq_m \text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ / TM}$$

- Η ανάγουσα συνάρτηση g είναι η ακόλουθη
G = ‘Για είσοδο <M,w>, όπου M μια TM και w λεξη:

1. Κατασκευάζουμε τις παρακάτω μηχανές.
   M_1 = ‘Για κάθε είσοδο:
   1. Αποδεχόμαστε. ‘

   M_2 = ‘Για κάθε είσοδο:
   1. Εκτελούμε την M επί της w.
   2. Εάν η M αποδέχεται, αποδεχόμαστε. ‘
1. Επιστρέφουμε τη λέξη < M_1, M_2>. ‘

Ερωτήσεις;