ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 16: Αναγωγές

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Το Πρόβλημα του Τερματισμού (4.2)
- Εισαγωγή στις Αναγωγές
- Ανεπίλυτα Προβλήματα από την Θεωρία των Γλωσσών (5.1)
- Απεικονιστικές Αναγωγές (5.3)

Απόδειξη: Πρόβλημα του τερματισμού

- Έστω ότι η ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ είναι διαγνώσιμη
  - Άρα υπάρχει ΤΜ Η που την διαγιγνώσκει

- Η=‘ Για είσοδο <M,w>, όπου Μ μια ΤΜ και w μια λέξη:
  1. Προσομοιώνουμε την Μ για είσοδο w.
  2. Εάν η Μ μεταβεί ποτέ στην κατάσταση αποδοχής, αποδεχόμαστε. Εάν η Μ δεν αποδέχεται, είτε επειδή έφτασε σε κατάσταση απόρριψης είτε επειδή δεν τερματίζει, απορρίπτουμε.’

Απόδειξη: Πρόβλημα του τερματισμού

- Δημιουργούμε μια μηχανή Δ που χρησιμοποιεί την Η ως υποπρόγραμμα
  - Η Δ ελέγχει πως συμπεριφέρεται μια ΤΜ Μ αν της δώσουμε ως είσοδο την λέξη που αντιστοιχεί στην κωδικοποίησή της <Μ>.
  - Η Δ απορρίπτει εάν η Μ αποδέχεται την <Μ>
  - Η Δ αποδέχεται εάν η Μ απορρίπτει την <Μ>

- Δ=‘ Για είσοδο <Μ>, όπου Μ μια ΤΜ:
  1. Εκτελούμε την Η για είσοδο <Μ,<Μ>>.
  2. Εάν η Η απορρίπτει, αποδεχόμαστε αλλιώς εάν η Η αποδέχεται, απορρίπτουμε.’

Απόδειξη: Πρόβλημα του τερματισμού

- Άρα η Δ διαγραμματικά δουλεύει ως εξής:
- Δ(<M>) =
  - **αποδοχή** εάν η M δεν αποδέχεται την λέξη <M>
  - **απόρριψη** εάν η M αποδέχεται την λέξη <M>
- Τι γίνεται αν τρέξουμε την Δ με τον εαυτό της;
- Δ(<Δ>) =
  - **αποδοχή** εάν η Δ δεν αποδέχεται την λέξη <Δ>
  - **απόρριψη** εάν η Δ αποδέχεται την λέξη <Δ>
- **ΑΤΟΠΟ**

Διαγωνιοποίηση

- Πίνακας που υποδεικνύει εάν μια μηχανή δέχεται αποδέχεται την κωδικοποίηση μιας μηχανής:
  - Εάν ναι το στοιχείο του πίνακα περιέχει τη λέξη αποδοχή
  - Διαφορετικά, αν απορρίπτει η εάν δεν τερματίζει το στοιχείο του πίνακα είναι κενό

	<M1>	**<M2>**	**<M3>**	**…**
M1	αποδοχή		αποδοχή	
M2	αποδοχή	αποδοχή	αποδοχή	
M3				
…				

Διαγωνιοποίηση

- Ο ίδιος πίνακας με τα αποτελέσματα της H
  - η TM H απορρίπτει αν μια μηχανή Mi δεν αποδέχεται μια λέξη <Mj>
    - Είτε Mi απορρίπτει την <Mj>
    - Είτε Mi δεν τερματίζει πάνω στην <Mj>
  - Γράφουμε απόρριψη στο αντίστοιχο πεδίο του πίνακα

	<M1>	**<M2>**	**<M3>**	**…**	**<Δ>**
M1	αποδοχή	απόρριψη	αποδοχή		
M2	αποδοχή	αποδοχή	αποδοχή		
M3	απόρριψη	απόρριψη	απόρριψη		
…					
Δ					

Διαγωνιοποίηση

- Σύμφωνα με τον ορισμό της Δ πρέπει να παίρνει τιμές αντίθετες της διαγωνίου
- **Τι τιμή θα πάρει για τον εαυτό της!!??**
  - Αντίθετη του εαυτού της
  - ΑΤΟΠΟ

	<M1>	**<M2>**	**<M3>**	**…**	**<Δ>**
M1	**αποδοχή**	απόρριψη	αποδοχή		
M2	αποδοχή	**αποδοχή**	αποδοχή		
M3	απόρριψη	απόρριψη	**απόρριψη**		
…					
Δ	απόρριψη	απόρριψη	αποδοχή	…	**????**

Μια μη αναγνωρίσιμη γλώσσα

- Θυμηθείτε: Μια γλώσσα είναι διαγνώσιμη εάν και μόνο εάν είναι αναγνωρίσιμη (αναδρομικά απαριθμήσιμη) και συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη (συναναδρομικά απαριθμήσιμη).

- Το συμπλήρωμα της ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ δεν ειναι αναγνωρίσιμη γλώσσα
  - Η ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ είναι αναγνωρίσιμη
  - Αν το συμπλήρωμα της ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ ήταν αναγνωρίσιμη τότε η ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ θα ήταν διαγνώσιμη
  - Αποδείξαμε ότι η ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ δεν ειναι διαγνώσιμη

Μέθοδος Αναγωγής

- Χρήση: **Για να μπορούμε να δείξουμε ότι ένα πρόβλημα είναι υπολογιστικά μη επιλύσιμο.**

Ορισμός:
Αναγωγή είναι η μετατροπή κάποιου προβλήματος σε κάποιο άλλο η οποία γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η λύση του δεύτερου προβλήματος να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του πρώτου

Αναγωγές στην Καθημερινότητα

- Εύρεση μιας τοποθεσίας **ανάγεται** στην εύρεση χάρτη
- Ταξίδι από Κύπρο σε Αμερική **ανάγεται** στην αγορά εισιτηρίου το οποίο **ανάγεται** στην εύρεση χρημάτων το οποίο **ανάγεται** στην εύρεση εργασίας
- Μέτρηση εμβαδού ορθογωνίου **ανάγεται** στην μέτρηση του μήκους και του πλάτους του
- **Ιδέα: Αν ένα πρόβλημα Α μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα Β τότε η επίλυση του Α αποκλείεται να είναι δυσκολότερη από την επίλυση του Β, αφού κάθε λύση του Β μας δίνει λύση στο Α.**
  - **Αν Β είναι επιλύσιμο τότε και Α είναι επιλύσιμο**
  - **Αν Α είναι μη επιλύσιμο τότε και Β είναι μη επιλύσιμο**

Παραδείγματα από Θεωρία Γλωσσών

- ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM = {<M,w> | η M είναι μια TM που τερματίζει για είσοδο w}

- Ιδέα: ΑΠΟΔΟΧΗ/TM ανάγεται στην ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM

- Έστω ότι υπάρχει μια μηχανή R που διαγιγνώσκει την ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM. Με την βοήθεια της R μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μηχανή S που να διαγιγνώσκει την ΑΠΟΔΟΧΗ/TM.

ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM

- S = ‘ Για είσοδο <M,w>, όπου Μ μια ΤΜ και w μια λέξη:
  1. Εκτελούμε την R για είσοδο <M,w>
  2. Εάν R απορρίψει, απορρίπτουμε
  3. Εάν η R αποδεχτεί, προσομοιώνουμε την Μ στην w μέχρι η Μ να τερματίσει.
  4. Εάν η Μ αποδεχθεί τότε αποδεχόμαστε. Εάν απορρίψει, απορρίπτουμε.’

- Εάν η R διαγιγνώσκει την ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ => S διαγιγνώσκει την ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ
- Αποδείξαμε όμως ότι η ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ είναι μη διαγνώσιμη => η R είναι αδύνατον να υπάρχει
- Άρα η ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ είναι μη διαγνώσιμη

ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM

- ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM={<M> | η M είναι μια TM και L(M)=;}
- Ιδέα: ΑΠΟΔΟΧΗ/TM **ανάγεται** στην ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM
- Έστω ότι R μια TM που διαγιγνώσκει την ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM
- Ιδέα 1: Εκτελούμε την R πάνω στην M (<M,w> είσοδος της ΑΠΟΔΟΧΗ/TM)
  - Αν R αποδεχτεί τότε ξέρουμε ότι η w δεν ανήκει στην L(M)
  - Αν R απορρίψει δεν γνωρίζουμε σίγουρα αν η w ανήκει L (M) (και άρα η M θα αποδεχτεί την w)

KENOTHTA/TM

- Ιδέα 2: Κατασκευή ενδιάμεσης TM που να αποδέχεται μόνο την w αν αυτή γίνεται αποδεχτή από την M

- S=‘Για είσοδο <M,w>,όπου M μια TM και w λέξη:
  1. Κατασκευάζουμε την TM M1:
     ‘Για είσοδο x:
     1. Εάν x 66= w απορρίπτουμε.
     2. Εάν x = w εκτελούμε την M στο w. Αν αποδεχτεί αποδεχόμαστε.’
  2. Εκτελούμε την R για είσοδο <M1>.
  3. Αν η R αποδέχεται, απορρίπτουμε, αλλιώς αποδεχόμαστε.

- Η KENOTHTA/TM είναι μη διαγνώσιμη

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM

- ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM={<M1,M2> | L(M1)=L(M2)}
- Ιδέα: ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM **ανάγεται** στην ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM
- Έστω R μια TM που διαγιγνώσκει την ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM
- S=‘Για είσοδο <M>, όπου M μια TM:
    1. Εκτελούμε την R για είσοδο <M,M0>, όπου M0 μια TM που απορρίπτει όλες τις εισόδους
    2. Εάν η R αποδέχεται, αποδεχόμαστε. Εάν η R απορρίπτει, απορρίπτουμε.’
- Αφού ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM είναι μη διαγνώσιμη => η R δεν υπάρχει και ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM είναι μη διαγνώσιμη

Απεικονιστικές Αναγωγές

- Πως μπορούμε να περιγράψουμε μαθηματικά ότι ένα πρόβλημα A ανάγεται σε ένα άλλο πρόβλημα B?
  - Υπάρχει μια **υπολογίσιμη συνάρτηση** που μετατρέπει τα στιγμιότυπα του A σε στιγμιότυπα του B

- Ορισμός: Μια συνάρτηση f: Σ* → Σ* λέγεται **υπολογίσιμη** εάν υπάρχει TM που, για κάθε είσοδο w, τερματίζει έχοντας στην ταινία της μόνο τη λέξη f(w).

Τυπικός Ορισμός της Απεικονιστικής Αναγωγιμότητας

Γνωστή Μη Αναδρομική Γλώσσα L_1

αναδρομική συνάρτηση τ:

$x \in L_1$ αν και μόνο αν $\tau(x) \in L_2$

(Αναδρομική?)

Γλώσσα L_2

- Ορισμός. (**Απεικονιστική Αναγωγιμότητα**) Έστω L_1, $L_2 \subseteq \Sigma^*$ δύο γλώσσες. Η L_1 είναι **απεικονιστικά αναγώγιμη στην** L_2 , $L_1 \leq_m L_2$, εάν υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση $\tau: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ τέτοια ώστε $x \in L_1$ αν και μόνο αν $\tau(x) \in L_2$.
- **Χρήση**: **Για να δείξουμε ότι η L_2 δεν είναι αναδρομική:**
  - Προσδιορίζω μια γλώσσα L_1 που είναι γνωστό ότι είναι μη αναδρομική
  - Ανάγω την L_1 στην L_2.

Χρήση Αναγωγών

- Θεώρημα 1. Εάν A $\leq_m$ B και η B είναι διαγνώσιμη (αναδρομική) τότε και η A είναι διαγνώσιμη (αναδρομική).

- Απόδειξη. Υποθέστε ότι M διαγνώστης της B.
  - N=' Για είσοδο w:
    1. Υπολογίζουμε την λέξη f(w).
    2. Εκτελούμε την M για είσοδο f(w) και επιστρέφουμε ως έξοδο την έξοδο της M.'

  - H N είναι ένας διαγνωστής της A.
    - η f είναι μια αναγωγή από το A στο B
    - w ανήκει στην A αν και μόνο αν f(w) ανήκει στο B

Χρήση Αναγωγών

- Θεώρημα 2. Εάν A $\leq_m$ B και η A είναι μη διαγνώσιμη τότε και η B είναι μη διαγνώσιμη.
- Θεώρημα 3. Εάν A $\leq_m$ B και η B είναι αναγνωρίσιμη (αναδρομικά απαριθμήσιμη) τότε και η A είναι αναγνωρίσιμη (αναδρομικά απαριθμήσιμη).
- Θεώρημα 4. Εάν A $\leq_m$ B και η A δεν είναι αναγνωρίσιμη (μη αναδρομικά απαριθμήσιμη) τότε και η B δεν είναι αναγνωρίσιμη (μη αναδρομικά απαριθμήσιμη).

Ερωτήσεις;