ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 14: Διαγνωσιμότητα (Επιλυσιμότητα)

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Εισαγωγή
- Επιλύσιμα Προβλήματα σχετικά με τις Κανονικές Γλώσσες (4.1.1)
- Επιλύσιμα Προβλήματα σχετικά με Ασυμφραστικές Γλώσσες (4.1.2)

Εισαγωγή

- Τι μελετά η διαγνωσιμότητα;
  - Τα προβλήματα που λύνονται αλγοριθμικά

- Γιατί μελετούμε μη επιλύσιμα προβλήματα;
  - Για να μπορούμε να γνωρίζουμε αν είναι εφικτή μια αλγοριθμική λύση για κάποιο πρόβλημα
  - Για να γνωρίσουμε τις δυνατότητες και αδυναμίες των υπολογιστών

Προβλήματα σχετικά με Κανονικές Γλώσσες

- Υπολογιστικά προβλήματα που αφορούν πεπερασμένα αυτόματα. Αλγόριθμοι που ελέγχουν εάν:
  - Πεπερασμένο αυτόματο δέχεται μια λέξη
  - Γλώσσα ενός πεπερασμένου αυτόματου είναι η κενή
  - Δυο πεπερασμένα αυτόματα είναι ισοδύναμα
- Αναπαράσταση προβλημάτων: ως γλώσσες

Αποδοχή/DFA

- ΑΠΟΔΟΧΗ/DFA={<B,w> | το B είναι ένα DFA που αποδέχεται την λέξη w}
  - <B,w>: κωδικοποίηση όλων των DFA μαζί με λέξεις που αποδέχονται

- M=‘ Για είσοδο <B,w>, όπου B ένα DFA και w μια λέξη:
  1. Προσομοιώνουμε το B για είσοδο w.
  2. Εάν η προσομοίωση καταλήξει σε κατάσταση αποδοχής, αποδεχόμαστε. Εάν καταλήξει σε άλλη κατάσταση απορρίπτουμε.’

- Η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/DFA είναι **διαγνώσιμη (αναδρομική)**

Αποδοχή/NFA

- ΑΠΟΔΟΧΗ/NFA={<B,w> | το B είναι ένα NFA που αποδέχεται την λέξη w}

- N=‘ Για είσοδο <B,w>, όπου B ένα NFA και w μια λέξη:
  1. Μετατρέπουμε το B σε ένα ισοδύναμο DFA C.
  2. Εκτελούμε την TM M πάνω στην <C,w>
  3. Εάν η M αποδέχεται, αποδεχόμαστε. αλλιώς απορρίπτουμε.’

- Η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/NFA είναι **διαγνώσιμη (αναδρομική)**
- **Χρησιμοποιεί την M ως υποπρόγραμμα:**
  - Η συνάρτηση μεταβάσεων της M ενσωματώνεται σε εκείνη της N

Αποδοχή/REX

- ΑΠΟΔΟΧΗ/REX={<R,w> | το R είναι κανονική έκφραση που παράγει την λέξη w}

- P=‘ Για είσοδο <R,w>, όπου R καν. εκφρ. και w μια λέξη:
  1. Μετατρέπουμε την R σε ένα ισοδύναμο NFA B.
  2. Εκτελούμε την TM N πάνω στην <B,w>
  3. Εάν η N αποδέχεται, αποδεχόμαστε. αλλιώς απορρίπτουμε.’

- Η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/REX είναι **διαγνώσιμη (αναδρομική)**

Κενότητα/DFA

- ΚΕΝΟΤΗΤΑ/DFA={<B> | το B είναι ένα DFA και L(B)=∅}
  - Να ελεγχθεί εάν η γλώσσα του αυτόματου είναι η κενή
  - Πότε ένα DFA αποδέχεται κάποια από τις εισόδους του;
    - Όταν από την εναρκτήρια μπορούμε να μεταβούμε σε κατάσταση αποδοχής ακολουθώντας τις μεταβάσεις του

- T=‘ Για είσοδο <B>, όπου B ένα DFA:
  1. Σημαδεύουμε την εναρκτήρια κατάσταση του B.
  2. Επαναλαμβάνουμε μέχρις ότου να μην σημαδεύεται καμιά νέα κατάσταση:
  3. Σημαδεύουμε όλες τις καταστάσεις στις οποίες μπορούμε να μεταβούμε από τις ήδη σημαδεμένες.
  4. Εάν καμιά κατάσταση αποδοχής δεν είναι σημαδεμένη, αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.’

- Η γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ/DFA είναι **διαγνώσιμη (αναδρομική)**

Ισοδυναμία/DFA

- ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/DFA={<A,B> | τα A,B είναι DFA και L(A)=L(B)}

- Ιδέα: Κατασκευή ενός νέου αυτόματου C που αποδέχεται μόνο τις λέξεις που γίνονται αποδεχτές είτε από το A είτε από το B αλλά όχι και από τα δύο:
  - Εάν η L(C)=∅ τότε οι A και B είναι ισοδύναμες
  - L(C) είναι η συμμετρική διαφορά

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

Ισοδυναμία/DFA

- Κατασκευάζουμε C χρησιμοποιώντας τις κατασκευές κλειστότητας ως προς το συμπλήρωμα, την ένωση και την τομή

- F=‘ Για είσοδο <A,B>, όπου A,B δύο DFA:
  1. Κατασκευάζουμε το DFA C.
  2. Εκτελούμε την TM T πάνω στο C
  3. Εάν η T αποδέχεται αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.’

- Η γλώσσα ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/DFA είναι **διαγνώσιμη (αναδρομική)**

Προβλήματα σχετικά με Ασυμφραστικές Γλώσσες

- Υπολογιστικά προβλήματα για ασυμφραστικές γραμματικές. Αλγόριθμοι που ελέγχουν εάν:
  - Ασυμφραστική γραμματική παράγει μια λέξη
  - Γλώσσα μιας ασυμφραστικής γραμματικής είναι η κενή
  - Ασυμφραστικές γραμματικές διαγνώσιμες

Παραγωγή/CFG

- ΠΑΡΑΓΩΓΗ/CFG={<G,w> | το G είναι μια CFG που παράγει την λέξη w}

- Ιδέα 1: Διατρέχουμε όλες τις πιθανές παραγωγές της G και να ελέγξουμε εάν η w είναι μια από αυτές
  - Πρόβλημα: Μπορεί να υπάρχει άπειρο πλήθος παραγωγών
  - Εάν δεν παράγουμε την w ο αλγόριθμος δεν τερματίζει
  - Σε αυτή την περίπτωση η TM αναγνωρίζει αλλά δεν διαγιγνώσκει

- Ιδέα 2: Εάν η G είναι σε κανονική μορφή Chomsky τότε οποιαδήποτε παραγωγή της w αποτελείται από 2n-1 βήματα (όπου n=|w|).
  - Μπορούμε να ελέγξουμε μόνο παραγωγές 2n-1 βημάτων που είναι πεπερασμένες σε αριθμό

Παραγωγή/CFG

- S=‘ Για είσοδο <G,w>, όπου G μια CFG και w μια λέξη:
  1. Μετατρέπουμε την G σε μια ισοδύναμη γραμματική σε κανονική μορφή Chomsky.
  2. Συντάσσουμε όλες τις παραγωγές 2n-1 βημάτων
  3. Εάν κάποια από τις παραγωγές είναι η w, αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.’

- Η γλώσσα ΠΑΡΑΓΩΓΗ/CFG είναι **διαγνώσιμη (αναδρομική)**

Κενότητα/CFG

- ΚΕΝΟΤΗΤΑ/CFG={<G> | η G είναι μια CFG και L(G)=∅}
- Ιδέα 1: Να ελέγξουμε όλες τις πιθανές λέξεις w
  - Άπειρες λέξεις και επομένως μπορεί να μην τερματίσουμε
- Ιδέα 2: Πότε μια CFG παράγει κάποια από τις εισόδους του;
  - Όταν από την εναρκτήρια μεταβλητή μπορούμε να παραγάγουμε λέξεις τερματικών συμβόλων
  - Ελέγχουμε αν από κάθε μεταβλητή μπορούμε να παράγουμε λέξεις τερματικών συμβόλων
- R=‘ Για είσοδο <G>, όπου G μια CFG:
  1. Σημαδεύουμε όλα τα τερματικά σύμβολα της G.
  2. Επαναλαμβάνουμε μέχρις ότου να μην σημαδευτούν όλες οι μεταβλητές:
  3. Σημαδεύουμε κάθε μεταβλητή $A \to U_1 \ldots U_k$ όπου $U_1 \ldots U_k$ είναι ήδη σημαδεμένα.
  4. Εάν η εναρκτήρια δεν είναι σημαδεμένη, αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.’
- Η γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ/CFG είναι **διαγνώσιμη (αναδρομική)**

Ισοδυναμία/CFG

- ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/CFG={<G,H> | τα G,H είναι CFG και L(G)=L(H)}

- Ιδέα 1: να χρησιμοποιήσουμε παρόμοια τακτική με τον αλγόριθμο που δείχνει την ισοδυναμία των κανονικών γλωσσών
  - Αδύνατον αφού οι ασυμφραστικές γλώσσες δεν είναι κλειστές κάτω από τις πράξεις του συμπληρώματος και της τομής

- Πραγματικότητα: Η γλώσσα ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/CFG δεν είναι διαγνώσιμη

Κάθε Ασυμφραστική είναι διαγνώσιμη

- Έστω A μια ασυμφραστική γλώσσα και θέλουμε να δώσουμε αλγόριθμο που να την διαγιγνώσκει

- Αφού A είναι ασυμφραστική τότε
  - Υπάρχει αυτόματο στοίβας που την αναγνωρίζει
  - Υπάρχει ασυμφραστική γραμματική που την παράγει

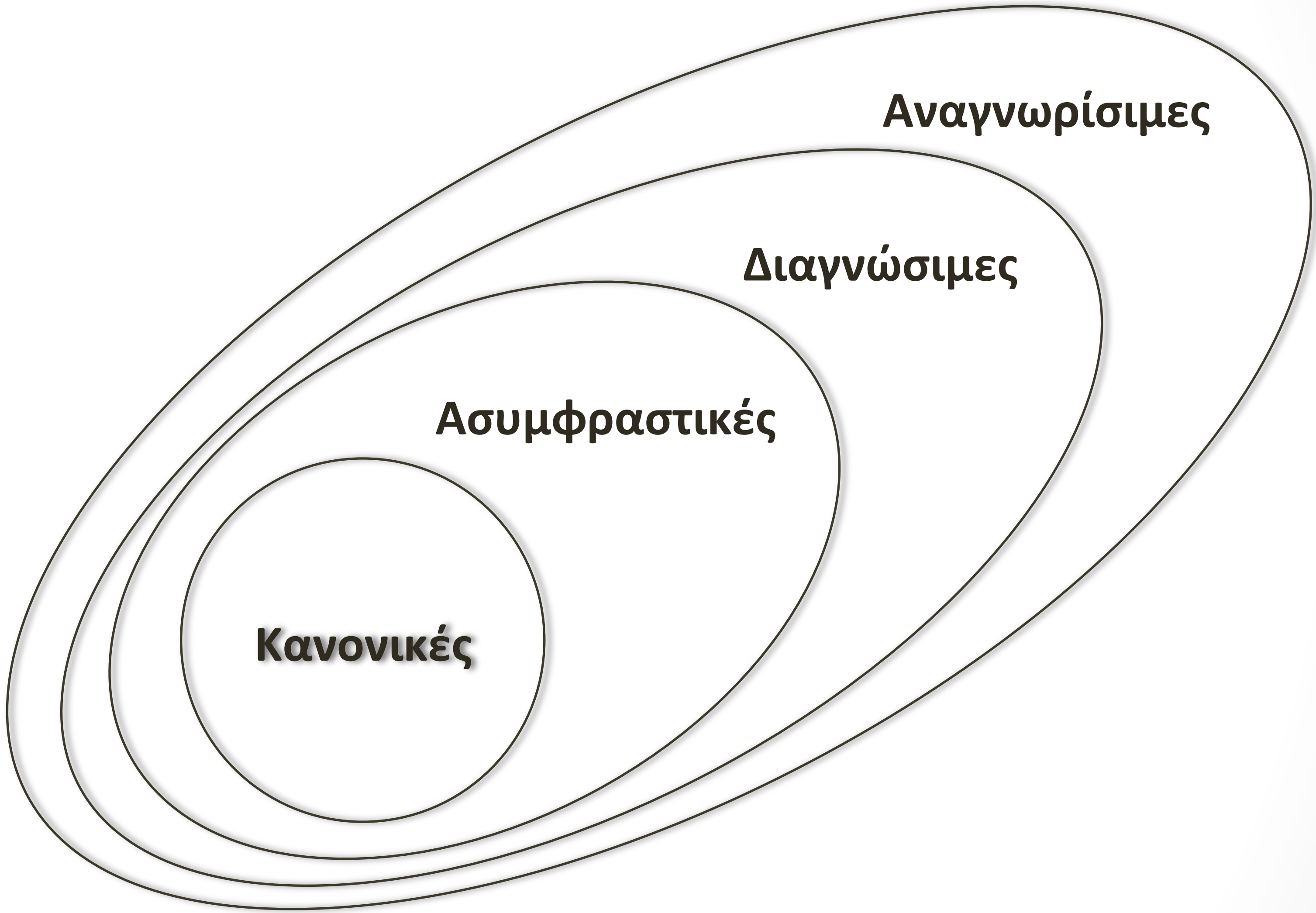
- Ιδέα 1: Να προσομοιωθεί το αυτόματο στοίβας που αναγνωρίζει την A από μια μηχανή Turing
  - Σχετικά απλή προσομοίωση
  - Όμως: Αν κάποιοι κλάδοι του αυτομάτου γράφουν και διαβάζουν από την στοίβα επ'απειρον τότε η TM δεν τερματίζει.

Κάθε Ασυμφραστική είναι διαγνώσιμη

- Ιδέα 2: Να ελέγξουμε αν η γραμματική που παράγει την Α μπορεί να προσομοιωθεί από TM
  - Χρήση μηχανής που διαγιγνώσκει την γλώσσα ΠΑΡΑΓΩΓΗ/CFG

- M_G=‘ Για είσοδο w:
  1. Εκτελούμε την TM S πάνω στην είσοδο <G,w>
  2. Εάν η S αποδεχθεί τότε αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.’

Σχέση Γλωσσών



Ερωτήσεις;