ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 12: Μηχανές Turing

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Εισαγωγή στις Μηχανές Turing (TM)

- Τυπικός Ορισμός Μηχανής Turing (3.1.1)

Τι είδαμε μέχρι στιγμής…

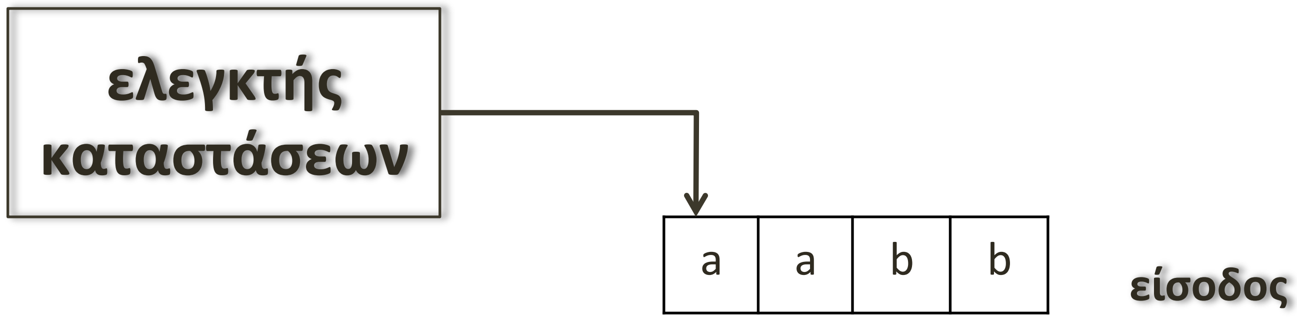
- Πεπερασμένα Αυτόματα
  - Το πιο απλό υπολογιστικό μοντέλο
  - Μικρή μνήμη
- Αυτόματα στοίβας
  - **Άπειρη μνήμη** – προσπελάσιμη μόνο ως στοίβα
    - **Μόνο το τελευταίο στοιχείο μπορεί να αναληφθεί**
- Αδυνατούν να διεκπεραιώσουν πολύ μικρές εργασίες
  - **Δεν μπορούν να περιγράψουν μοντέλα υπολογιστών γενικής χρήσης**

Ένα πιο ισχυρό υπολογιστικό μοντέλο...

- **Μηχανή Turing** (Alan Turing 1936)
  - Πολύ πιο ισχυρό μοντέλο
- Διαθέτει **άπειρη μνήμη**
  - Μπορεί να την προσπελάσει χωρίς περιορισμούς
- Μπορεί να **κάνει ακριβώς ότι και ένας υπολογιστής**
- Υπάρχουν ακόμη προβλήματα που δεν μπορεί να τα επιλύσει.

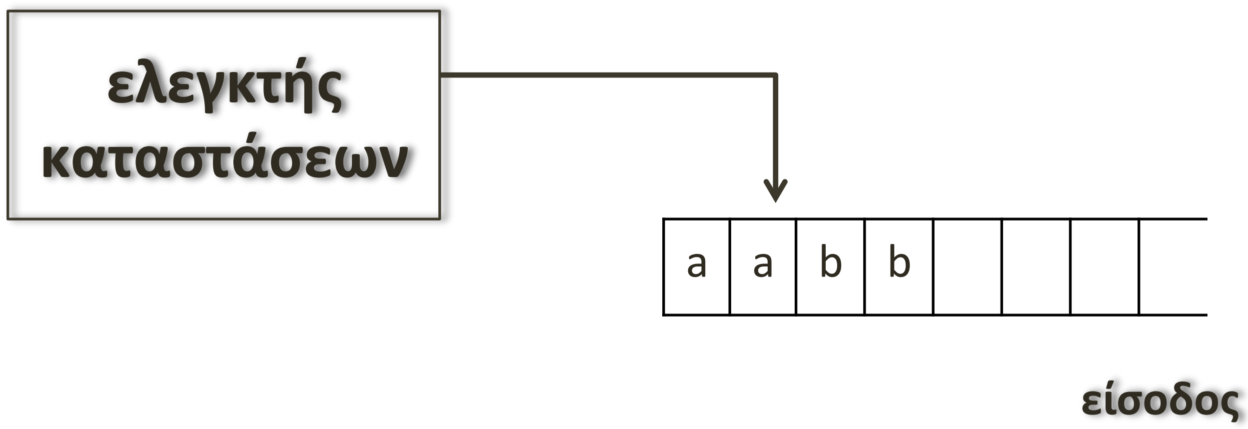
FA vs TM

- Σχηματική Αναπαράσταση πεπερασμένου αυτόματου
  - Ελεγκτής: Καταστάσεις και Μεταβάσεις Καταστάσεων
  - Ταινία: Λέξη Εισόδου
  - Βέλος : Κεφαλή Εισόδου



FA vs TM

- Σχηματική Αναπαράσταση Μηχανής Turing
  - Ελεγκτής: Καταστάσεις και Μεταβάσεις Καταστάσεων
    - Καταστάσεις αποδοχής και απόρριψης
    - Αν δεν φτάσουμε σε αποδοχή ή απόρριψη η TM δεν τερματίζει
  - Ταινία: Άπειρη
    - Αρχικά περιέχει λέξη εισόδου και σύμβολα διαστήματος στις υπόλοιπες θέσεις
  - Βέλος : Κεφαλή Εισόδου
    - Μετακινείται δεξιά και αριστερά
    - Δυνατότητα να διαβάζει και να γράφει



Γενική λειτουργία των TM

- Υποθέστε ότι έχουμε την γλώσσα B={w#w|w∈{0,1}*}
  - Μετακινούμαστε παλινδρομικά επάνω στην ταινία σε ομόλογες θέσεις του συμβόλου #, ελέγχουμε αν έχουν το ίδιο σύμβολο, και διαγράφουμε τα σύμβολα που ελέγχουμε. Εάν δεν υπάρχει το # τότε απορρίπτουμε.
  - Όταν έχουν διαγραφεί όλα τα σύμβολα αριστερά του # ελέγχουμε αν έχουν απομείνει μη διαγεγραμμένα σύμβολα στα δεξιά του #. Εάν ναι, απορρίπτουμε, διαφορετικά αποδεχόμαστε.

x	x	1	0	#	x	1	1	0

Τυπικός ορισμός PDA

Ορισμός

***Μηχανή Turing** είναι μια επτάδα*

1. ***Q** = **πεπερασμένο** σύνολο καταστάσεων*
2. ***Σ** = αλφάβητο εισόδου, που δεν περιέχει το σύμβολο διαστήματος (πεπερασμένο)*
3. ***Γ** = αλφάβητο ταινίας, με* $\sqcup \in \Gamma$ and $\Sigma \subseteq \Gamma$
4. ***Συνάρτηση μετάβασης** $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{A,\Delta\}$*

   *Όταν το αυτόματο είναι στην κατάσταση **q** $\in$ **Q** και στην τρέχουσα θέση της κεφαλής είναι το σύμβολο **a** τότε εάν* **δ (q,α)=(q',b,A)** **αντικαθιστά το α με b, μεταβαίνουμε στην κατάσταση q' και η κεφαλή κινείται μια θέση αριστερά**
5. $q_o \in Q$ *= εναρκτήρια κατάσταση*
6. $q_{αποδοχής} \in Q$ *= κατάσταση αποδοχής*
7. $q_{απορριψης} \in Q$ *= κατάσταση απόρριψης, με* $q_{απόρριψης} \neq q_{αποδοχής}$

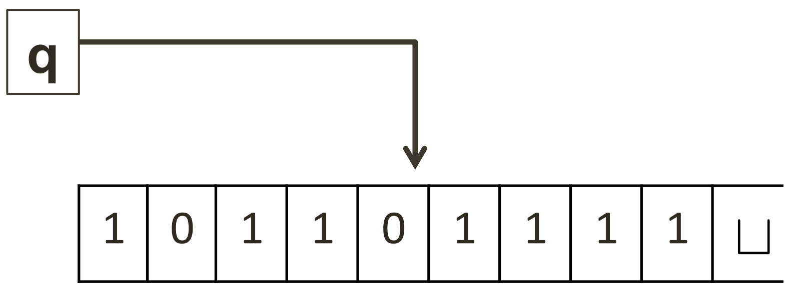
Πως υπολογίζει η TM

- Μια TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ υπολογίζει ως εξής:
- Αρχικά:
  - Η λέξη $w = w_1 w_2 \ldots w_n, \forall w_i \in \Sigma$ καταχωρείται στις n αριστερότερες θέσεις της ταινίας
  - Η κεφαλή είναι τοποθετημένη στη αριστερότερη θέση
  - Το υπόλοιπο της ταινίας περιέχει το σύμβολο $\sqcup$
    - Το πρώτο $\sqcup$ σηματοδοτεί το τέλος της λέξης εισόδου
- Μετά την εκκίνηση
  - Η M ακολουθεί τις μεταβάσεις
  - Συνεχίζουμε μέχρι να φτάσουμε σε κατάσταση αποδοχής ή απόρριψης.

Ορισμοί

- **Φάση** της μηχανής
  - Κατάσταση,
  - Περιεχόμενα ταινίας, και
  - Θέση κεφαλής

- Αναπαράσταση φάσης 1011q01111
  - Η ταινία περιέχει την λέξη 101101111
  - Βρισκόμαστε στην κατάσταση q
  - Η κεφαλή βρίσκεται στο δεύτερο 0



Ορισμοί

- Μια φάση Φ1 **αποδίδει** μια φάση Φ2 εάν μπορούμε να μεταβούμε από την Φ1 στη Φ2 με ένα μόνο βήμα
  - Π.χ.η ua q_i bv αποδίδει την u q_j acv εάν υπάρχει μετάβαση $\delta(q_i, b) = (q_j, c, A)$

- **Εναρκτήρια φάση** για είσοδο w: q_0w
  - Αρχική κατάσταση
  - Κεφαλή στην αριστερότερη θέση

- **Αποδεκτική φάση**: Μ βρίσκεται στην κατάσταση αποδοχής

- **Απορριπτική φάση**: Μ βρίσκεται στην κατάσταση απόρριψης

- **Τερματικές φάσεις**: αποδεκτική και απορριπτική

Τυπικός ορισμός του υπολογισμού

- M **αποδέχεται** την είσοδο w εάν υπάρχει ακολουθία $Φ_1$, $Φ_2$, ...,$Φ_k$ τ.ω.
  - η $Φ_1$ είναι εναρκτήρια φάση της M για την w
  - Κάθε $Φ_i$ αποδίδει την $Φ_{i+1}$, και
  - Η φάση $Φ_κ$ είναι αποδεκτική

- L(M) η γλώσσα της M (M αναγνωρίζει την L):
  - L = σύνολο των λέξεων που αποδέχεται η M

Ορισμοί

Ορισμός
Μια γλώσσα λέγεται κατά Turing αναγνωρίσιμη ή αναδρομικά απαριθμίσιμη εάν υπάρχει μηχανή Turing που την αναγνωρίζει (αποδέχεται τις λέξεις που ανήκουν στην γλώσσα).

Ορισμός
Μια γλώσσα λέγεται κατά Turing διαγνώσιμη ή αναδρομική εάν υπάρχει μηχανή Turing που την διαγιγνώσκει (τερματίζει αποδέχοντας ή απορρίπτοντας σε όλες τις λέξεις).

Συναναδρομικά Απαριθμίσιμες

- Μια γλώσσα είναι **συναναδρομικά απαριθμήσιμη** αν υπάρχει μια μηχανή που να αναγνωρίζει το συμπλήρωμα της γλώσσας.

- Κάθε αναδρομική γλώσσα είναι αναδρομικά απαριθμίσιμη και συναναδρομικά απαριθμίσιμη.

- **Πρόταση**. Μια γλώσσα είναι αναδρομική αν και μόνο αν είναι αναδρομικά απαριθμίσιμη και συναναδρομικά απαριθμίσιμη.
  - Η τομή των αναδρομικά απαριθμήσιμων και συναναδρομικά απαριθμίσιμων γλωσσών είναι το σύνολο των αναδρομικών γλωσσών.

Παράδειγμα 1

- $A = \{0^{2^n} : n \geq 0\}$

- Ιδέα:
  - Διαιρούμε κάθε φορά το πλήθος των μηδενικών με το 2
  - Αν μας μείνουν 0 ή 1 μηδενικά αποδεχόμαστε
  - Αν μας μείνουν περιττά μηδενικά απορρίπτουμε

Παράδειγμα 1

- Πως υλοποιούμε την παραπάνω ιδέα με μια μηχανή Turing M2?
- M2 = Για είσοδο w:
  1. Διατρέχουμε την ταινία από αριστερά προς τα δεξιά διαγράφοντας κάθε δεύτερο 0
  2. Εάν στο στάδιο 1 η ταινία περιείχε μόνο ένα 0, **αποδεχόμαστε**
  3. Εάν στο στάδιο 1 η ταινία περιείχε περισσότερα από ένα μηδενικά και το πλήθος τους ήταν περιττό, **απορρίπτουμε**
  4. Επιστρέφουμε την κεφαλή στο αριστερό άκρο της ταινίας
  5. Μεταβαίνουμε στο στάδιο 1.

Παράδειγμα 1

- Τυπική περιγραφή
  - Q={q1, q2, q3, q4, q5, qs, qe}
  - Σ={0}
  - Γ={0, x, ⊔}
  - Μεταβάσεις?

Παράδειγμα 2

- $B=\{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$

- M3 = Για είσοδο w:
  - Μετακινούμαστε παλινδρομικά επάνω στην ταινία σε ομόλογες θέσεις του συμβόλου #, ελέγχουμε αν έχουν το ίδιο σύμβολο, και διαγράφουμε τα σύμβολα που ελέγχουμε. Εάν δεν υπάρχει το # τότε **απορρίπτουμε**.
  - Όταν έχουν διαγραφεί όλα τα σύμβολα αριστερά του # ελέγχουμε αν έχουν απομείνει μη διαγεγραμμένα σύμβολα στα δεξιά του #. Εάν ναι, **απορρίπτουμε**, διαφορετικά **αποδεχόμαστε**.

Παράδειγμα 2

- Τυπική περιγραφή
  - Q={q1,…,q8, qs, qe}
  - Σ={0, 1, #}
  - Γ={0, 1, #, x, ⊔}

Παράδειγμα 3

- C={w: w έχει το ίδιο πλήθος από 0 και 1}

- Ιδέα:
  - Για κάθε ένα 0 που βρίσκουμε να ελέγχουμε αν υπάρχει ένα 1.
  - Αν δεν βρούμε 0 τότε δεν πρέπει να βρούμε ούτε 1

Παράδειγμα 3

- Περιγραφή μηχανής M4

- Για είσοδο w:
  1. Σαρώνουμε την ταινία και σημαδεύουμε το πρώτο 0 που δεν είναι σημαδεμένο. Εάν δεν υπάρχει τέτοιο 0 μεταβαίνουμε στο στάδιο 4. Διαφορετικά μεταφέρουμε την κεφαλή στην αρχή της ταινίας.
  2. Σαρώνουμε την ταινία και σημαδεύουμε το πρώτο 1 που δεν είναι σημαδεμένο. Εάν δεν υπάρχει τέτοιο 1 **απορρίπτουμε**.
  3. Επαναφέρουμε την κεφαλή στην αρχή και πάμε στο στάδιο 1.
  4. Επαναφέρουμε την κεφαλή στην αρχή και σαρώνουμε για 1. Εάν υπάρχουν μη σημαδεμένα 1 τότε **απορρίπτουμε**. Αλλιώς **αποδεχόμαστε**.

Ερωτήσεις;