ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 11: Μη Ασυμφραστικές Γλώσσες

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Εισαγωγικά (2.3)
- Το Λήμμα της Άντλησης για ασυμφραστικές γλώσσες (2.3.1)
- Παραδείγματα

Πότε μια γλώσσα δεν είναι ασυμφραστική;

- Έστω γλώσσα $B=\{a^{\kappa}b^{\kappa}c^{\kappa} \mid \kappa \geq 0\}$
  - Υπάρχει ασυμφραστική γραμματική ή αυτόματο στοίβας που να την αναγνωρίζει;
  - **ΟΧΙ**
    - **Δεν μπορούμε να κάνουμε περισσότερες από μια αντικαταστάσεις σε μια ασυμφραστική γραμματική**
    - **Με μια στοίβα μπορούμε να υπολογίσουμε τις εμφανίσεις του b με το a αλλά δεν θα μείνουν σύμβολα στη στοίβα για να μετρήσουμε για το c**

Λήμμα της Άντλησης

- Πως αποδεικνύουμε ότι μια γλώσσα ΔΕΝ είναι ασυμφραστική;
  - ΛΗΜΜΑ ΑΝΤΛΗΣΗΣ

Λήμμα της Άντλησης για ασυμφραστικές γλώσσες:
Για κάθε ασυμφραστική γλώσσα A, ***υπάρχει αριθμός p*** *(το μήκος της άντλησης αυτής) τέτοιος ώστε* ***κάθε λέξη w με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του p*** *να μπορεί να χωριστεί σε* ***πέντε τμήματα***, ***w = uvxyz***, *που να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:*

1. ***για κάθε $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$***
2. ***$|vy| > 0$, και***
3. ***$|vxy| \leq p$.***

Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Έστω G μια ασυμφραστική γραμματική που παράγει την A

- Θέλουμε να δείξουμε:
  - Κάθε λέξη της A με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του p μπορεί να χωριστεί σε πέντε μέρη uvxyz που να ικανοποιούν τις συνθήκες του λήμματος

- Έστω b το μέγιστο πλήθος συμβόλων στο δεξί μέλος κάθε κανόνα της G
  - Θεωρούμε ότι $b \geq 2$
  - Για οποιοδήποτε συντακτικό δέντρο της G κάθε κόμβος έχει $\leq b$ θυγατρικούς κόμβους

Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Σε απόσταση 1 από την εναρκτήρια μεταβλητή => το πολύ b φύλλα

- Σε απόσταση 2 από την εναρκτήρια μεταβλητή => το πολύ b^2 φύλλα

- Σε απόσταση h από την εναρκτήρια μεταβλητή => το πολύ b^h φύλλα

- Εάν το ύψος του συντακτικού δέντρου ≤ h
  - **Μήκος της παραγόμενης λέξης $\leq b^h$**

- Εάν το μήκος της λέξης $\geq b^{h+1}$
  - **Ύψος κάθε δέντρου που παράγει την λέξη ≥h+1**

Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Επιλέγουμε ως μήκος άντλησης την τιμή **$p=b^{|V|+1}$**
  - |V|: πλήθος μεταβλητών(μη-τερματικών) της G
- Υποθέτουμε ότι έχουμε μια λέξη $s \in A$ τ.ω.
  - $|s| = n$ και $n \geq p$
  - **Κάθε συντακτικό δέντρο της s έχει ύψος ≥ |V|+1**
- Έστω Δ ένα συντακτικό δέντρο που παράγει την s
  - Ύψος Δ ≥ |V|+1
- Άρα το Δ περιέχει κάποια διαδρομή μήκους |V|+1 από την ρίζα στα φύλλα
- Πόσοι κόμβοι εμφανίζονται στην διαδρομή;
  - **|V|+2:** ένα τερματικό σύμβολο και |V|+1 μεταβλητές

Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

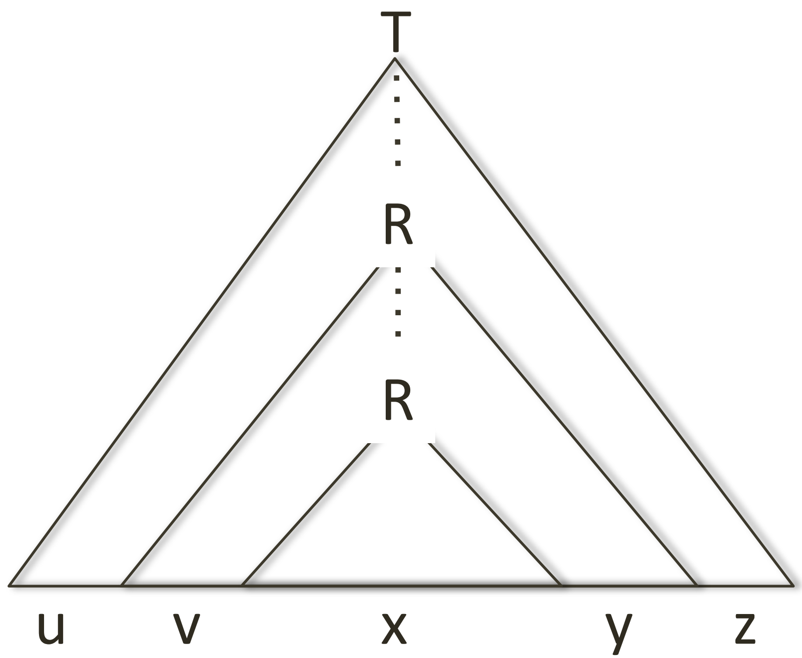
- Άρα στην διαδρομή περιέχονται |V|+1 μεταβλητές

- Αφού η G περιέχει |V| μεταβλητές
  - **Αρχή του Περιστερώνα: Υπάρχει μια μεταβλητή R που εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές στη διαδρομή**

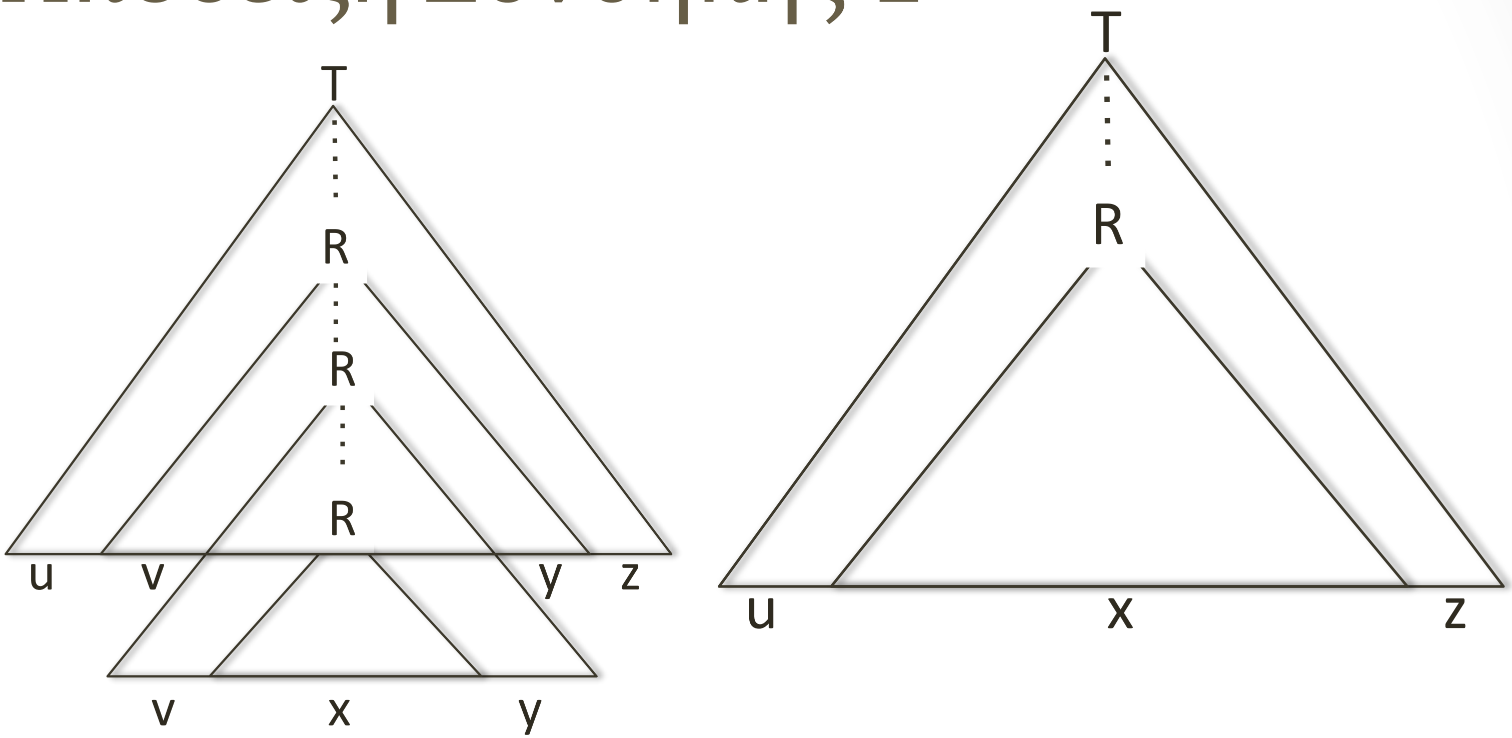
Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Έστω ότι η μεταβλητή που επαναλαμβάνεται είναι η R

- Μπορούμε να χωρίσουμε την s σε πέντε μέρη uvxyz
  - Πρώτη εμφάνιση της R παράγει την vxy
  - Δεύτερη εμφάνιση της R παράγει μόνο την x



Απόδειξη Συνθήκης 1



- Αφού τα δύο υποδέντρα προκύπτουν από την ίδια μεταβλητή μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ένα με το άλλο
- Αριστερά: Αντικαθιστούμε μικρό με μεγάλο υποδέντρο
  - **Παίρνουμε λέξη uv^2xy^2z**
- Δεξιά: Αντικαθιστούμε μεγάλο με μικρό υποδέντρο
  - **Παίρνουμε λέξη uxz**

Απόδειξη Συνθηκών 2 και 3

Συνθήκη 2: $|vy| > 0$

- Οι λέξεις v και y δεν είναι ταυτόχρονα κενές
- Εάν και οι δύο ήταν κενές τότε αντικαθιστώντας το μεγάλο με το μικρό υποδέντρο το δέντρο θα παρήγαγε την s αλλά θα είχε λιγότερους κόμβους από το Δ
  - Αδύνατον αφού αρχικά επιλέξαμε το ελάχιστο δέντρο για την s

Συνθήκη 3: $|vxy| \leq p$

- Η vxy παράγεται από το ψηλότερο R
- Οι δυο εμφανίσεις τις R εμφανίζονται στις πρώτες |V|+1 μεταβλητές
- Άρα το υποδέντρο στο οποίο η R παράγει την vxy έχει ύψος το πολύ |V|+1
- Επομένως παράγει **λέξη μήκους το πολύ $b^{|V|+1}=p$**

Βήματα Απόδειξης Μη Ασυμφραστικότητας

- Δοθέντος μιας γλώσσας B πως δείχνουμε ότι δεν είναι ασυμφραστική;
- Βήμα 1:
  - Υποθέτουμε ότι η B είναι ασυμφραστική
- Βήμα 2:
  - Θεωρούμε ότι η B περιέχει λέξεις μήκους μεγαλύτερο ή ίσο με κάποιο p (μήκος άντλησης)
- Βήμα 3:
  - Βρίσκουμε μια λέξη w της B δεν επιδέχεται άντληση
- Βήμα 4:
  - Μελετούμε όλες τις δυνατές διαιρέσεις της w στα τμήματα u v x y z και να δείχνουμε ότι η υπάρχει τιμή για το i τέτοια ώστε $uv^ixy^iz \notin B$ => ΑΤΟΠΟ

Παράδειγμα 1

- Έστω $B=\{a^{\kappa}b^{\kappa}c^{\kappa} \mid \kappa \geq 0\}$

- Βήμα 1:
  - Υποθέτουμε ότι B είναι ασυμφραστική

- Βήμα 2:
  - Έστω p το μήκος της άντλησης

- Βήμα 3:
  - Επιλέγουμε την λέξη $w=a^{p}b^{p}c^{p}$
  - Από το λήμμα της άντλησης w=uvxyz και για i≥0, $uv^{i}xy^{i}z \in B$

Παράδειγμα 1

- Βήμα 4:
  1. Αμφότερες οι λέξεις v και y μόνο ένα είδος συμβόλων
     - Τότε η λέξη uv^2xy^2z δεν περιέχει το ίδιο πλήθος a,b,c => άτοπο
  2. Κάποια από τις v και y περιέχει περισσότερα από ένα είδος συμβόλων
     - Τότε η λέξη uv^2xy^2z μπορεί να περιέχει το ίδιο πλήθος a,b,c αλλά σε λανθασμένη σειρά=> άτοπο
- Όλες οι περιπτώσεις μας οδηγούν σε άτοπο
  - Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε άντληση στη λέξη $a^pb^pc^p$
  - Η B δεν είναι ασυμφραστική

Ερωτήσεις;