ΕΠΛ 211: Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 10: Αυτόματα Στοίβας ΙΙ

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Ισοδυναμία αυτομάτων στοίβας με ασυμφραστικές γραμματικές (2.2.3)

Ισοδυναμία PDA με CFG

Θεώρημα:
Μια γλώσσα είναι ασυμφραστική εάν και μόνο εάν υπάρχει αυτόματο στοίβας που την αναγνωρίζει.

Λήμμα 1:
Εάν μια γλώσσα είναι ασυμφραστική τότε υπάρχει αυτόματο στοίβας που την αναγνωρίζει.

Λήμμα 2:
Κάθε γλώσσα που αναγνωρίζεται από ένα αυτόματο στοίβας είναι ασυμφραστική.

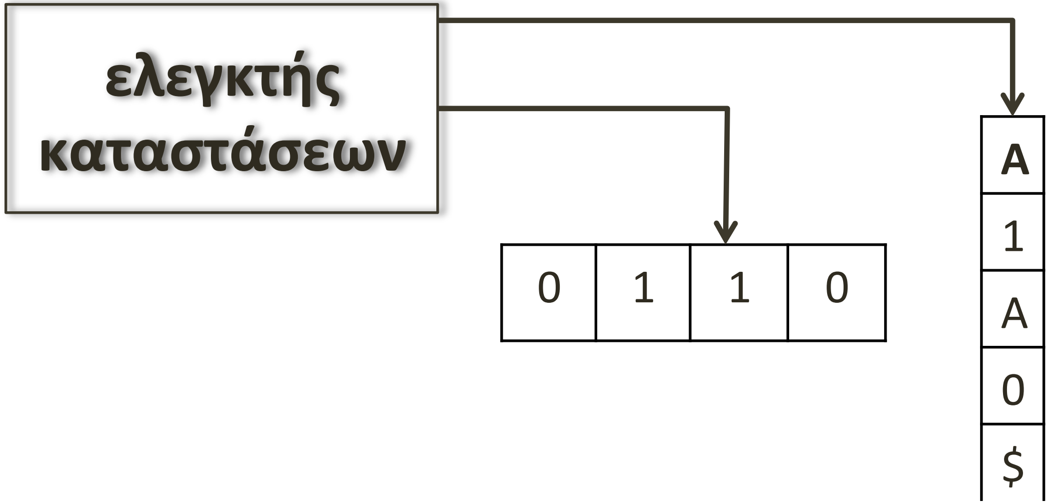
CFL => PDA που την αναγνωρίζει

- Εξ' ορισμού για κάθε ασυμφραστική γλώσσα υπάρχει ασυμφραστική γραμματική που την περιγράφει.

- Ιδέα Απόδειξης:
  - Να βρούμε κάποιο τρόπο να μετατρέπουμε μια ασυμφραστική γραμματική G σε ένα **ισοδύναμο** αυτόματο στοίβας P.

- **Δυσκολία:** Πως μπορούμε να γνωρίζουμε ποια είναι η σωστή αντικατάσταση για τα μη-τερματικά σύμβολα;
  - Σε κάθε βήμα της παραγωγής διαλέγουμε μη-ντετερμινιστικά κάποιον από τους κανόνες για κάποια μεταβλητή. Αρα το αυτόματο **«μαντεύει» τις σωστές αντικαταστάσεις** και **ελέγχει αν «μάντεψε» σωστά**.

Η κατασκευή περιγραφικά



- Ιδέα:
  - Γράφε ενδιάμεσες λέξεις στη στοίβα
  - Αντικατέστησε τα μη-τερματικά της στοίβας με ενδιάμεσες λέξεις

- Δυσκολία: Πως θα αντικαταστήσουμε μη-τερματικά που δεν βρίσκονται στην κορυφή της στοίβας;

Η κατασκευή περιγραφικά

- Το αυτόματο μιμείται μια αριστερή παραγωγή της συμβολοσειράς εισόδου

- Βήμα 1: Αποθέτουμε στην στοίβα το ειδικό σύμβολο $ και την εναρκτήρια μεταβλητή

- Βήμα 2: Επαναλαμβάνουμε τα ακόλουθα
  - Εάν στην κορυφή της στοίβας έχουμε μη-τερματικό σύμβολο A, επιλέγουμε μη-ντετερμινιστικά έναν από τους κανόνες του A και **αντικαθιστούμε το μη-τερματικό με την λέξη στο δεξί μέρος του κανόνα**
  - Εάν στην κορυφή της στοίβας είναι ένα τερματικό σύμβολο α, **διαβάζουμε το επόμενο σύμβολο από την είσοδο** και συγκρίνουμε με το α.
    - Τα σύμβολα συμπίπτουν => συνεχίζουμε
    - Τα σύμβολα δεν συμπίπτουν απορρίπτουμε (σε αυτό το μονοπάτι)
  - Εάν στην κορυφή της στοίβας είναι το $ πάμε στην **κατάσταση αποδοχής**.
    - Αν η λέξη εισόδου έχει εξαντληθεί γίνετε αποδεκτή.

Αντικατάσταση συμβόλου με λέξη

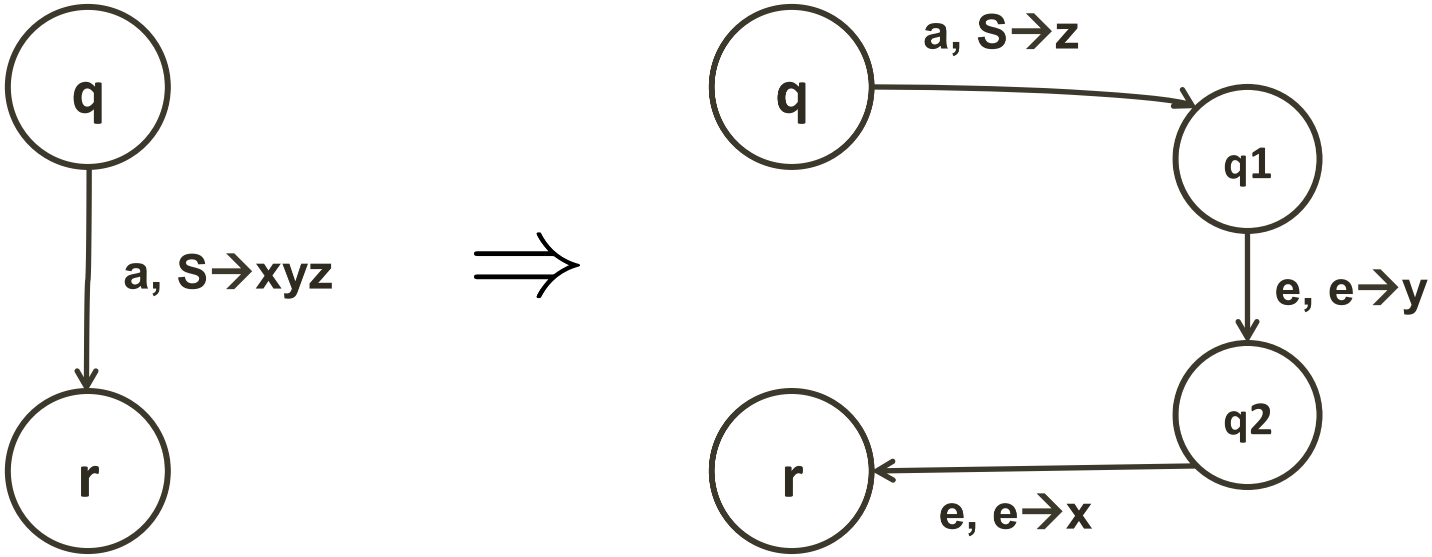
- Έστω q και r δύο καταστάσεις του αυτόματου

- Θέλουμε να μεταβούμε από την q στην r όταν διαβάσουμε a στην είσοδο και ένα σύμβολο S στη στοίβα, και να αποθέσουμε στη στοίβα τη λέξη $u=u_1 \dots u_n$

- Βήμα 1: **Εισάγουμε νέες καταστάσεις** $q_1 \dots q_{n-1}$

- Βήμα 2: **Τροποποιούμε την συνάρτηση μεταβάσεων**
  - Προσθέτουμε στο δ(q,a,S) το μέλος (q_1,u_n)
  - Εισάγουμε τι μεταβάσεις $\delta(q_1,e,e)=\{(q_2,u_{n-1})\} \dots \delta(q_{n-1},e,e)=\{(r,u_1)\}$

Αντικατάσταση συμβόλου με λέξη



Συντομογραφία: (r,xyz)∈δ(q,a,S)

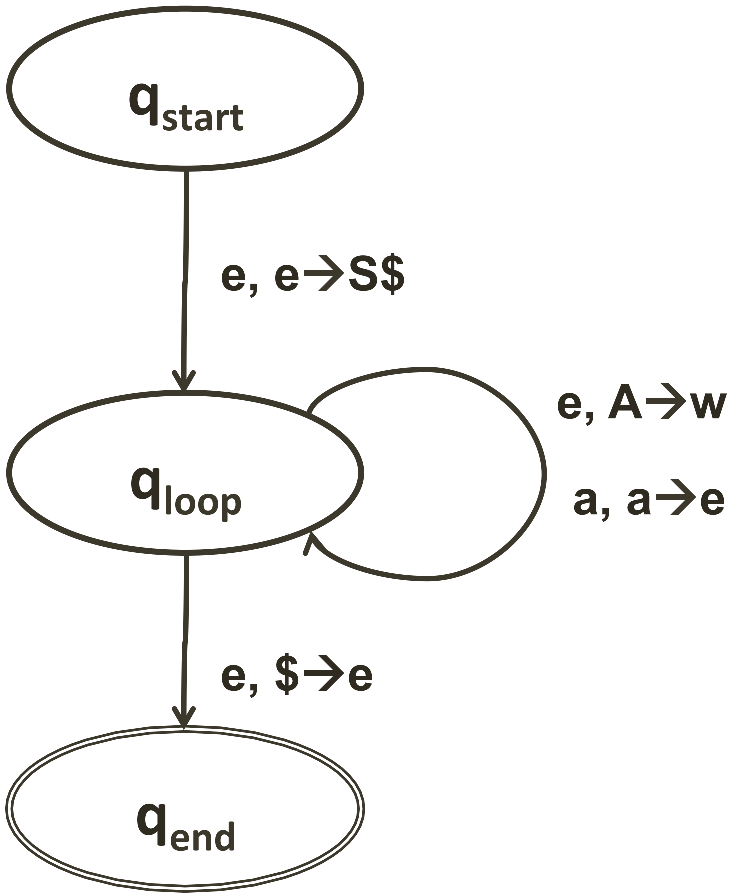
Τυπική Περιγραφή Κατασκευής

- Θέλουμε $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$

- $Q = \{q_{start}, q_{loop}, q_{end}\} \cup E$
  - E είναι το σύνολο των καταστάσεων που απαιτούνται για τις αντικαταστάσεις των μεταβλητών με λέξεις

- Η συνάρτηση μεταβάσεων είναι η εξής:
  - $\delta(q_{start}, e, e) = \{(q_{loop}, S\$)\}$
  - Περίπτωση 1: $\delta(q_{loop}, e, A) = \{(q_{loop}, w) | A \rightarrow w \in R\}$
  - Περίπτωση 2: $\delta(q_{loop}, a, a) = \{(q_{loop}, e)\}$
  - Περίπτωση 3: $\delta(q_{loop}, e, \$) = \{(q_{end}, e)\}$

Τυπική Περιγραφή Κατασκευής



Παράδειγμα

- Κατασκευή αυτομάτου στοίβας από γραμματική

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aTb|b \\ T & \rightarrow & Ta|e \end{array}$$

  - $\delta(q_{start}, e, e)=(q, S\$)$
  - $\delta(q_{loop}, e, S)=(q, aTb)$
  - $\delta(q_{loop}, e, S)=(q, b)$
  - $\delta(q_{loop}, e, T)=(q, Ta)$
  - $\delta(q_{loop}, e, T)=(q, e)$
  - $\delta(q_{loop}, a, a)=(q, e)$
  - $\delta(q_{loop}, b, b)=(q, e)$
  - $\delta(q_{loop}, e, \$)=(q_{end}, e)$

Παράδειγμα 2

- $L=\{w\#w^R \mid w\in\{a,b\}^*\}$
- $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \#$
  - $\delta(q_{start}, e, e)=(q, S\$)$
  - $\delta(q_{loop}, e, S)=(q, aSa)$
  - $\delta(q_{loop}, e, S)=(q, bSb)$
  - $\delta(q_{loop}, e, S)=(q, \#)$
  - $\delta(q_{loop}, a, a)=(q, e)$
  - $\delta(q_{loop}, b, b)=(q, e)$
  - $\delta(q_{loop}, \#, \#)=(q, e)$
  - $\delta(q_{loop}, e, \$)=(q_{end}, e)$

PDA(L) => L είναι ασυμφραστική

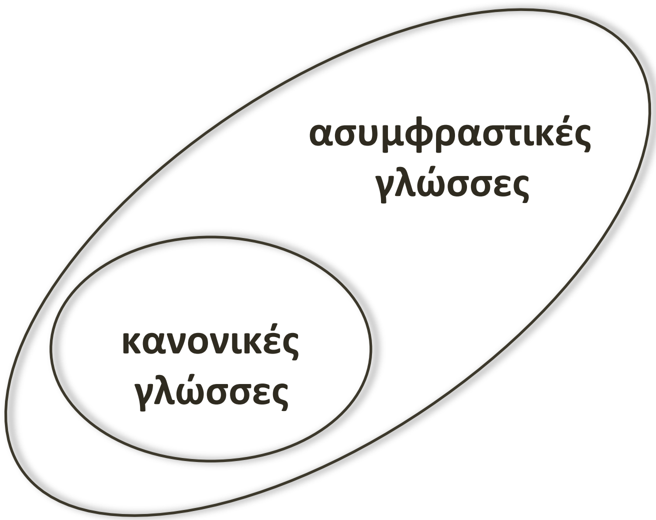
- Αποδεικτική Ιδέα: Να βρούμε μια κατασκευή που να μετατρέπουμε δεδομένο PDA σε ασυμφραστική γραμματική.

- Κατασκευαστική Ιδέα:
  - Για κάθε ζεύγος καταστάσεων p, q του αυτόματου θα υπάρχει μια μεταβλητή A_{pq} που να **παράγει όλες τις λέξεις** που μπορούν να οδηγήσουν το αυτόματο από την p με κενή στοίβα στην q με κενή στοίβα.

- Απόδειξη Παραλείπεται.

Πόρισμα

- Κάθε κανονική γλώσσα είναι και ασυμφραστική
  - Αυτόματα στοίβας αναγνωρίζουν την κλάση των ασυμφραστικών γλωσσών
  - Πεπερασμένα αυτόματα αναγνωρίζουν τις κανονικές γλώσσες
  - Κάθε πεπερασμενο αυτόματο είναι αυτόματο στοίβας που αγνοεί την στοίβα.



Ερωτήσεις;