

ΕΠΛ 211:

Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 9: Αυτόματα Στοίβας (Pushdown Automata - PDA)

Τι θα κάνουμε σήμερα...

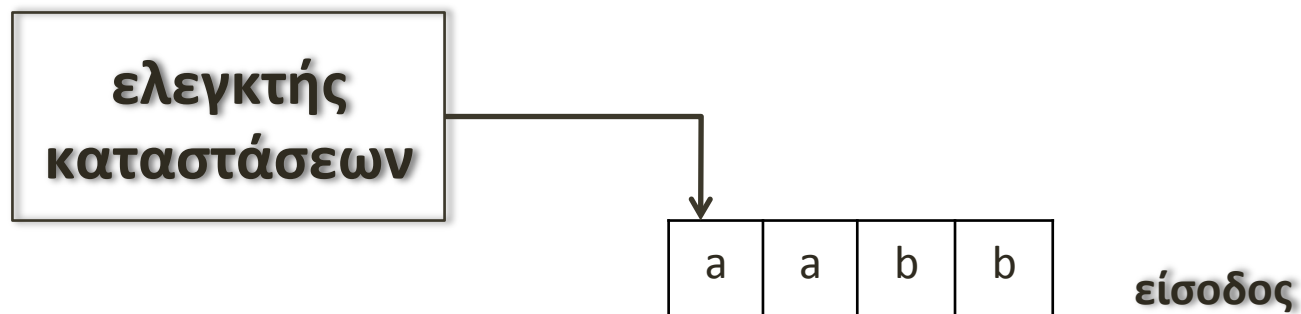
- Εισαγωγή στα Αυτόματα Στοίβας
- Τυπικός Ορισμός Αυτομάτου Στοίβας (2.2.1)
- Παραδείγματα (2.2.2)

Αυτόματα Στοίβας (PDA)

- Τι είναι το αυτόματο στοίβας;
 - **Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο** με επιπλέον «εξάρτημα» - **ΣΤΟΙΒΑ**
- Τι παρέχει η στοίβα;
 - **Επιπρόσθετη μνήμη** - Πέραν της πεπερασμένης μνήμης που προσφέρουν οι καταστάσεις του αυτόματου
 - Επιτρέπει στα αυτόματα να **αναγνωρίζουν μη κανονικές γλώσσες**
- **Ισοδύναμα με ασυμφραστικές γραμματικές**
 - Επιτρέπουν την **αναγνώριση** ασυμφραστικών γλωσσών.

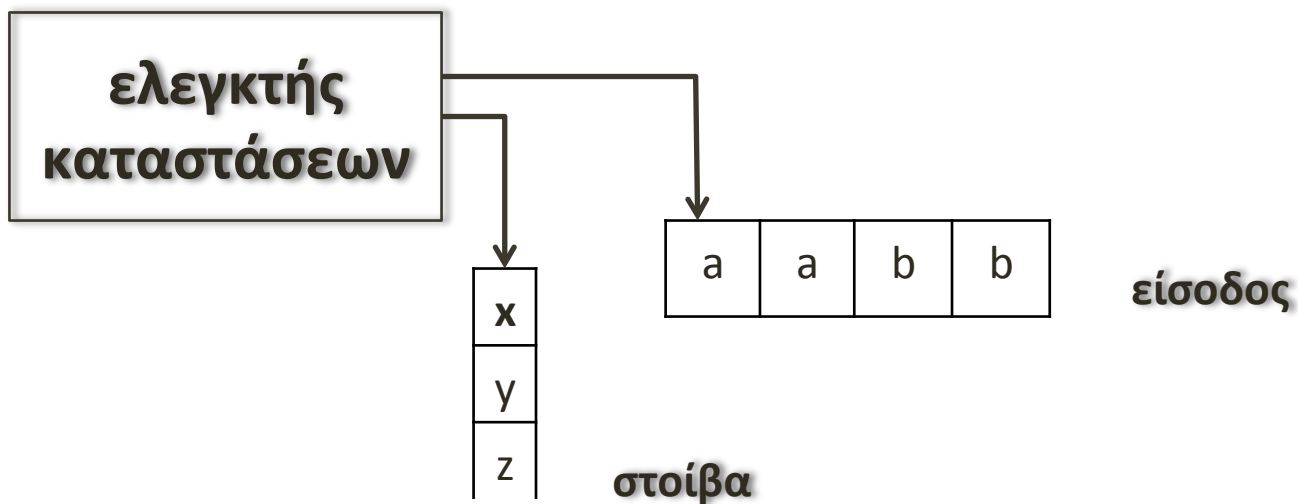
FA vs PDA

- Σχηματική Αναπαράσταση πεπερασμένου αυτόματου
 - **Ελεγκτής**: Καταστάσεις και Μεταβάσεις Καταστάσεων
 - **Ταινία**: Λέξη Εισόδου
 - **Βέλος** : Κεφαλή Εισόδου



FA vs PDA

- Σχηματική Αναπαράσταση πεπερασμένου αυτόματου
 - **Ελεγκτής**: Καταστάσεις και Μεταβάσεις Καταστάσεων
 - **Ταινία**: Λέξη Εισόδου
 - **Βέλος** : Κεφαλή Εισόδου
 - **Στοιίβα**: Εγγραφή και διάβασμα συμβόλων



Στοιίβα: Εγγραφή και Ανάγνωση

- Είδος αποθήκευσης **LIFO**: “last in first out”
- **Εγγραφή**: Βάζει το νέο σύμβολο στην κορυφή και πιέζει τα υπόλοιπα σύμβολα προς τα κάτω.
 - απόθεση – push
- **Ανάγνωση**: Επιστρέφει το σύμβολο που βρίσκεται στην κορυφή και το αφαιρεί από την στοίβα.
 - ανάληψη – pop
- **Απεριόριστος** αποθηκευτικός χώρος

Παράδειγμα

- Γλώσσα $L = \{1^n 0^n \mid n \geq 0\}$
- **Δεν μπορεί να αναγνωριστεί από κανένα πεπερασμένο αυτόματο**
 - Λόγω πεπερασμένου αριθμού καταστάσεων
- Αναγνωρίζεται από αυτόματα στοίβας
 - Διαβάζουμε σύμβολα από την είσοδο
 - Αν το σύμβολο είναι 0 το αποθέτουμε στη στοίβα
 - Μόλις δούμε το πρώτο 1 βγάζουμε ένα 0 από την στοίβα για κάθε 1 που διαβάζουμε
 - Εάν όταν φτάσουμε στο τέλος της εισόδου η στοίβα είναι κενή τότε το αυτόματο αποδέχεται την λέξη.

Σημείωση

- Τα ντετερμινιστικά αυτόματα στοίβας **δεν είναι ισοδύναμα** με τα μη ντετερμινιστικά αυτόματα στοίβας
 - Τα μη ντετερμινιστικά αναγνωρίζουν γλώσσες που δεν μπορούν να αναγνωρίσουν τα ντετερμινιστικά
- Θα μελετήσουμε μόνο τα **ΜΗ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΑ** αυτόματα στοίβας

Αλφάβητα PDA

- **Δύο** Αλφάβητα
- $\Sigma_e = \Sigma \cup \{e\}$: αλφάβητο εισόδου
- $\Gamma_e = \Gamma \cup \{e\}$: αλφάβητο στοίβας
 - Η στοίβα μπορεί να χρησιμοποιεί διαφορετικά σύμβολα από αυτά της εισόδου.

Μεταβάσεις PDA

- Πεδίο Ορισμού: $Q \times \Sigma_e \times \Gamma_e$ καθορίζεται από
 - Τρέχουσα Κατάσταση
 - Σύμβολο που διαβάζεται από την είσοδο
 - Σύμβολο που βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας
 - Μπορεί τα πιο πάνω να είναι το κενό σύμβολο
 - Είσοδο: Αυτόματο δεν θα διαβάσει κανένα σύμβολο από την είσοδο
 - Στοίβα: Αυτόματο δεν θα διαβάσει κανένα σύμβολο από την στοίβα
- Πεδίο Τιμών: $\mathcal{P}(Q \times \Gamma_e)$
 - Μεταβαίνουμε σε κάποια νέα κατάσταση
 - Πιθανόν γράφουμε νέο σύμβολο στην στοίβα
 - Μη ντετερμινιστικό: Μπορεί να έχουμε ένα σύνολο τέτοιων καταστάσεων.

Τυπικός ορισμός PDA

Ορισμός

Αυτόματο στοίβας είναι μια εξάδα

1. Q = πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων

2. Σ_e = αλφάβητο εισόδου

3. Γ_e = αλφάβητο στοίβας

4. Συνάρτηση μετάβασης $\delta: Q \times \Sigma_e \times \Gamma_e \rightarrow P(Q \times \Gamma_e)$

Όταν το αυτόματο είναι στην κατάσταση $q \in Q$ και διαβάσει το σύμβολο $a \in \Sigma$ και υπάρχει σύμβολο $\gamma \in \Gamma$ μεταβιβάζεται σε ένα υποσύνολο καταστάσεων με αντίστοιχα σύμβολα στην κορυφή της στοίβας

π.χ. $\delta(q, a, \gamma) = \{(q', \gamma'), (q'', \gamma'')\}$

5. $q_0 \in Q$ = εναρκτήρια κατάσταση

6. $F \subseteq Q$ = σύνολο τελικών καταστάσεων

Ορισμός του υπολογισμού

- Το αυτόματο στοίβας M **αποδέχεται μια λέξη** w εάν:
 $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$
 $w = w_1 w_2 \dots w_n, \forall w_i \in \Sigma$
και υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0 r_1 \dots r_n, \forall r_i \in Q$
και ακολουθία λέξεων $s_0, s_1, \dots, s_n \in \Gamma^*$
- που να ικανοποιεί τις συνθήκες:
 1. $r_0 = q_0$ και $s_0 = e$
 2. $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, for $i = 0, \dots, n - 1$, where
 $s_i = at$ and $s_{i+1} = bt$, for $a, b \in \Gamma_e$ and $t \in \Gamma^*$
 3. $r_n \in F$

Περιγραφή Αυτομάτου Στοίβας

- Πίνακας Μεταβάσεων

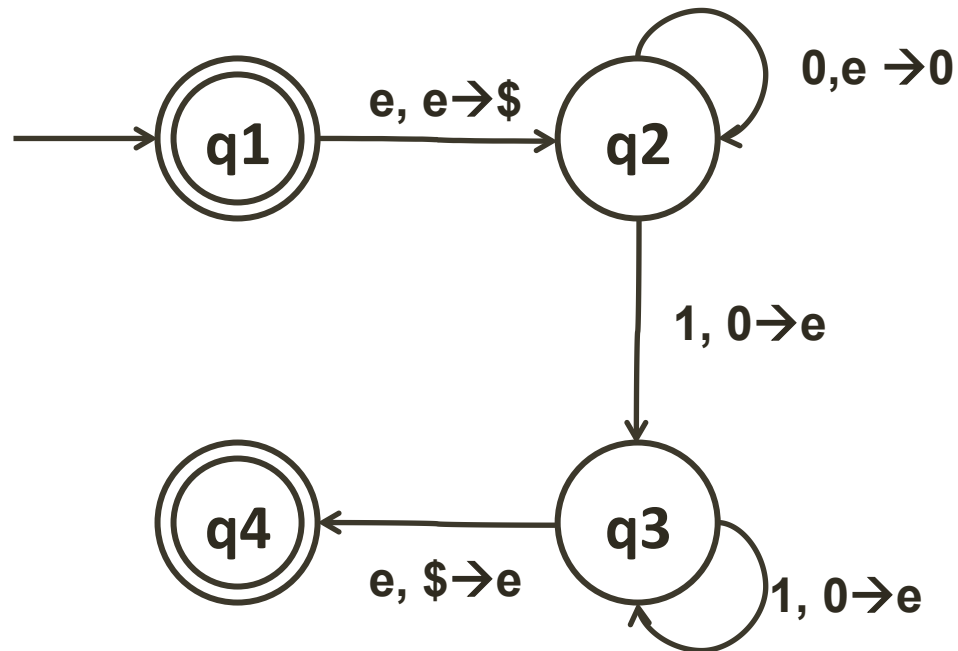
Είσοδος	0			1			e		
Στοίβα	0	\$	e	0	\$	e	0	\$	e
q1									
q2									

- Σχεδιάγραμμα Καταστάσεων
 - Επιγραφή Βέλων: « $\alpha, \beta \rightarrow \gamma$ »
 - α : σύμβολο στην είσοδο
 - $\alpha=e$: το αυτόματο εκτελεί την μετάβαση **χωρίς να διαβάσει σύμβολο από την είσοδο**
 - β : σύμβολο στην κορυφή της στοίβας
 - $\beta=e$: το αυτόματο εκτελεί την μετάβαση **χωρίς να διαβάσει σύμβολο από την στοίβα**
 - γ : σύμβολο με το οποίο αντικαθιστούμε το β
 - $\gamma=e$: το αυτόματο εκτελεί την μετάβαση **χωρίς να αποθέσει σύμβολο στην στοίβα**

Παράδειγμα 1

- Γλώσσα $L = \{1^n 0^n \mid n \geq 0\}$

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Sigma = \{0, 1\}, \Gamma = \{0, \$\}, F = \{q_1, q_4\}$$

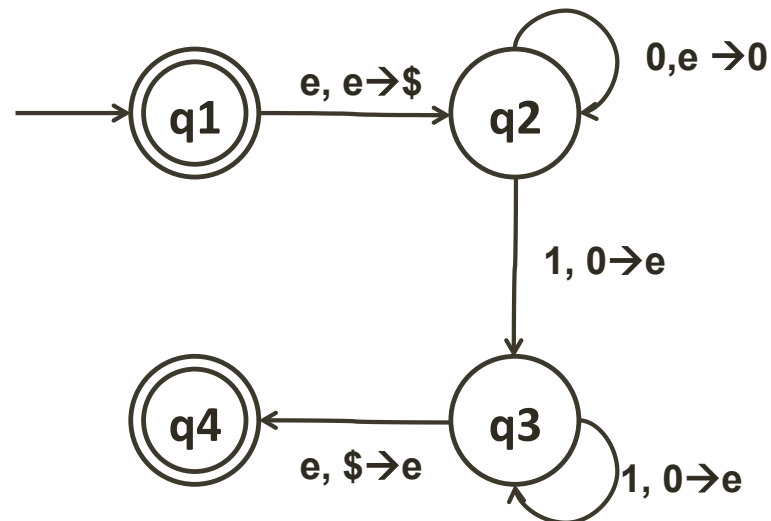


Το σύμβολο \$ μας βοηθά να εντοπίσουμε τον «πάτο» της στοίβας

Παράδειγμα 1

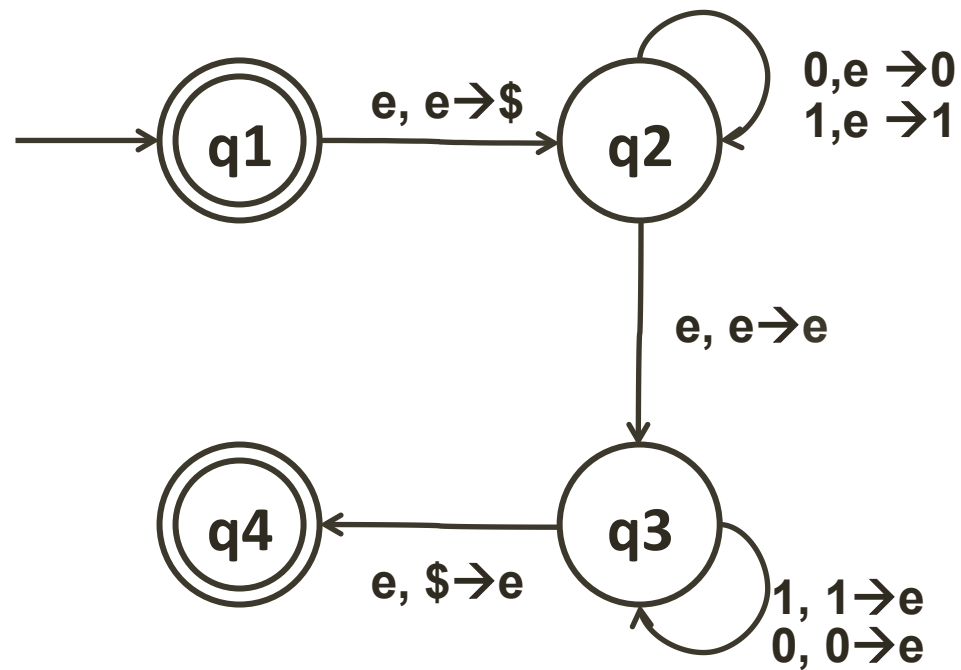
- Πίνακας μεταβάσεων

Είσοδος	0			1			e		
Στοιίβα	0	\$	e	0	\$	e	0	\$	e
q1									{(q2,\$)}
q2			{(q2,0)}	{(q3,e)}					
q3				{(q3,e)}				{(q4,e)}	
q4									



Παράδειγμα 2

- Γλώσσα $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
 - w^R : ανάστροφη π.χ. $w = 0111 \Rightarrow w^R = 1110$



Ερωτήσεις;

