ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 8: Ασυμφραστικές Γλώσσες II (Γλώσσες Ελεύθερες Συμφραζομένων)

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Σχεδίαση Ασυμφραστικών Γραμματικών (2.1.3)
- Πολυτροπία (2.1.4)
- Κανονική Μορφή Chomsky (2.1.5)

Ασυμφραστικές Γραμματικές (CFG)

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 0A1 \\ A &\rightarrow B \\ B &\rightarrow \# \end{aligned}$$

- Συλλογή **Κανόνων Αντικατάστασης**
  - Κάθε Κανόνας σε ξεχωριστή γραμμή

- Μορφή κανόνα αντικατάστασης:
  - **Μη-Τερματικό Σύμβολο** (μεταβλητή) $\longrightarrow$ **Λέξη**
  - Λέξη αποτελείται από τερματικά και μη-τερματικά σύμβολα

- **Εναρκτήρια Μεταβλητή**
  - Αριστερό μέλος πρώτου κανόνα

Σχεδίαση CFG

- Κατασκευή γραμματικής για σύνθετη γλώσσα
  - Διαιρούμε την γλώσσα σε απλούστερα μέρη
  - Κατασκευάζουμε μια γραμματική για κάθε μέρος
  - Προσθέτουμε τον κανόνα $S \rightarrow S_1 | S_2 | \ldots | S_k$
    - Si οι εναρκτήριες μεταβλητές των επιμέρους γραμματικών
  - Π.χ. $L = \{0^n 1^n | n \geq 0\} \cup \{1^n 0^n | n \geq 0\}$

$$S_1 \rightarrow 0S_1 1 | e \qquad S_2 \rightarrow 1S_2 0 | e$$

$$S \rightarrow S_1 | S_2$$

- Γραμματική για κανονική γλώσσα που ξέρουμε το αυτόματο που την αναγνωρίζει
  - Για κάθε μετάβαση δ(q_i, α)=q_j κανόνας $R_i \rightarrow aR_j$
  - Για κάθε κατάσταση αποδοχής q_i κανόνας $R_i \rightarrow e$
  - Εναρκτήρια κατάσταση η R_0 (q_0 εναρκτήρια αυτομάτου)

Σχεδίαση CFG

- Αλληλένδετες υπολέξεις
  - Εμφάνιση μιασ υπολέξης με βάση πόσες φορές εμφανίζεται μια δεύτερη υπολέξη, π.χ. $\{0^{\kappa}1^{\kappa} \mid \kappa \geq 0\}$
  - Χρησιμοποιούμε κανόνα της μορφής $R \rightarrow uRv$
    - Όπου u η πρώτη υπολέξη, και
    - v η υπολέξη που εξαρτάται από το u

- Αναδρομικές Δομές
  - Εμφανίζονται ως τμήματα άλλων δομών ή ακόμη και του εαυτού τους, π.χ.

    <ΕΚΦΡΑΣΗ> → <ΕΚΦΡΑΣΗ> + <ΟΡΟΣ> | <ΟΡΟΣ>

    <ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ> → (<ΕΚΦΡΑΣΗ>) | α

Παράδειγμα

- $L=\{a^m b^n : m \geq n\}$
  - $G = (V, \Sigma, R, S)$,
  - $V=\{a, b, S\}$
  - $\Sigma = \{a,b\}$,
  - $R = \{ S \rightarrow aSb , S \rightarrow aS, S \rightarrow e \}$

- $L=\{1^n\#0^n\#\#: n \geq 0\}$
  - $G = (V, \Sigma, R, S)$,
  - $V=\{1, 0, \#, S,A\}$
  - $\Sigma = \{1, 0, \#\}$,
  - $R = \{ S \rightarrow A\#\# , A \rightarrow 1A0, A \rightarrow \# \}$

Πολυτροπία

- Κάποια γραμματική παράγει την ίδια λέξη με περισσότερους από ένα τρόπους
  - Περισσότερα από ένα συντακτικά δέντρα
- Εξ αριστερών παραγωγή
  - Σε κάθε βήμα αντικαθιστούμε την αριστερότερη από τις εναπομείναντες μεταβλητές

Ορισμός
Για κάθε ασυμφραστική γραμματική G και για κάθε λέξη w, λέμε ότι η w παράγεται πολύτροπα στην G εάν υπάρχουν για αυτήν περισσότερες από μια εξ αριστερών παραγωγές στην G. Η G ονομάζεται πολύτροπη αν παράγει κάποια λέξη πολύτροπα.

Παράδειγμα Πολυτροπίας

- $E \rightarrow E + E | E \times E | (E) | a$
  - Πως παράγεται η α+αχα;

- Πως παράγεται η πιο πάνω λέξη στην γραμματική:

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow E + O | O \\
O &\rightarrow O \times P | P \\
P &\rightarrow (E) | a
\end{aligned}
$$

Κανονική μορφή Chomsky

Ορισμός

Μια ασυμφραστική γραμματική G βρίσκεται σε κανονική μορφή Chomsky εάν κάθε κανόνας της βρίσκεται σε μια από τις μορφές

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & BC \\ A & \rightarrow & a \end{array}$$

όπου α οποιοδήποτε τερματικό σύμβολο, Α οποιαδήποτε μεταβλητή, και Β και C οποιεσδήποτε μεταβλητές διάφορες της εναρκτήριας S. Επιπλέον επιτρέπεται ο κανόνας S→e.

CFG σε Κανονική Μορφή Chom

Θεώρημα:
Κάθε ασυμφραστική γλώσσα παράγεται από κάποια ασυμφραστική γραμματική σε κανονική μορφή Chomsky

- Τι πρέπει να δείξουμε;
  - Ότι κάθε ασυμφραστική γραμματική μπορεί να μετατραπεί σε κανονική μορφή Chomsky.

Βήματα Μετατροπής

- Βήμα 1: Προσθέτουμε μια νέα εναρκτήρια μεταβλητή

$$S_0 \rightarrow S$$

- Βήμα 2: Απαλείφουμε όλους τους κανόνες e της μορφής

$$A \rightarrow e$$

  - Για κάθε κανόνα που εμφανίζεται η A στο δεξί μέλος κάνουμε τα εξής:

$$R \rightarrow uAv \Rightarrow R \rightarrow uv$$

$$R \rightarrow uAvAw \Rightarrow R \rightarrow uAvw|uvAw|uvw$$

$$R \rightarrow A \Rightarrow R \rightarrow e$$

  - Επαναλαμβάνουμε τα βήματα μέχρι να απαλειφούν όλοι οι κανόνες e

Βήματα Μετατροπής

- Βήμα 3: Απαλείφουμε τους μοναδιαίους κανόνες

$$A \rightarrow B$$

  - Για κάθε κανόνα B → u προσθέτουμε τον κανόνα A → u

- Βήμα 4: Μεταγράφουμε τους υπολειπόμενους κανόνες ως εξής:
  - Αντικαθιστούμε κάθε κανόνα της μορφής:

$$A \rightarrow u_1 u_2 u_3 \dots u_k, k \geq 3$$

  - Όπου u_i τερματικό σύμβολο ή μεταβλητή, με τους κανόνες

$$A \rightarrow u_1 A_1, A_i \rightarrow u_2 A_2, A_2 \rightarrow u_3 A_3 \dots A_{k-2} \rightarrow u_{k-1} u_k$$

  - Αν κάποιο u_i είναι τερματικό τότε προσθέτουμε τον κανόνα

$$U_i \rightarrow u_i$$

Παράδειγμα

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & ASA|aB \\ A & \rightarrow & B|S \\ B & \rightarrow & b|e \end{array}$$

Ερωτήσεις;