ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 6: Μη Κανονικές Γλώσσες

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Εισαγωγικά
- Το Λήμμα της Άντλησης για κανονικές γλώσσες
- Παραδείγματα

Πότε μια γλώσσα δεν είναι κανονική;

- Έστω γλώσσα B={$0^κ1^κ$ | κ≥0}
  - Υπάρχει πεπερασμένο αυτόματο που να την αναγνωρίζει;
  - **ΟΧΙ:** πρέπει να θυμάται πόσα 0 διαβάσαμε
  - Αφού το πλήθος των 0 δεν είναι φραγμένο τότε έχουμε απεριόριστες περιπτώσεις
    - ΑΔΥΝΑΤΟΝ αφού το πλήθος των καταστάσεων είναι ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ

- Άρα οι γλώσσες που φαίνονται να χρειάζονται απεριόριστη μνήμη είναι μη κανονικές;
  - C={w | η w περιέχει ίδιο πλήθος 0 και 1}
  - D={w | η w περιέχει τις υπολέξεις 01 και 10 τις ίδιες φορές}
  - Κι όμως η D είναι κανονική!!
    - $(1^*1011^*)^* \cup (0^*0100^*)^* \cup (0^*011^*100^*)^*$

Λήμμα της Άντλησης

- Πως αποδεικνύουμε ότι μια γλώσσα ΔΕΝ είναι κανονική;
  - ΛΗΜΜΑ ΑΝΤΛΗΣΗΣ

- **Λήμμα Άντλησης:** Όλες οι λέξεις μιας κανονικής γλώσσας που έχουν μήκος μεγαλύτερο ή ίσο κάποιας συγκεκριμένης τιμής, **μήκος άντλησης**, επιδέχονται μια διαδικασία «άντλησης».
  - Κάθε τέτοια λέξη περιλαμβάνει ένα τμήμα που μπορεί να επαναληφθεί και η προκύπτουσα λέξη ανήκει στη γλώσσα.

Λήμμα της Άντλησης

Λήμμα της Άντλησης:
*Για κάθε κανονική γλώσσα A, **υπάρχει αριθμός p** (το μήκος της άντλησης αυτής) τέτοιος ώστε **κάθε λέξη w με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του p** να μπορεί να χωριστεί σε τρία τμήματα, **w = xyz**, που να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:*

1. ***για κάθε $i \geq 0$, $xy^iz \in A$***
2. ***$|y| > 0$, και***
3. ***$|xy| \leq p$.***

Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Έστω $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ ένα ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει την A

- Ορίζουμε Μήκος Άντλησης p = αριθμός καταστάσεων του M

- Θέλουμε να δείξουμε:
  - Κάθε λέξη της A με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του p μπορεί να χωριστεί σε τρία μέρη xyz που να ικανοποιούν τις συνθήκες του λήμματος

- Τι κι αν όλες οι λέξεις έχουν μήκος μικρότερο του p;
  - Το λήμμα αληθεύει εν κενώ.

Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Υποθέτουμε ότι έχουμε μια λέξη $w \in A$ τ.ω.
  - $w=w_1$
  - $|w| = n$ και $n \geq p$

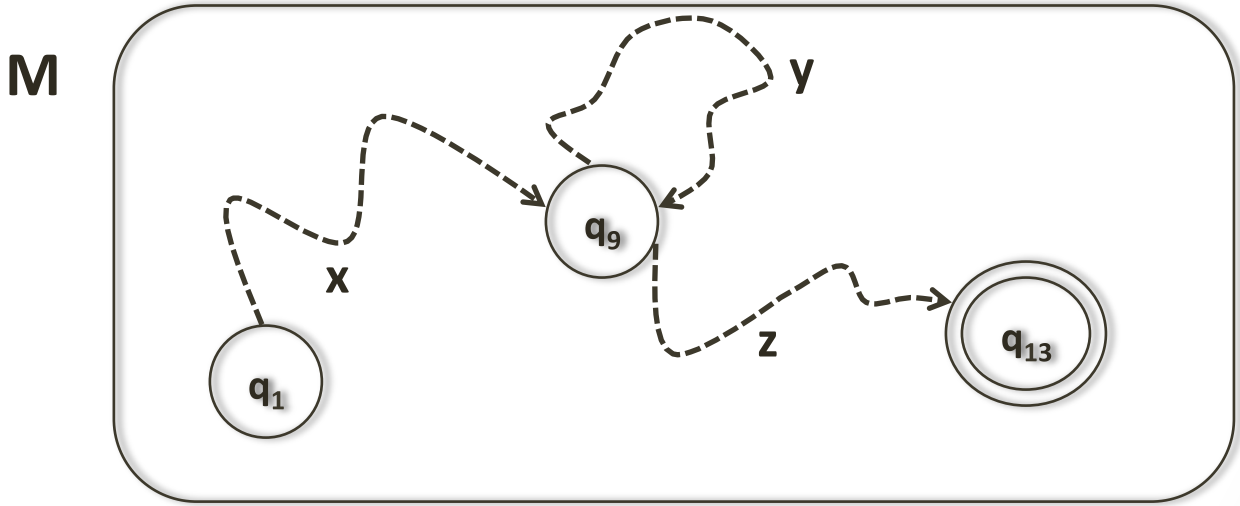
- Αφού $w \in A$ τότε το M αποδέχεται την λέξη
  - Έστω q_{13} η κατάσταση αποδοχής που φτάνει η M με το τέλος της w

- Άρα υπάρχει μια ακολουθία **n+1** καταστάσεων
  - $q_1 q_3 q_{20} q_9 \ldots q_{13}$

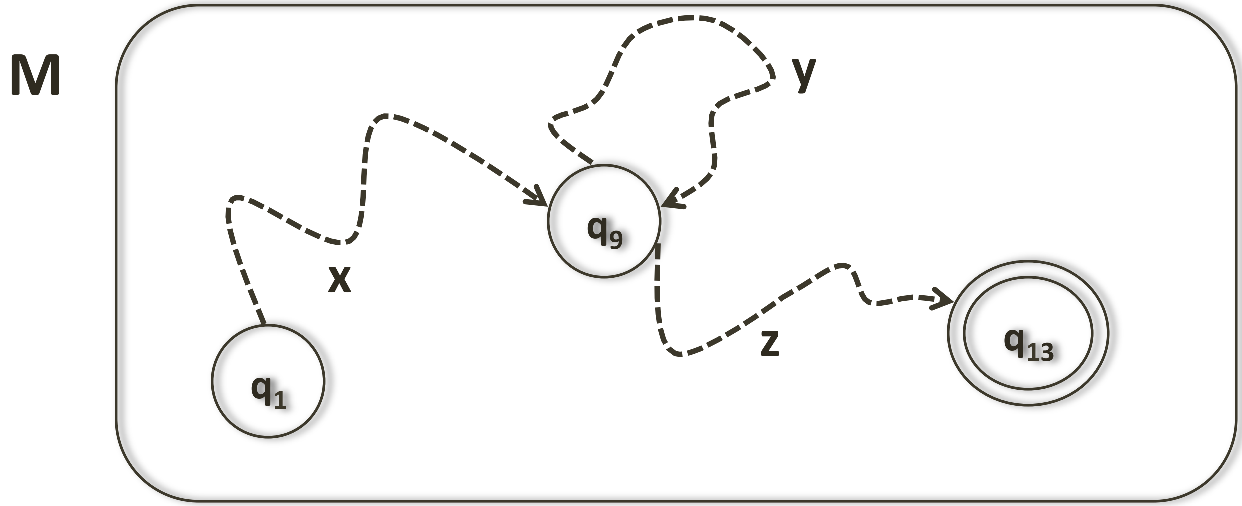
- Αφού έχουμε $p \leq n$ καταστάσεις στο M
  - **Αρχή του Περιστερώνα: Υπάρχει μια κατάσταση που επαναλαμβάνεται**

Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Έστω ότι η κατάσταση που επαναλαμβάνεται είναι η q_9
- Μπορούμε να χωρίσουμε την w σε τρία μέρη
  - x: το τμήμα της w πριν την πρώτη εμφάνιση της q_9
  - y: το τμήμα ανάμεσα στις δύο εμφανίσεις του q_9
  - z: η υπόλοιπη λέξη



Ικανοποιούνται οι Συνθήκες;



1. για κάθε $i \geq 0$, $xy^iz \in A$
   - Το M αποδέχεται την xyyz;
2. $|y| > 0$
   - Αφού είναι το τμήμα της λέξης μεταξύ δύο διαφορετικών εμφανίσεων της q_9
3. $|xy| \leq p$
   - Το q_9 είναι η πρώτη επανάληψη
   - Οι πρώτες p+1 καταστάσεις περιέχουν μια επανάληψη

Βήματα Απόδειξης Μη Κανονικότητας

- Δοθέντος μιας γλώσσας B πως δείχνουμε ότι δεν είναι κανονική;
- Βήμα 1:
  - Υποθέτουμε ότι η B είναι κανονική
- Βήμα 2:
  - Θεωρούμε ότι η B περιέχει λέξεις μήκους μεγαλύτερο ή ίσο με κάποιο p (μήκος άντλησης)
- Βήμα 3:
  - Βρίσκουμε μια λέξη w της B δεν επιδέχεται άντληση
- Βήμα 4:
  - Μελετούμε όλες τις δυνατές διαιρέσεις της w στα τμήματα x y z και να δείχνουμε ότι η υπάρχει τιμή για το i τέτοια ώστε $xy^iz \notin B$ => ΑΤΟΠΟ

Παράδειγμα 1

- Έστω $B=\{0^{\kappa}1^{\kappa} \mid \kappa \geq 0\}$

- Βήμα 1:
  - Υποθέτουμε ότι B είναι κανονική

- Βήμα 2:
  - Έστω p το μήκος της άντλησης

- Βήμα 3:
  - Επιλέγουμε την λέξη $w=0^p1^p$
  - Από το λήμμα της άντλησης $w=xyz$ τ.ω. για $i \geq 0$, $xy^iz \in B$

Παράδειγμα 1

- Βήμα 4:
  1. Η λέξη y έχει μόνο 0
     - Τότε η λέξη xyyz έχει περισσότερα 0 από 1 => άτοπο
  2. Η λέξη y έχει μόνο 1
     - Τότε η λέξη xyyz έχει περισσότερα 1 από 0 => άτοπο
  3. Η λέξη y έχει και 0 και 1
     - Τότε η λέξη xyyz πιθανόν να έχει το ίδιο πλήθος 0 και 1 αλλά αυτά δεν βρίσκονται στη σωστή σειρά => άτοπο

- Όλες οι περιπτώσεις μας οδηγούν σε άτοπο
  - Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε άντληση στη λέξη 0^p1^p
  - Η B δεν είναι κανονική

Παράδειγμα 2

- Έστω C={w | η w έχει το ίδιο πλήθος από 0 και 1}
- Βήμα 1:
  - Υποθέτουμε ότι C είναι κανονική
- Βήμα 2:
  - Έστω p το μήκος της άντλησης
- Βήμα 3:
  - Επιλέγουμε την λέξη $w=0^p1^p$
  - Από το λήμμα της άντλησης w=xyz τ.ω. για i≥0, $xy^iz \in C$
  - Φαίνεται ότι η w επιδέχεται άντληση!!
    - x=e, z=e και y=w

Παράδειγμα 2

- Βήμα 4:
  - Θα χρειαστούμε την συνθήκη 3: Η w πρέπει να χωριστεί έτσι ώστε $|xy| \leq p$
  - Αφού $|xy| \leq p$ τότε στο $w=xyz=0^p1^p$ το y περιέχει μόνο 0
  - Άρα η λέξη $xyyz \notin C$ => ΑΤΟΠΟ
- Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε άντληση στη λέξη 0^p1^p
  - Η C δεν είναι κανονική

Παράδειγμα 3

- Έστω $D=\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$

- Βήμα 1:
  - Υποθέτουμε ότι D είναι κανονική
- Βήμα 2:
  - Έστω p το μήκος της άντλησης
- Βήμα 3:
  - Επιλέγουμε την λέξη $w=0^p10^p1$
  - Από το λήμμα της άντλησης w=xyz τ.ω. για $i \geq 0$, $xy^iz \in D$
- Βήμα 4:
  - Αφού $|xy| \leq p$ τότε στο $w=xyz=0^p10^p1$ το y περιέχει μόνο 0
  - Άρα η λέξη $xyyz \notin D$ => ΑΤΟΠΟ

Ερωτήσεις;