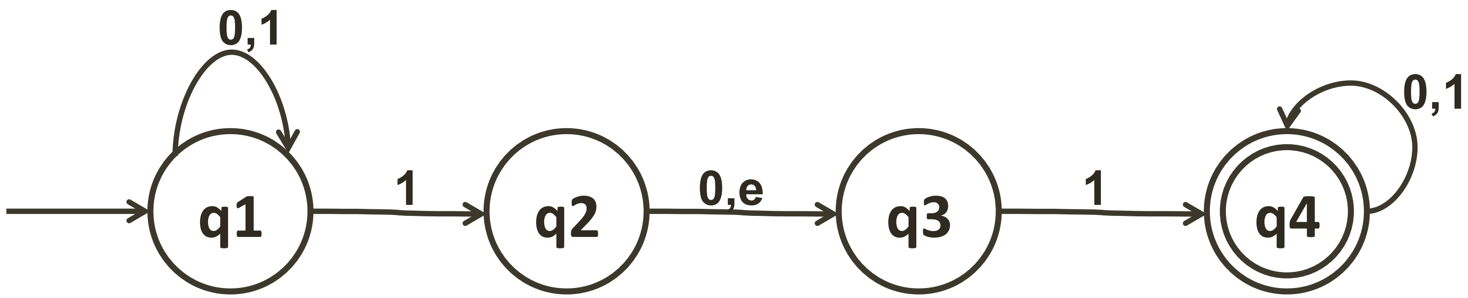
ΕΠΛ 211: Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 4: Μη Ντετερμινιστικά (Αντιαιτιοκρατικά) Πεπερασμένα Αυτόματα (NFA)

Τι θα κάνουμε σήμερα…

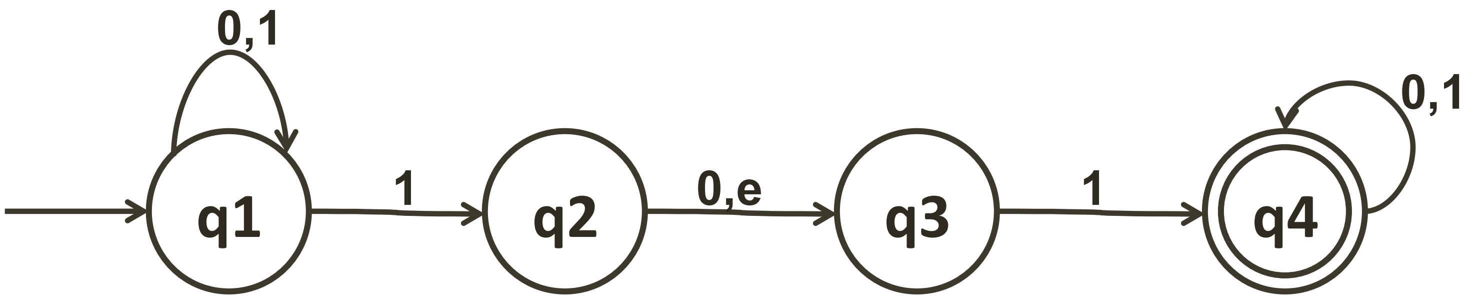
- Εισαγωγή στα Μη Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα
- Τυπικός Ορισμός Μη Ντετερμινιστικών Πεπερασμένων Αυτόματων (1.2.1)
- Ισοδυναμία Μη Ντετερμινιστικών και Ντετερμινιστικών Αυτομάτων (1.2.2)
- Κλειστότητα Κανονικών Πράξεων (1.1.5)

DFA vs NFA



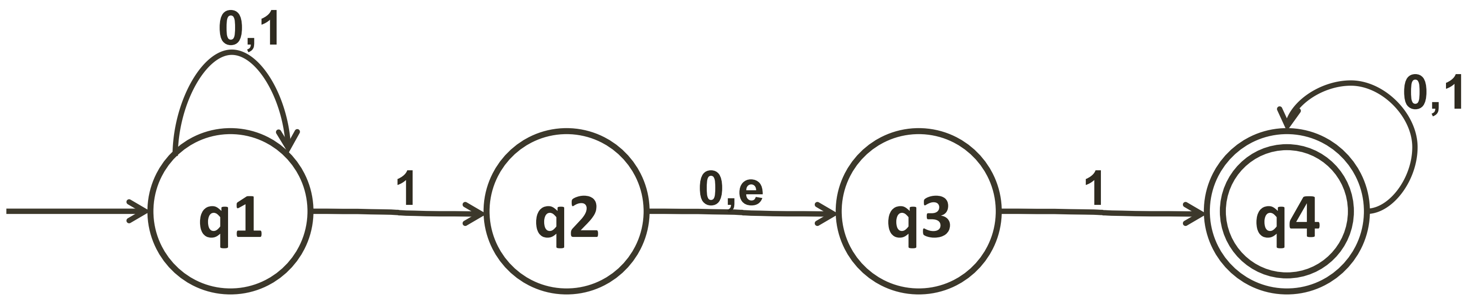
- Διαφορά 1:
  - DFA: Από κάθε κατάσταση του ντετερμινιστικού αυτόματου φεύγει ακριβώς ένα βέλος για κάθε σύμβολο του αλφαβήτου
  - NFA: Από κάθε κατάσταση μπορούν να εκκινούν **μηδέν, ένα, ή περισσότερα βέλη για κάθε σύμβολο** του αλφαβήτου
- Διαφορά 2:
  - **Προσθέτει το σύμβολο e** στο αλφάβητο.

Πως υπολογίζει ένα NFA



- Έστω βρισκόμαστε στην q1 και λαμβάνουμε 1
  - Το αυτόματο διασπάται σε πολλαπλά αντίγραφα του εαυτού του και ακολουθεί όλες τις δυνατότητες παράλληλα.
  - Αν κάποιο αντίγραφο φτάσει σε μια κατάσταση από την οποία δεν εκκινά το επόμενο σύμβολο εισόδου τότε το μονοπάτι «σβήνει».
  - Το αυτόματο τερματίζει αν στο τέλος της ανάγνωσης της εισόδου υπάρχει έστω και ένα αντίγραφο που οδηγεί σε κατάσταση υποδοχής.

Παράδειγμα



- Πως προχωρά ο υπολογισμός πάνω στη λέξη 010110

- Ένας καλός τρόπος απεικόνισης του υπολογισμού είναι το δέντρο υπολογισμού.

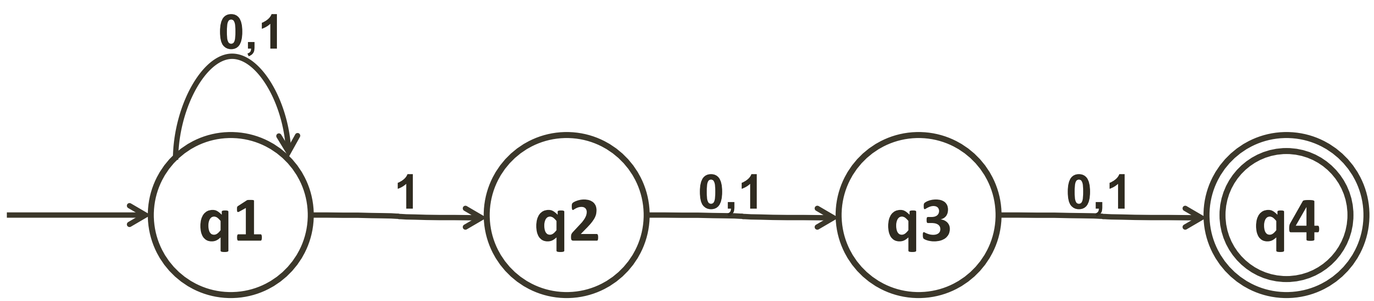
- Ποιες λέξεις δέχεται το αυτόματο;
  - Όσες λέξεις έχουν ως υπολέξη το 101 ή το 11

Χρησιμότητα NFA

- Κάθε NFA μπορεί να μετατραπεί σε ένα αντίστοιχο ισοδύναμο DFA
- Τα NFA είναι συνήθως μικρότερα
- Η λειτουργία ενός NFA είναι ευκολότερα κατανοητή
- Η κατασκευή ενός NFA είναι ευκολότερη

Παράδειγμα

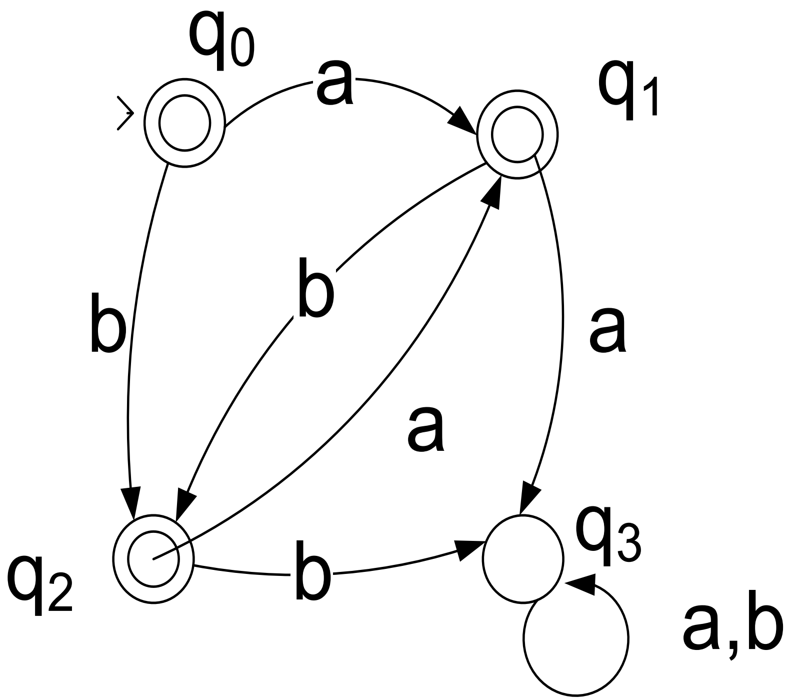
- A = {w | w περιέχει το σύμβολο 1 στην τρίτη θέση από το τέλος}
  - 00100 ανήκει στην A
  - 011 δεν ανήκει
- Ποιο είναι το αντίστοιχο ντετερμινιστικό;
- Πως αλλάζει ο υπολογισμός αν προσθέσουμε το e στα βέλη q2,q3 και q3,q4;



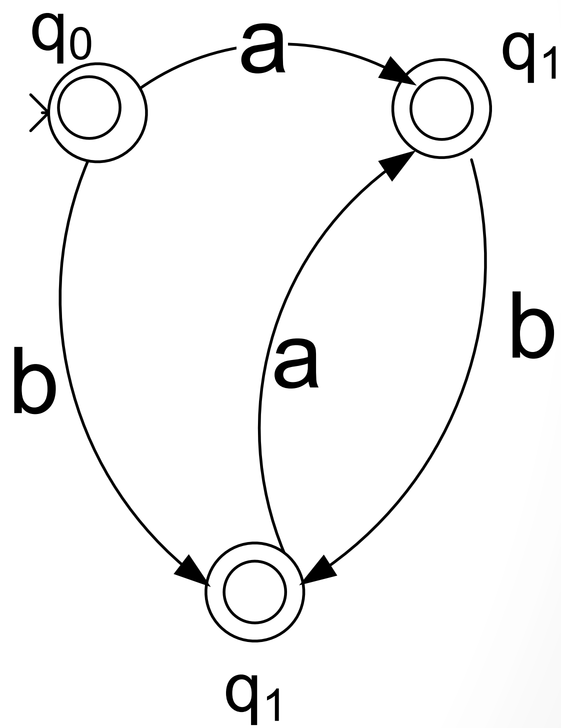
Παράδειγμα 2

L={w | w δεν περιέχει ούτε το aa ούτε το bb σαν υπολέξεις}

Ντετερμινιστικό



Μη-Ντετερμινιστικό



Τυπικός Ορισμός του NFA

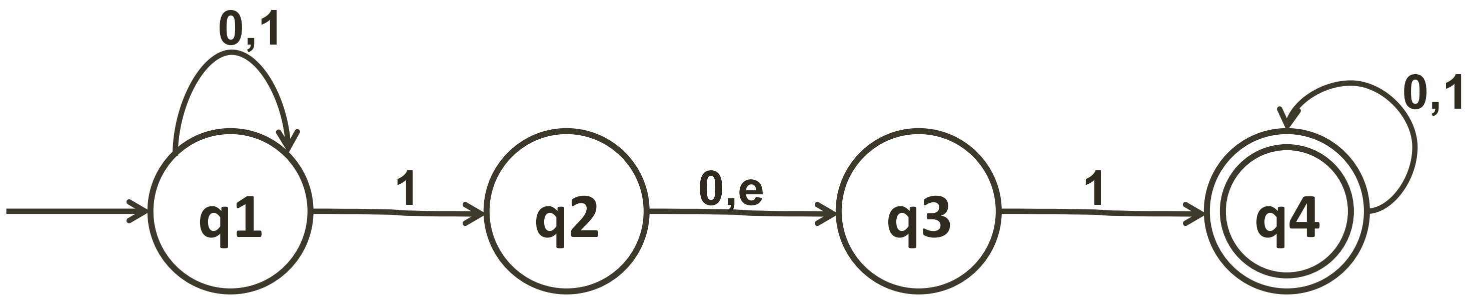
Ορισμός

Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο ***είναι μια πεντάδα*** $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. ***Q = πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων***
2. ***Σ = αλφάβητο***
3. ***Συνάρτηση μετάβασης $\delta : Q \times \Sigma_e \rightarrow P(Q)$***

   Όταν το αυτόματο είναι στην κατάσταση $q \in Q$ και διαβάσει το σύμβολο $a \in \Sigma$ μεταβιβάζεται σε ένα υποσύνολο καταστάσεων π.χ. **δ (q,α)={q', q''}**
4. ***$q_o \in Q$ = αρχική κατάσταση***
5. ***$F \subseteq Q$ = τελικές καταστάσεις***

Τυπική Περιγραφή Αυτομάτου



- $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - Q = {q1, q2, q3, q4}
  - Σ = {0, 1}
  - Η συνάρτηση μεταβάσεων δ *περιγράφεται από τον πίνακα*
  - q1 η εναρκτήρια κατάσταση
  - F = {q2}

	0	1	e
q1	{q1}	{q1,q2}	$\emptyset$
q2	{q3}	$\emptyset$	{q3}
q3	$\emptyset$	{q4}	$\emptyset$
q4	{q4}	{q4}	$\emptyset$

Ορισμός του υπολογισμού

- Το αυτόματο N **αποδέχεται μια λέξη** w εάν:
  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  $w = w_1 w_2 \ldots w_n, \forall w_i \in \Sigma$
  και υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0 r_1 \ldots r_n, \forall r_i \in Q$
  που να ικανοποιεί τις συνθήκες:
  1. $r_0 = q_0$
  2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1}),\ \text{for } i = 0, \ldots, n-1$, και
  3. $r_n \in F$

- Το αυτόματο N **αναγνωρίζει τη γλώσσα** A εάν:
  A = {w | το N αποδέχεται την w}

Ισοδυναμία NFA με DFA

Θεώρημα:
Για κάθε μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο, υπάρχει ισοδύναμο ντετερμινιστικό.

- Για κάθε γλώσσα που αναγνωρίζεται από κάποιο μη ντετερμινιστικό αυτόματο, υπάρχει ντετερμινιστικό αυτόματο που την αναγνωρίζει.
- Ιδέα απόδειξης (κατασκευαστική)
  - Κατασκευή ενός ντετερμινιστικού αυτόματου που να προσομοιώνει το μη ντετερμινιστικό
- Hint: Κάθε σύμβολο στο NFA μας οδηγεί σε ένα σύνολο καταστάσεων
  - Αυτό το σύνολο πρέπει να αντιπροσωπεύει μια κατάσταση του ντετερμινιστικού αυτομάτου.
  - ‘Αρα οι καταστάσεις του DFA θα περιέχουν όλα τα δυνατά υποσύνολα των καταστάσεων του NFA

Ισοδυναμία NFA με DFA (Απόδειξη)

- Έστω το NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ που αναγνωρίζει την A
- Θέλουμε να κατασκευάσουμε DFA $M = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ που επίσης αναγνωρίζει την A
- Βήματα Κατασκευής (χωρίς το σύμβολο e):
  - $Q' = \mathcal{P}(Q)$
  - $\delta'(R, a) = \{q \in Q | q \in \delta(r, a) \text{ for some } r \in R\}$ ή

    $\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} \delta(r, a)$
  - $q_0' = \{q_0\}$
  - $F' = \{R \in Q' | \exists q \in R \text{ such that } q \in F\}$

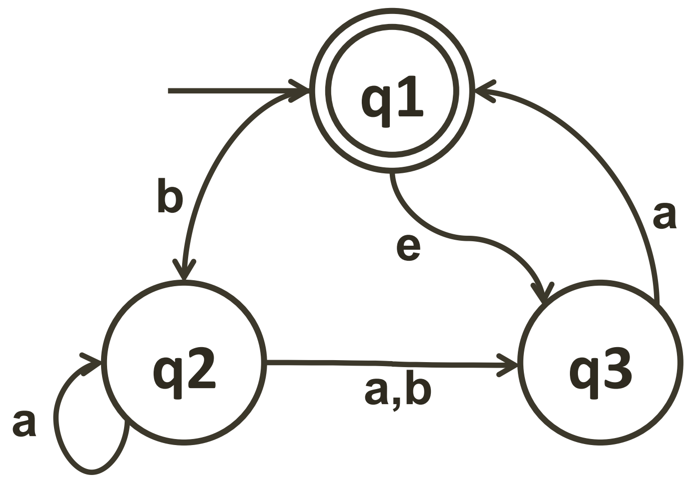
Ισοδυναμία NFA με DFA (Απόδειξη)

- Μετατροπή μεταβάσεων e:
  - E(R)={q | η q είναι προσπελάσιμη από κάποιο μέλος της R μέσω μηδέν ή περισσοτέρων μεταβάσεων e}
  - $\delta'(R, a) = \{q \in Q | q \in E(\delta(r, a)) \text{ for some } r \in R\}$
  - $q_0' = E(\{q_0\})$
- Ορθότητα: Σε κάθε βήμα του υπολογισμού του M επί κάποιας εισόδου, το M βρίσκεται σε μια κατάσταση που αντιστοιχεί στο σύνολο των καταστάσεων που θα μπορούσε να βρίσκεται το N στο σημείο εκείνο.

Πόρισμα

Πόρισμα:
Μια γλώσσα είναι κανονική εάν και μόνο εάν υπάρχει μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο που να την αναγνωρίζει.

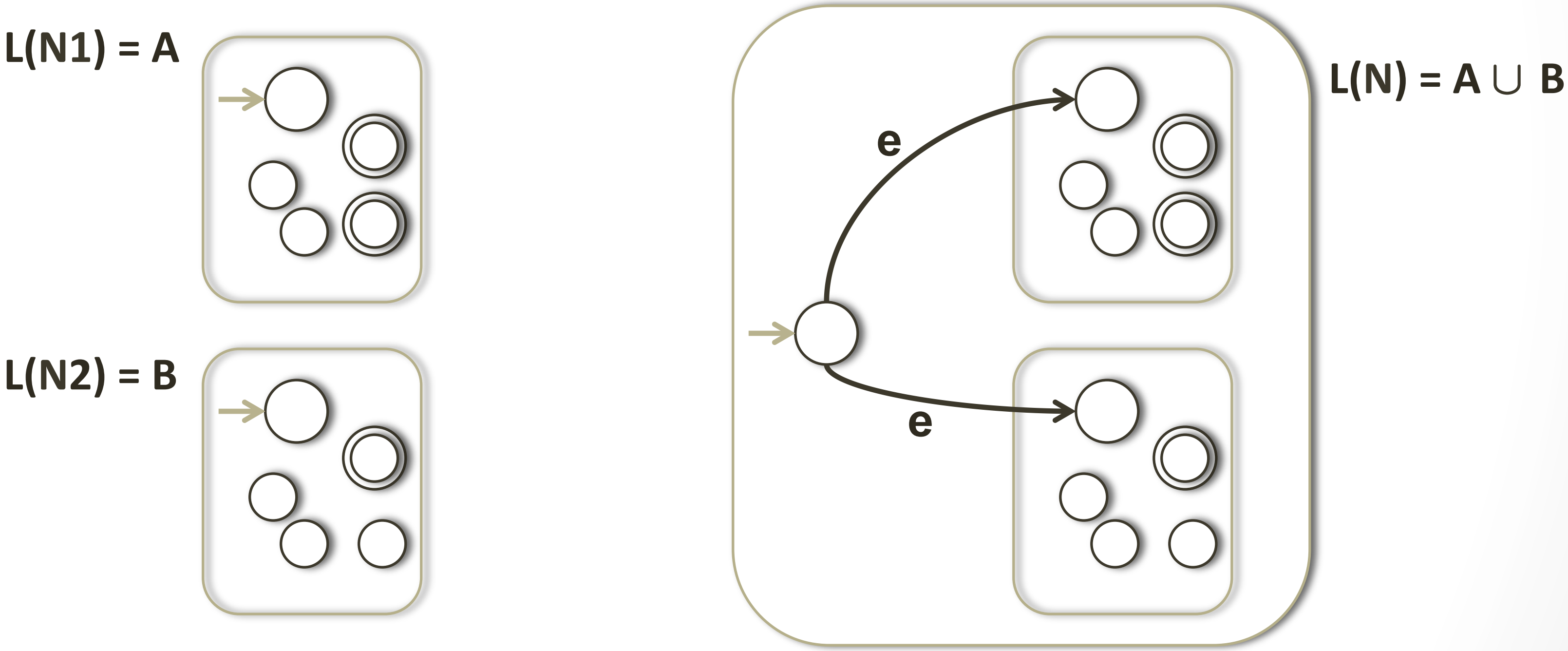
Παράδειγμα: NFA to DFA



- $M(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - $Q = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$
  - $\Sigma = \{a, b\}$
  - $q_0 = E(\{1\}) = \{1,3\}$
  - $F = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$
  - δ?

Κλειστότητα ως προς ένωση

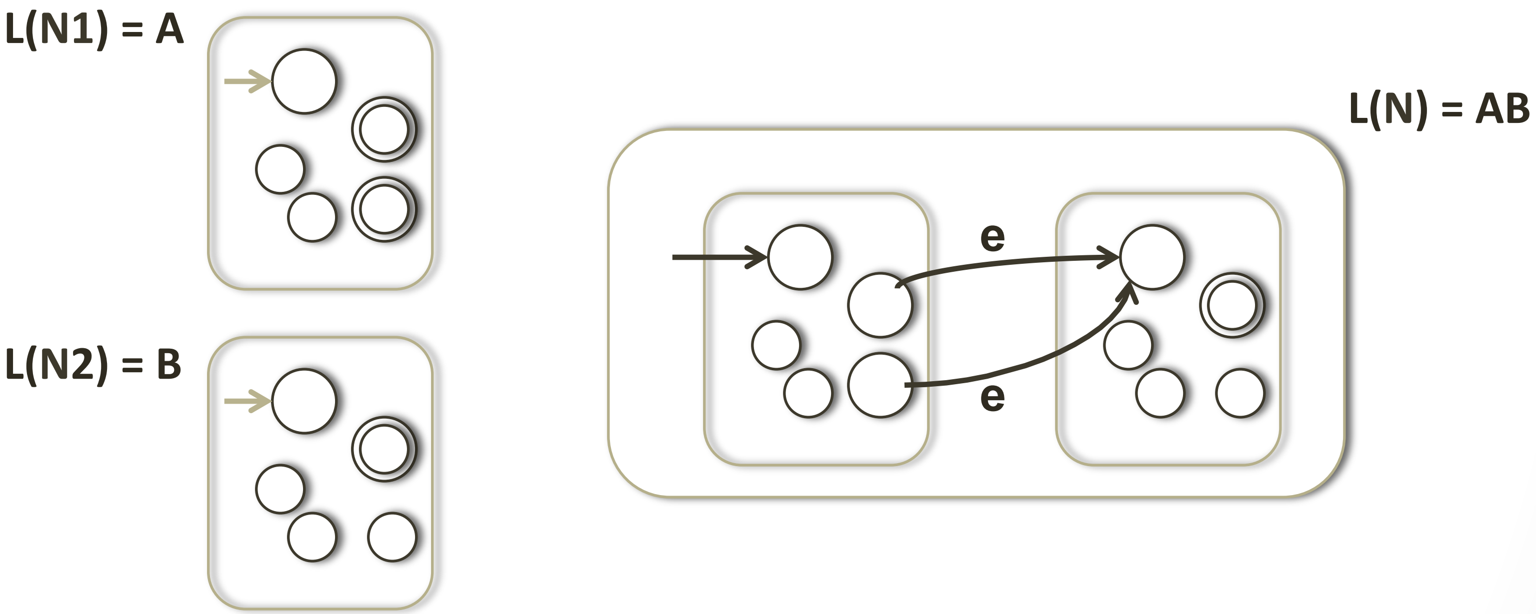
Θεώρημα:
Το σύνολο των κανονικών γλωσσών είναι κλειστό ως προς την ένωση.



- Για αυθαίρετες κανονικές γλώσσες A, B πρέπει να δείξουμε ότι A∪B είναι επίσης κανονική

Κλειστότητα ως προς την συναρμογή

Θεώρημα:
Το σύνολο των κανονικών γλωσσών είναι κλειστό ως προς την συναρμογή.

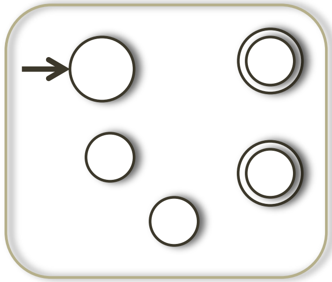


- Για αυθαίρετες κανονικές γλώσσες A, B πρέπει να δείξουμε ότι AB είναι επίσης κανονική

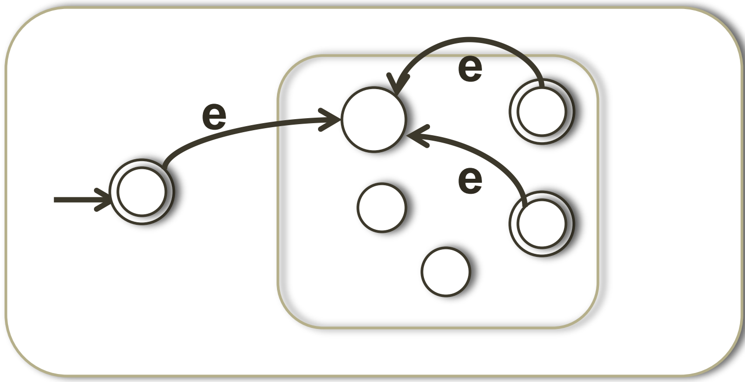
Κλειστότητα ως προς την σώρευση

Θεώρημα:
Το σύνολο των κανονικών γλωσσών είναι κλειστό ως προς την σώρευση.

L(N1) = A



L(N) = A*



- Για αυθαίρετη κανονική γλώσσα A πρέπει να δείξουμε ότι A* είναι επίσης κανονική

Ερωτήσεις;