ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 2: Μαθηματικό Υπόβαθρο

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Συναρτήσεις & Σχέσεις (0.2.3)
- Γράφοι (Γραφήματα) (0.2.4)
- Λέξεις και Γλώσσες (0.2.5)
- Αποδείξεις (0.3)

Συναρτήσεις

Ορισμός Συνάρτησης:
Ένα αντικείμενο που ορίζει έναν συσχετισμό μεταξύ ενός συνόλου «εισόδων» με ένα σύνολο «εξόδων»

- Δέχεται μια είσοδο και παράγει μια έξοδο
  - f(a) = b

$$f : D \rightarrow R$$

- **Πεδίο Ορισμού**: Το σύνολο όλων των δυνατών εισόδων D
- **Πεδίο Τιμών**: Το σύνολο όλων των δυνατών εξόδων R
- **Ένα-προς-ένα Συνάρτηση**: $f : A \rightarrow B$ είναι ένα-προς-ένα, αν για οποιαδήποτε διαφορετικά $a, b \in A, f(a) \neq f(b)$

Συναρτήσεις

- Αν πεδίο ορισμού είναι το $A_1 \times \ldots \times A_k$ η είσοδος της συνάρτησης είναι μια κ-άδα $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \alpha_i \in A_i$
  - τα α_i είναι παράμετροι της συνάρτησης

- Συμβολισμοί διπαραμετρικών συναρτήσεων
  - Ενθηματικός, π.χ. a + b
  - Προθηματικός, π.χ. άθροισμα(a,b)

- **Κατηγόρημα** ή **ιδιότητα**: Οποιαδήποτε συνάρτηση με πεδίο τιμών το σύνολο {ΑΛΗΘΕΣ, ΨΕΥΔΕΣ} .

Σχέσεις

Ορισμός Σχέσης:
Κάθε ιδιότητα με πεδίο ορισμού ένα σύνολο κ-άδων για $k \geq 2, A \times \ldots \times A$ ***λέγεται κ-μελής (ή κ-αδική) σχέση στο A***

- Για δυαδικές σχέσεις:
  - Ενθηματικός Συμβολισμός π.χ. a < b
  - aRb => aRb = ΑΛΗΘΕΣ

- Διαφορετικά: Μια κ-μελής σχέση R μπορεί να γραφτεί και ως ένα υποσύνολο όλων των διατεταγμένων κ-άδων $R \subseteq A \times \ldots \times A$ τέτοιων ώστε κάθε κ-αδα επαληθεύει τη σχέση.
  - Στις δυαδικές σχέσεις: $aRb \text{ then } (a, b) \in R$

Παράδειγμα

- A = { 1, 2, 3, 4}
- R : > *«μεγαλύτερο από»*

$$R : A \times A \rightarrow \{TRUE, FALSE\}$$

- 2R1 (2>1) κτλ.

ή

- R = ?

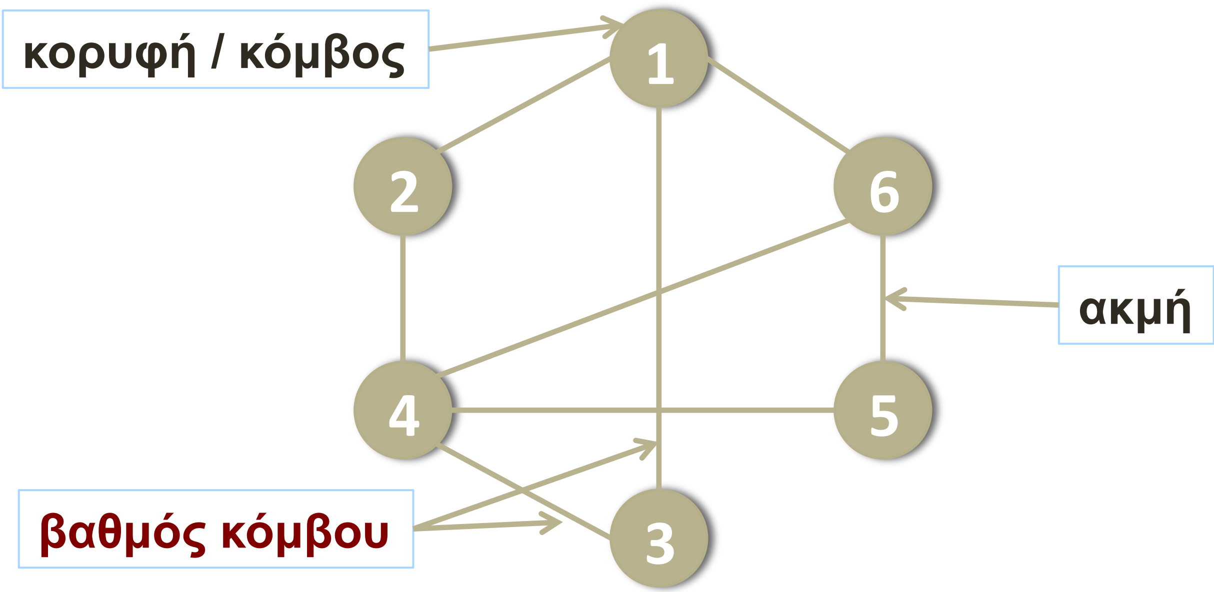
{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1) ,(4,2), (4,3)}

Σχέση Ισοδυναμίας

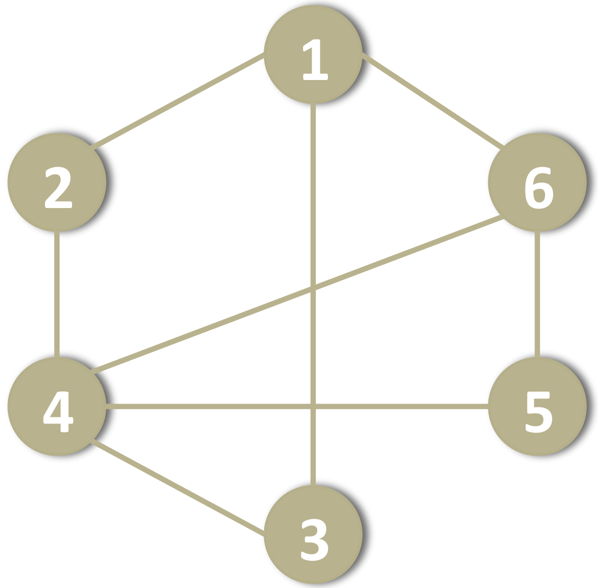
- Μια δυαδική σχέση R αποτελεί **σχέση ισοδυναμίας** αν
  - Είναι ανακλαστική: $\forall a \in A, (a, a) \in R$
  - Είναι συμμετρική: Εάν $(a, b) \in R$ τότε $(b, a) \in R$
  - Είναι μεταβατική: Εάν $(a, b) \in R$ και $(b, c) \in R$ τότε $(a, c) \in R$
- Παράδειγμα
  - Η σχέση στους φυσικούς αριθμούς $i, j \in \mathcal{N}, i \equiv_7 j$ που είναι αληθές αν η διαφορά $i - j$ είναι πολλαπλάσιο του 7

Γραφήματα (Γράφοι)

Ορισμός Γραφήματος:
Ένα σύνολο σημείων και ένα σύνολο γραμμών που συνδέουν τα σημεία μεταξύ τους.

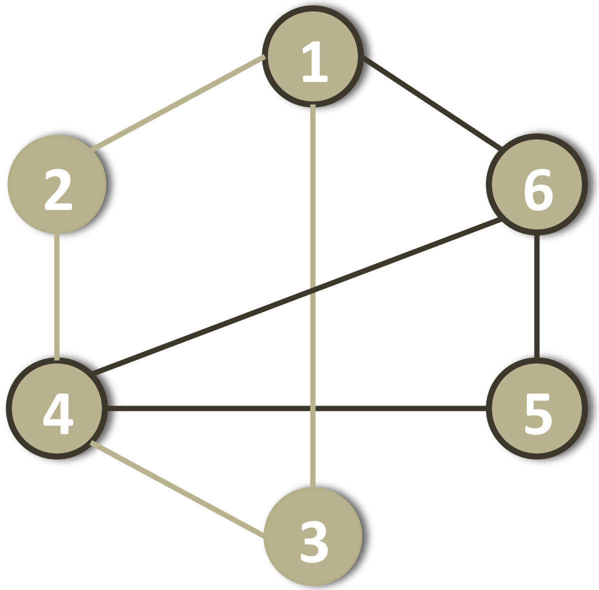


Μη Κατευθυνόμενο γράφημα



- G = (V,E)
  - V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - E={(1,2), (1,3), (1,6), (2,4), (4,5), (4,6), (4,3)}

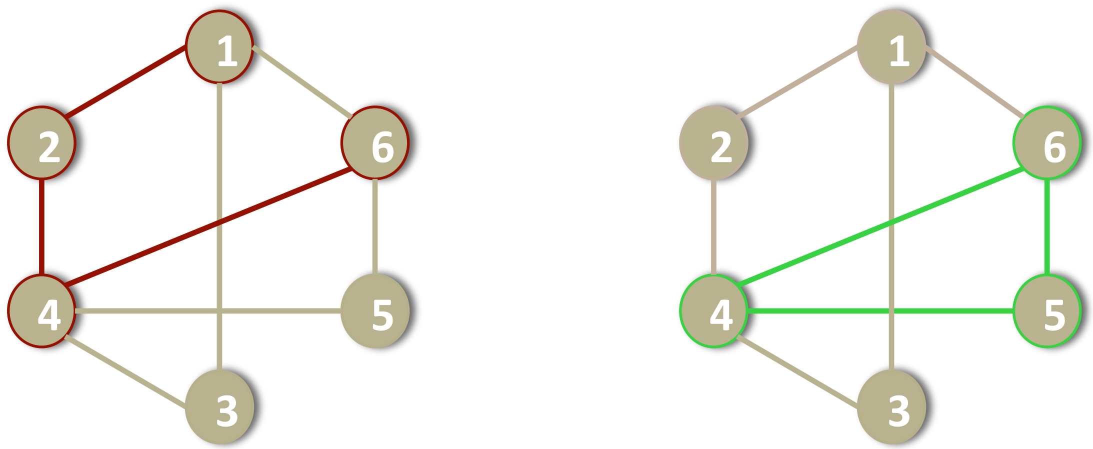
Υπογράφημα



- $H = (V_h, E_h)$ **υπογράφημα** του $G = (V, E)$:

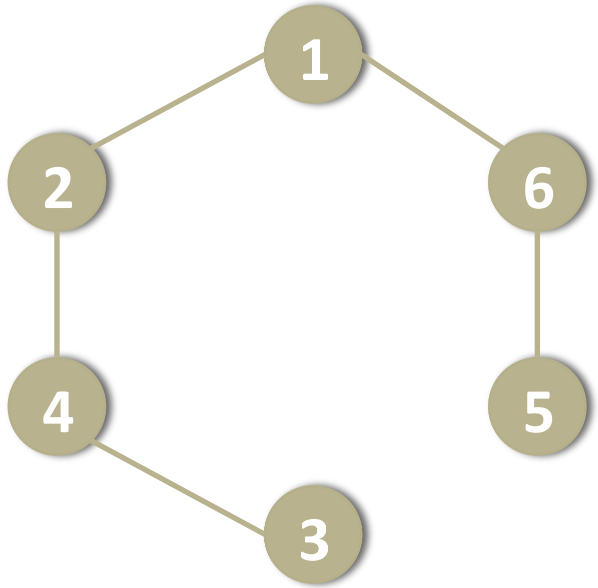
$$V_h \subseteq V \text{ and } E_h \subseteq E$$

Διαδρομές και Κύκλοι



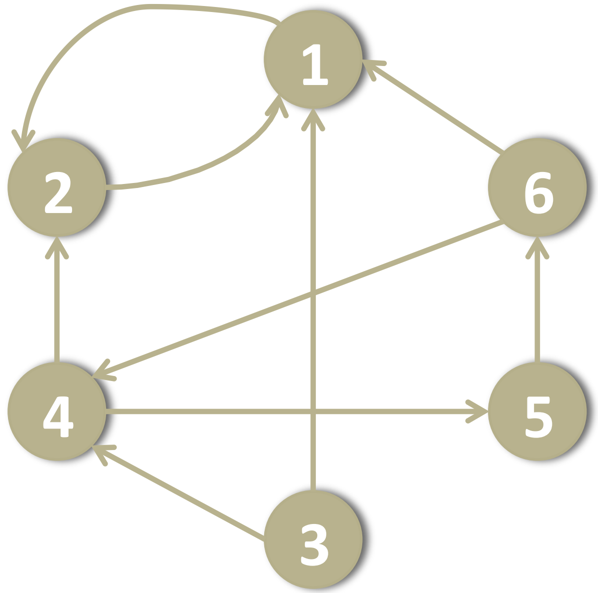
- **Διαδρομή**: Ακολουθία ενωμένων διαδοχικά κόμβων
  - Απλή Διαδρομή: κάθε κόμβος εμφανίζεται μια φορά
- **Κύκλος**: Διαδρομή που αρχίζει και τελειώνει στον ίδιο κόμβο
  - Απλός κύκλος: Κάθε κύκλος που περιέχει 3 τουλάχιστον
- **Συνδεδεμένο Γράφημα**: Κόμβοι συνδέονται ανα 2 μέσω κάποιας διαδρομής

Δέντρο



- Το γράφημα χωρίς κύκλους
- Ρίζα και φύλλα

Κατευθυνόμενο γράφημα

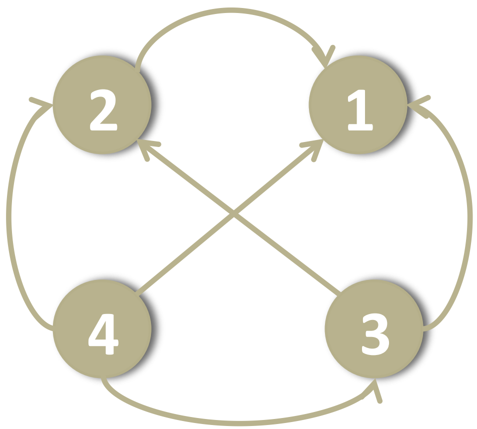


- G = (V,E)
  - V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - E={(1,2), (2,1), (4,2), (4,5), (3,4), (3,1), (5,6), (6,4), (6,1)}
- Βαθμοί Εισόδου και Εξόδου
- **Ισχυρά Συνδεδεμένο:** Γράφημα είναι συνδεδεμένο αν υπάρχει διαδρομή που να επισκέπτεται όλους τους κόμβους ανεξαρτήτως κατεύθυνσης

Κατευθυνόμενοι Γράφοι και Σχέσεις

- Αναπαράσταση δυαδικών σχέσεων:
  - Εάν $R \subseteq D \times D$ τότε $G = (D, E)$, όπου $E = \{(x, y) | xRy\}$

- Παράδειγμα
  - A = { 1, 2, 3, 4}
  - R : > *«μεγαλύτερο από»*



Λέξεις και Γλώσσες

Πως μπορούμε να επικοινωνήσουμε μια ιδέα σε έναν άλλο άνθρωπο;

Πως μπορούμε να «επικοινωνήσουμε» ένα αλγόριθμο ή μια σχέση σε ένα υπολογιστή;

ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ «ΜΙΛΟΥΜΕ» ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΓΛΩΣΣΑ

Ορισμοί

Αλφάβητο Σ:
*Ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο **συμβόλων**.*

Λέξη επί ενός αλφαβήτου:
Οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του αλφαβήτου.

Γλώσσα:
Οποιοδήποτε σύνολο λέξεων.

Αλφάβητο

- Σ1 = {0,1} - δυαδικό αλφάβητο
- Σ2 = {α,β,γ, ... , ψ,ω} – ελληνικό αλφάβητο

Λέξεις

- Παραδείγματα λέξεων:
  - 011001 πάνω στο Σ1
  - καλημέρα πάνω στο Σ2

- **Μήκος λέξης:** Πλήθος των συμβόλων που περιέχει |w|

- **Κενή λέξη:** Λέξη μηδενικού μήκους, e

- Μια λέξη w μπορεί και να γραφτεί ως:

$$w = w_1 w_2 \ldots w_n, w_i \in \Sigma$$

- **Ανάστροφη** λέξης w : $w^{\mathcal{R}} = w_n w_{n-1} \ldots w_1$

Λέξεις

- Η **u** είναι **Υπολέξη** μιας λέξης **w** αν και μόνο αν υπάρχουν λέξεις x και y τέτοιες ώστε **w = xuy**

- **Παράθεση (Συναρμογή):** Αν $x = x_1 x_2 \cdots x_m$ και $y = y_1 y_2 \cdots y_n$
  $\Rightarrow$ $xy = x_1 x_2 \cdots x_m y_1 y_2 \cdots y_n$
  - **|xy|=?**

- Για μια λέξη w, η **επανάληψη** k φορών της w είναι:

$$w^k = \begin{cases} \epsilon & \textbf{αν } k = 0 \\ \underbrace{ww\ldots w}_{k \text{ φορες}} & \textbf{αν } k > 0 \end{cases}$$

Αποδείξεις

- Ορολογία:
  - Ορισμοί,
  - Μαθηματικές Προτάσεις
  - Απόδειξη
  - Θεώρημα
  - Λήμμα
  - Πόρισμα
- Πως βρίσκουμε μια απόδειξη;
  - Υπομονή και Συγκέντρωση
  - Παραδείγματα που επαληθεύουν την μαθηματική πρόταση (αντιπαράδειγμα για απόδειξη του αντίθετου)

Είδη αποδείξεων

- Με **κατασκευή** (κατασκευαστικές)
- Με **απαγωγή σε άτοπο** (αντίφαση)
- Με **επαγωγή**

Απόδειξη με κατασκευή (ύπαρξης)

- Περιγράφουμε πως μπορεί να κατασκευαστεί το αντικείμενο που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Παράδειγμα
  - *Για κάθε άρτιο αριθμό n μεγαλύτερο από 2, υπάρχει 3-κανονικό(κάθε κόμβος έχει βαθμό 3) γράφημα με n κόμβους.*

Απόδειξη: ?

Απαγωγή σε Άτοπο (Αντίφαση)

- Υποθέτουμε ότι η μαθηματική πρόταση δεν ισχύει και στη συνέχεια δείχνουμε ότι η υπόθεσή μας οδηγεί σε εσφαλμένο συμπέρασμα, άτοπο.

- Παράδειγμα
  - *Ο αριθμός 2 είναι άρρητος*

  Απόδειξη: ?

Επαγωγή

- Η μαθηματική πρόταση Π(n) είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο n εάν
  - Η Π(1) είναι αληθής
  - Για οποιοδήποτε ακέραιο $n > 0$, αν η Π(n) είναι αληθής τότε και η Π(n+1) είναι αληθής.

- Μαθηματική Επαγωγή χωρίζεται σε 3 μέρη
  - Βάση: Εξετάζουμε την πρόταση Π(1)
  - Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε οτι η πρόταση Π(n) είναι αληθής.
  - Επαγωγικό Βήμα: Στηριζόμενοι στην επαγωγική υπόθεση, αποδεικνύουμε ότι η Π(n+1) είναι αληθής

- Συνήθως χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι τα στοιχεία ενός συνόλου έχουν κάποια ιδιότητα.

Επαγωγή

- Παράδειγμα
  - *Για κάθε ακέραιο n>0, ο αριθμός* $\phi(n) = 4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ *είναι διαιρετός δια 7.*

  Απόδειξη: ?

Ερωτήσεις;