ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 1: Μαθηματικό Υπόβαθρο

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Εισαγωγικά (0.1)
- Σύνολα (0.2.1, 0.2.2)
- Συναρτήσεις & Σχέσεις (;;) (0.2.3)

Περιοχές που θα μελετήσουμε

- Αυτόματα
- Υπολογισιμότητα
- Πολυπλοκότητα

Απαντούν στο ερώτημα:

Ποιες είναι οι θεμελιώδεις δυνατότητες και ποιοι οι εγγενείς περιορισμοί των υπολογιστών; (1930)

Πολυπλοκότητα

Τι μελετά:
Ταξινόμηση των προβλημάτων με βάση την δυσκολία τους.

- Π.χ.
  - Εύκολο: Ταξινόμηση αριθμών
  - Δύσκολο: Ταξινόμηση Μαθημάτων για Ωρολόγιο Πρόγραμμα
- Τι κάνει τα προβλήματα εύκολα ή δύσκολα;
  - **Άγνωστο μέχρι σήμερα**
- Τα δύσκολα προβλήματα είναι τα καλά προβλήματα…
  - Κρυπτογραφία

Υπολογισιμότητα

Τι μελετά:

Την επιλυσιμότητα ή ανεπιλυσιμότητα των προβλημάτων.

- Ανεπίλυτα Προβλήματα
  - Πρόβλημα Τερματισμού
  - Απόδειξη ή Κατάρριψη μιας μαθηματικής πρότασης

Θεωρία Αυτομάτων

Τι μελετά:
Καθορίζει τα μαθηματικά μοντέλα της υπολογιστικής επιστήμης.

- Πρακτικές Εφαρμογές:
  - Επεξεργασία κειμένου (πεπερασμένα αυτόματα)
  - Σχεδίαση γλωσσών προγραμματισμού (γραμματική χωρίς συμφραζόμενα)
- Σύνδεση με προηγούμενα:
  - Προσφέρει σαφή ορισμό του υπολογιστή

Σύνολα

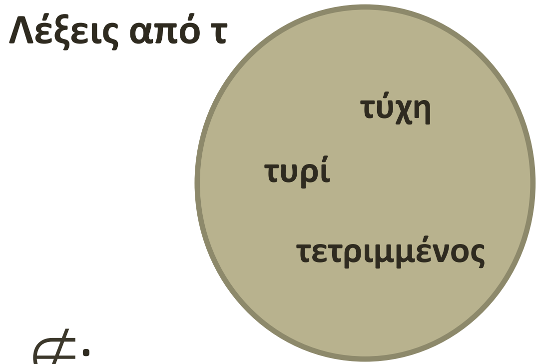
Ορισμός Συνόλου:
Μια ομάδα από αντικείμενα.

- **Στοιχεία**: Μέλη Συνόλου
  - Οποιοδήποτε τύπου
    - αριθμοί, π.χ. {2, 4, 5}
    - σύμβολά, π.χ. {α, γ, ζ}
    - ή και άλλα σύνολα, π.χ. { {1,2}, {2,3} }
  - Δεν έχουν συγκεκριμένη σειρά
  - Δεν επαναλαμβάνονται

- **Πλήθος** είναι ο αριθμός των στοιχείων ενός συνόλου
  - Π.χ. A={2, 4, 5} έχει πλήθος |A|=3

Αναπαράσταση συνόλων

- Συστηματικά:
  - B={3, 13, 25}
- Κατηγορηματικά: Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο {n | κανονας για το n}
  - Γ ={x| x είναι μήνας του καλοκαιριού}
- Διαγραμματικά: Διάγραμμα Venn



- Σύμβολα $\in$, $\notin$:
  - 3 $\in$ B (ανήκει)
  - 23$\notin$ B (δεν ανήκει)

Σχέσεις Συνόλων

- Το σύνολο A είναι **υποσύνολο** του συνόλου B, A $\subseteq$ B, αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. (A εγκλείεται στο B)
  - Μαθηματικά: $A \subseteq B$: $\forall x \in A$, $x \in B$

- Ιδιότητες **Εγκλεισμού:**
  - Ανακλαστική: $A \subseteq A$
  - Αντισυμμετρική: Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, $\Rightarrow A = B$
  - Μεταβατική: Αν είναι $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$, $\Rightarrow A \subseteq C$

- Εάν $A \subseteq B$ και $A \neq B$ τότε το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B και γράφετε $A \subset B$ ή $A \subsetneq B$

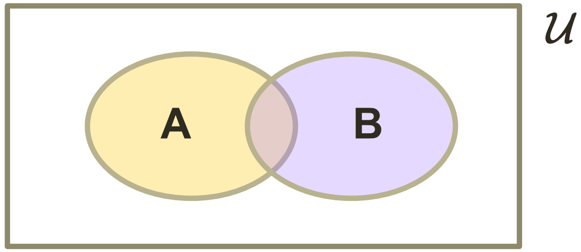
- A και B είναι **συγκρίσιμα** αν είτε $A \subseteq B$ είτε $B \subseteq A$

Ειδικοί τύποι συνόλων

- **Κενό Σύνολο { } ή ∅:** Το σύνολο χωρίς στοιχεία.
- **«Σύμπαν» $\mathcal{U}$:** Το σύνολο που περιέχει όλα τα υπό-μελέτη αντικείμενα.
- **Άπειρο Σύνολο:** περιέχει άπειρα στοιχεία
  - Π.χ. Σύνολο Φυσικών Αριθμών
- **Δυναμοσύνολο** ενός συνόλου A, $\mathcal{P}$(A) περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα του A
  - $|\mathcal{P}(A)|=2^{A}$
  - Παράδειγμα
    - A ={♣,♦, ♠}
    - $\mathcal{P}$(A) ={ { }, {♠}, {♣}, {♦}, {♣,♦}, {♣,♠}, {♦,♠}, {♣,♦, ♠} }.

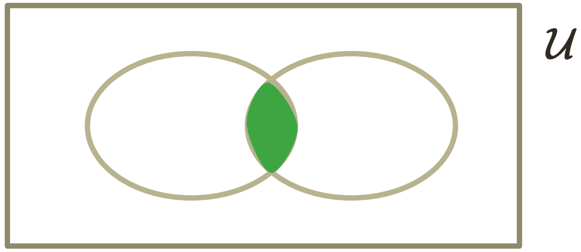
Πράξεις Συνόλων

- Για δύο σύνολα A και B



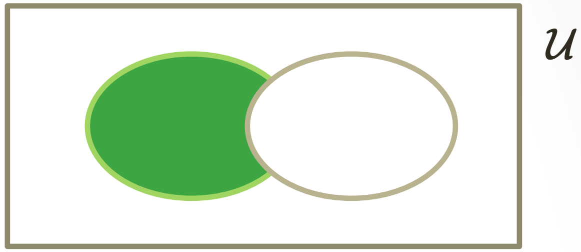
- $A \cup B = \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$
  - **Ένωση**

- $A \cap B = \{x | x \in A \text{ and } x \in B\}$
  - **Τομή**

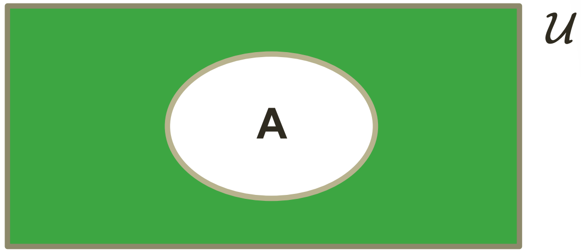


Πράξεις Συνόλων

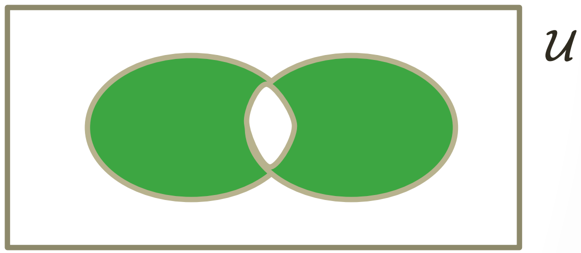
- $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ and } x \notin B\}$
  - **Αφαίρεση**



- $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$
  - **Συμπλήρωμα**



- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
  - **Συμμετρική Διαφορά**



- Παρατήρησες:
  - $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
  - $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

Ιδιότητες Πράξεων

- Νόμος **Αντιμετάθεσης**
  - $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$
- Νόμος **Προσεταιρισμού**
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ και $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Νόμος **Επιμερισμού**
  - Ένωσης προς την τομή: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - Τομής προς την ένωση: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- A και B είναι **ξένα** σύνολα αν
  - $A \cap B = \emptyset$

Ταυτότητες

- Πρώτος νόμος De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Δεύτερος νόμος De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Μηδενοδυναμία του συμπληρώματος: $\overline{\overline{A}} = A$
- Κενό σύνολο
  - $\overline{A} \cap A = \emptyset$
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$ και $A \cup \emptyset = A$
- Σύνολο U
  - $\overline{A} \cup A = \mathcal{U}$
  - $A \cap \mathcal{U} = A$

Καρτεσιανό Γινόμενο

- **Ακολουθία**
  - Κατάλογος αντικειμένων με συγκεκριμένη σειρά
  - Π.χ. (7, 21, 57)
  - (7, 7, 21, 57) δεν είναι ίσο με (7, 21, 57)

- Ακολουθία με κ αντικείμενα λέγεται **κ-άδα**
  - 2 αντικείμενα δυάδα ή ζεύγος

- **Καρτεσιανό Γινόμενο** των συνόλων A και B ($A \times B$) είναι το σύνολο όλων των ζευγών που έχουν ως πρώτο στοιχείο κάποιο μέλος του A και ως δεύτερο στοιχείο κάποιο μέλος του B
  - $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ and } b \in B\}$

Καρτεσιανό Γινόμενο

- Παράδειγμα
  - Εάν A = {1, 2} και B = { x, y, z}

$$A \times B = \{(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z)\}$$

- Συντομογραφία

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{k φορές}} = A^k$$

  - Π.χ. Όλα τα ζεύγη φυσικών αριθμών γράφονται

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \times \mathcal{N} = \{(i,j)|i,j \geq 1\}$$

Σημαντικά Σύνολα

- Σύνολο **ακεραίων** αριθμών: $\mathcal{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
  - Θετικοί ακέραιοι: $\mathcal{Z}_+$
  - Αρνητικοί ακέραιοι: $\mathcal{Z}_-$
- Σύνολο **φυσικών** αριθμών: $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$
- Σύνολο **πραγματικών** αριθμών: $\mathcal{R}$

Πεπερασμένα και Άπειρα Σύνολα

- Ένα σύνολο A καλείται **πεπερασμένο** αν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε το A να είναι ισοπληθής με το σύνολο {1,...,n}.
- Ένα σύνολο είναι **απείρως αριθμήσιμο** αν αυτό είναι ισοπληθής με το σύνολο των φυσικών αριθμών.
- Ένα σύνολο είναι **αριθμήσιμο** αν αυτό είναι απείρως αριθμήσιμο ή πεπερασμένο.
- Ένα σύνολο καλείται **άπειρο** αν αυτό δεν είναι πεπερασμένο.

Συναρτήσεις και Σχέσεις

Ορισμός Συνάρτησης:
Ένα αντικείμενο που ορίζει έναν συσχετισμό μεταξύ ενός συνόλου «εισόδων» με ένα σύνολο «εξόδων»

- Δέχεται μια είσοδο και παράγει μια έξοδο
  - f(a) = b

$$f : D \rightarrow R$$

- **Πεδίο Ορισμού**: Το σύνολο όλων των δυνατών εισόδων D
- **Πεδίο Τιμών**: Το σύνολο όλων των δυνατών εξόδων R

Δρ. Νικόλας Νικολάου

Συναρτήσεις και Σχέσεις

- Αν πεδίο ορισμού είναι το $A_1 \times \ldots \times A_k$ η είσοδος της συνάρτησης είναι μια κ-άδα $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \alpha_i \in A_i$
  - τα α_i είναι παράμετροι της συνάρτησης

- Συμβολισμοί διπαραμετρικών συναρτήσεων
  - Ενθηματικός, π.χ. a + b
  - Προθηματικός, π.χ. +(a,b)

- **Κατηγόρημα** ή **ιδιότητα**: Οποιαδήποτε συνάρτηση με πεδίο τιμών το σύνολο {ΑΛΗΘΕΣ, ΨΕΥΔΕΣ} .

Ασκήσεις για εξάσκηση

- Αποδείξτε τα παρακάτω
  - Αν είναι $B \subseteq A$ και $B \subseteq \overline{A}$, τότε $B = \emptyset$

Ασκήσεις για εξάσκηση

- Αποδείξτε τα παρακάτω

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

- Αποδείξτε τα παρακάτω

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

Ερωτήσεις;