16/10/11

Φροντιστήριο 7ο

Ασυμφραστικές Γλώσσες

$w \in L$

$|w| \geq p$ (μήκος άντλησης)

$w = uvxyz$

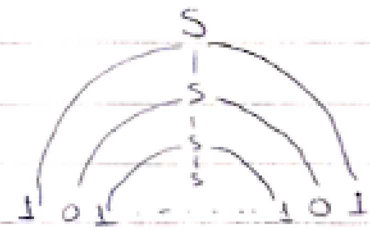
δείξαμε ότι: $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ δεν είναι ασυμφραστική γλώσσα.

Ν.δ.ο. $\rightarrow$ $L_2 = \{ww : w \in \{0,1\}^*\}$ δεν είναι ασυμφραστική γλώσσα.

$L_3 = \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$

πχ 10101111010101

$S \rightarrow 1S1 \mid 0S0 \mid e$



- $L_2 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$

<u>Βήμα 1</u>: L_2 είναι ασυμφραστική

<u>Βήμα 2</u>: p: μήκος άντλησης

<u>Βήμα 3</u>: Επιλογή λέξης.

Θέλουμε λέξη w τ.ω.:

- $w \in L_2$
- $|w| \geq p$
- να μην επιδέχεται άντληση, δηλ. $\exists\, w = uvxyz$ τότε $w' = uv^i xy^i z \notin L_2$, $\forall i \geq 0$

$w = 0^p 1 0^p 1$ με οποιονδήποτε τρόπο και να διασπάσεις την λέξη και δεν πρέπει να επιδέχεται άντληση

$|w| = \underbrace{2p+2}_{\text{μήκος λέξης}} \geq p$

$w \in L_2$

$\underbrace{00\ldots00}_{u}\underbrace{0}_{v}\underbrace{1}_{x}\underbrace{0}_{y}\underbrace{00\ldots00}_{z}$

$uv^2xy^2z = \underbrace{00\ldots00}_{u}\underbrace{00}_{vv}\underbrace{1}_{x}\underbrace{00}_{yy}\underbrace{00\ldots00}_{z}$

μήκος λέξης

$w = 0^p 1^p 0^p 1^p$ $\quad |w| = 4p+4 \geq p$

<u>Βήμα 4:</u> Συνθήκες Άντλησης

1) $uv^ixy^iz \in L_2$, $\forall i \geq 0$

2) $|vy| > 0$ είτε $v \neq e$ ή $y \neq e$

3) $|vxy| \leq p$

<u>Περίπτωση 1η</u>: vxy βρίσκεται στο πρώτο μέρος της λέξης

α) v και y είναι μόνο 0

$$uvxyz = \underbrace{0^a}_{u}\underbrace{0^\beta}_{v}\underbrace{0^\gamma}_{x}\underbrace{0^\delta}_{y}\underbrace{0^{p-(a+\beta+\gamma+\delta)}1^p0^p1^p}_{z}$$

$\Rightarrow uv^ixy^iz$ τότε πρώτη υπολέξη έχει περισσότερα 0 από την δεύτερη υπολέξη.

$\Rightarrow w' = 0^j1^p0^p1^p$ όπου $j \neq p \Rightarrow w' \notin L_2$

$$uv^0xy^0z = 0^a(0^\beta)^0 0^\gamma (0^\delta)^0 0^{p-(a+\beta+\gamma+\delta)}1^p0^p1^p$$
$$= 0^{p-(\beta+\delta)}1^p0^p1^p$$

Αλλά από συνθήκη 2: $|vy| > 0 \Rightarrow |v| > 0$ ή $|y| > 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad\quad \downarrow$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \beta > 0 \qquad \delta > 0$

$\Rightarrow p-(\beta+\delta) \leq p-1$

β) v και y έχει μόνο 1 $\qquad p-a+\beta+\gamma+\delta \leq p$

$$uvxyz = \underbrace{0^p1^a}_{u}\underbrace{1^\beta}_{v}\underbrace{1^\gamma}_{x}\underbrace{1^\delta}_{y}\underbrace{1^{p-(a+\beta+\gamma+\delta)}0^p1^p}_{z} \qquad \beta+\gamma+\delta \leq a$$

$w' = uv^ixy^iz$, $i \geq 0 \Rightarrow w' = 0^p1^j0^p1^p$ όπου $j \neq p$ (απόδειξη όπως 1α)

$\Rightarrow w' \notin L_2$

γ) v και y είναι 0 και 1

(i) $$uvxyz = \underbrace{0^a}_{u}\underbrace{0^{p-a}1^\beta}_{v}\underbrace{1^\gamma}_{x}\underbrace{1^\delta}_{y}\underbrace{1^{p-(\beta+\gamma+\delta)}0^p1^p}_{z}$$

$\Rightarrow uv^ixy^iz$ θα έχει εναλλάξ 0 και 1

(ii) $$uvxyz = \underbrace{0^a}_{u}\underbrace{0^\beta}_{v}\underbrace{0^{p-(a+\beta)}1^\gamma}_{x}\underbrace{1^\delta}_{y}\underbrace{1^{p-(\gamma+\delta)}0^p1^p}_{z}$$

$\Rightarrow uv^ixy^iz$ Η πρώτη λέξη θα είναι της μορφής $0^i1^j0^p1^p$ όπου $j \neq p$

(iii) $$uvxyz = \underbrace{0^a}_{u}\underbrace{0^\beta}_{v}\underbrace{0^\gamma}_{x}\underbrace{0^{p-(a+\beta+\gamma)}1^\delta}_{y}\underbrace{1^{p-\delta}0^p1^p}_{z}$$

Περίπτωση 2η: vxy βρίσκεται στη δεύτερη υπολέξη.
τα ίδια με την Περίπτωση 1

Περίπτωση 3η: vxy vxy εκτείνεται και στις δύο υπολέξεις

(i) $uvxyz = \underbrace{0^p 1^\alpha}_{u} \underbrace{1^\beta}_{v} \underbrace{1^{p-(\alpha+\beta)} 0^\gamma}_{x} \underbrace{0^\delta}_{y} \underbrace{0^{p-(\gamma+\delta)} 1^p}_{z}$

$0^p 1^{p-1} \underbrace{1\,0}_{v} \underbrace{0}_{xy}{}^{p-1} 1^p$

$2|xy| \leq p-2$

$\left.\begin{array}{l} |vxy| \leq p \\ |v| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow |xy| \leq p-2$

$w' = 0^p 1^j 0^k 1^p$ τω $j, k \neq p$

$w' \notin L_2$

(ii) $uvxyz = \underbrace{0^p 1^\alpha}_{u} \underbrace{1^{p-\alpha} 0^\beta}_{v} \underbrace{0^\gamma}_{x} \underbrace{0^\delta}_{y} \underbrace{0^{p-(\beta+\gamma+\delta)} 1^p}_{z}$

$w' = uv^i x y^i z \notin L_2$

(iii) $uvxyz = \underbrace{0^p 1^\alpha}_{u} \underbrace{1^\beta}_{v} \underbrace{1^\gamma}_{x} \underbrace{1^{p-(\alpha+\beta+\gamma)} 0^\delta}_{y} \underbrace{0^{p-\delta} 1^p}_{z}$

$w' = uv^i x y^i z \notin L_2$

$\Rightarrow$ ΑΤΟΠΟ

$\Rightarrow$ L_2 δεν είναι ασυμφραστική γλώσσα