ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Φροντιστήριο 1

Είδη αποδείξεων

- Με **κατασκευή** (κατασκευαστικές)
- Με **απαγωγή σε άτοπο** (αντίφαση)
- Με **επαγωγή**

Απαγωγή σε Άτοπο (Αντίφαση)

- Υποθέτουμε ότι η μαθηματική πρόταση δεν ισχύει και στη συνέχεια δείχνουμε ότι η υπόθεσή μας οδηγεί σε εσφαλμένο συμπέρασμα, άτοπο.

- Παράδειγμα
  - *Ο αριθμός* $\sqrt{2}$ *είναι άρρητος*

  Απόδειξη: ?

Επαγωγή

- Η μαθηματική πρόταση Π(n) είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο n εάν
  - Η Π(1) είναι αληθής
  - Για οποιοδήποτε ακέραιο n> 0, αν η Π(n) είναι αληθής τότε και η Π(n+1) είναι αληθής.

- Μαθηματική Επαγωγή χωρίζεται σε 3 μέρη
  - Βάση: Εξετάζουμε την πρόταση Π(1)
  - Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε οτι η πρόταση Π(n) είναι αληθής.
  - Επαγωγικό Βήμα: Στηριζόμενοι στην επαγωγική υπόθεση, αποδεικνύουμε ότι η Π(n+1) είναι αληθής

- Συνήθως χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι τα στοιχεία ενός συνόλου έχουν κάποια ιδιότητα.

Επαγωγή

- Παράδειγμα
  - *Για κάθε ακέραιο n>0, ο αριθμός* $\phi(n) = 4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ *είναι διαιρετός δια 7.*

  Απόδειξη: ?

Θήκη Kleene

Θήκη Kleene του αλφαβήτου Σ, Σ^*, είναι το σύνολο όλων των λέξεων του Σ.

Π.χ. $\{0, 1\}^* = \{ e, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \cdots \}$

Μια **γλώσσα** πάνω στο αλφάβητο Σ είναι $L \subseteq \Sigma^*$.

Επαγωγή

- Παράδειγμα 2:
  - Ανάστροφη λέξη $w^{\mathcal{R}} = w_n w_{n-1} \ldots w_1$
  - Αποδείξετε ότι $\forall x, y \in \Sigma^*, (xy)^{\mathcal{R}} = y^{\mathcal{R}} x^{\mathcal{R}}$

Πράξεις σε Γλώσσες

- **Ένωση:** $L_1 \cup L_2 = \{w | w \in L_1 \text{ or } w \in L_2\}$
  - Π.χ. {00, 01, 11 } ∪ {10, 01, 11} = {00, 01, 10, 11}
- **Τομή**: $L_1 \cap L_2 = \{w | w \in L_1 \text{ and } w \in L_2\}$
  - Π.χ. {00, 01, 11 } ∩ {10, 11}= {11}
- **Συμπλήρωμα**: $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$
- **Σύμπτυξη:** $L_1 L_2 = \{xy | x \in L_1 \text{ and } y \in L_2\}$
  - Πχ. L_1 = {συν}, L_2 = {ύπαρξη, ομιλία},

    L_1 L_2 = {συνύπαρξη, συνομιλία}
  - Όταν $L_1 = L_2$ ⇒ L^2= LL
  - Για κάθε ακέραιο $k \geq 1$, $L^k = L^{k-1} L$

Πράξεις σε Γλώσσες

- **Θήκη Kleene L**: $L^* = \bigcup_{k \geq 0} L^k$
  - π.χ. {αα}* ={e, αα, αααα, …}

- **Ανάστροφη της L**: $L^{\mathcal{R}} = \{x^{\mathcal{R}} | x \in L\}$
  - π.χ. L={ολα, ενα }, L^R ={αλο, ανε}

Άσκηση

- Αποδείξτε ότι

$$(L_1 L_2)^{\mathcal{R}} = {L_2}^{\mathcal{R}} {L_1}^{\mathcal{R}}$$

Ερωτήσεις;