14/09/11 Φροντιστήριο 1ο

Απο Διάλεξη 2 slide 22

$\mathbb{Q} = \{ x \mid x = \frac{m}{n} \quad m, n \in \mathbb{Z} - \{0\} \}$ ρητοί

$\overline{\mathbb{Q}}$ (άρρητοι)

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ Υποθέτουμε ότι $\sqrt{2}$ ρητός με m και n ακέραιοι αριθμοί

$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$

m^2 άρτιος $\Rightarrow$ m άρτιος $\Rightarrow m = 2c$

$m^2 = 2n^2 \Rightarrow (2c)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4c^2 = 2n^2 \qquad 2c = \sqrt{2n^2}$

$n^2 = 2c^2 \qquad n = \sqrt{2}c$

n^2 άρτιος $\Rightarrow$ n άρτιος

m άρτιος, n άρτιος $\Big\}$ $\Rightarrow$ Άτοπο αφού η υπόθεση που κάναμε οδηγεί σε λάθος συμπέρασμα

$\Downarrow$

$\sqrt{2}$ άρρητος

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ Βρίσκουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη.

$\frac{12}{6} = \frac{2}{1}$ - άρτιος - περιττοί

$= \frac{m_e}{n_e}$ ή m_e περιττοί ή n_e περιττοί

$\Rightarrow n_e\sqrt{2} = m_e$

$2n_e^2 = m_e^2 \Rightarrow m_e$ άρτιος

$m_e = 2k \Rightarrow 2n_e^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2n_e^2 = 4k^2$

$\Rightarrow n_e^2 = 2k^2 \Rightarrow n_e$ άρτιος

m_e - άρτιος, n_e - άρτιος $\Big\}$ $\Rightarrow$ Άτοπο αφού η έρχεται σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση

$\Downarrow$

$\sqrt{2}$ άρρητος

Απο Διαλεξη 2 slide 24

Για καθε $n>0$, ο αριθμος $\phi(n) = 4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ ειναι διαιρετος δια 7.

Βασικό Βήμα:

$\phi(1) = 4^{2\cdot 1+1} + 3^{2\cdot 1+1} = 4^3 + 3^3 = 64+27 = 91$

$91/7 = 13$ Ισχυει

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε οτι ισχυει για n

$\phi(n) = 4^{2n+1} + 3^{2n+1}$

Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξουμε οτι ισχυει για n+1

$$\begin{aligned}\phi(n+1) &= 4^{2(n+1)+1} + 3^{2(n+1)+1} \\ &= 4^{2n+2+1} + 3^{2n+2+1} \\ &= 4^2 \cdot 4^{2n+1} + 3^2 \cdot 3^{2n+1} \qquad 4^2 = 16 = 7+9 \\ &= \underbrace{7\cdot 4^{2n+1} + 9\cdot 4^{2n+1}} + 9\cdot 3^{2n+1} \\ &= \underbrace{7\cdot 4^{2n+1} + 9\left(4^{2n+1} + 3^{2n+1}\right)}\end{aligned}$$

Διαιρειται με το 7

Παράδειγμα 2 slide 6

$w^R = w_n w_{n-1} \ldots w_1$ ανάστροφη λέξη

Αποδείξτε ότι $\forall x, y \in \Sigma^*$, $(xy)^R = y^R x^R$

~~Αν κάναμε και επαγωγή στο $|x|$, στην ΕΥ: θα είχαμε ότι $|x| = n$ και $|y| = n$. δηλ. το~~

Επαγωγή στο $|y|$ ~~μήκος των δύο λέξεων είναι το ίδιο, έτσι καταλήγουμε σε~~

Βασικό Βήμα ~~μια κοινή περίπτωση και στο ΕΒ δεν θα μπορούσαμε να δώσ… ισχύει …~~

(Β): $|y| = 0$ $\quad y = e$ $\qquad$ η λέξη y είναι κενή

$x_1 x_2 \ldots x_2 e \quad = (xe)^R = e x^R = x^R \qquad x = x_1 x_2 \ldots x_k \quad x_i \in \Sigma$

$e^R x^R = e x^R = x^R \qquad x^R = x_k x_{k-1} \ldots x_1$

Επαγωγική Υπόθεση

(ΕΥ): $|y| = n$

$(xy)^R = y^R x^R$

Επαγωγικό Βήμα

(ΕΒ): $|y| = n+1$ — προσθέτω 1 σύμβολο στην λέξη y

$y = y'\sigma$, $\sigma \in \Sigma$

$(xy)^R = (xy'\sigma)^R$

$= \sigma (xy')^R = \sigma y'^R x^R$

$y^R x^R = (y'\sigma)^R x^R$

$= \sigma y'^R x^R = \sigma (xy')^R$.

2ος τροπος αποδειξης

$(xy)^R = y^R x^R$

Βασικό Βήμα: $|xy| = 0$

$(ee)^R = e^R e^R = e$

Επαγωγική Υπόθεση

$|x'y| = n$

$(x'y)^R = y^R x'^R$

Επαγωγικό Βήμα

$|xy| = n+1$ – προσθεταμε 1 σύμβολο, το οποιο μπορει να προστεθει είτε στην x είτε στην y

οι 2 λέξεις δε είναι ισομηκοι $\begin{cases} |x'| = k \\ |y'| = m \end{cases}$ τ.ω. $k+m=n$

$x = \sigma x'$

$x^R = x'^R \sigma$

1η περίπτωση: $x = \sigma x'$, $\sigma \in \Sigma$

$\downarrow (k+1)$

$(\sigma x' y')^R = \underbrace{(x'y')^R}_{\text{επαγωγική υπόθεση}} \sigma = y'^R x'^R \sigma = y'^R x^R$

2η περίπτωση: $y = y'\sigma$, $\sigma \in \Sigma$

$\downarrow (m+1)$

$(x'y)^R = (x'y'\sigma)^R = \sigma \overbrace{(x'y')^R}^{\text{επαγωγικη υπόθεση}}$

$= \sigma y'^R x'^R = y^R x'^R$

$y = y'\sigma$

$y^R = \sigma y'^R$

Άσκηση slide 9

$(L_1 \cdot L_2)^R = L_2^R \cdot L_1^R$

$L_1^R = \{ x^R \mid x \in L_1 \}$
$L_2^R = \{ y^R \mid y \in L_2 \}$

$L_1 L_2 = \{ x.y \mid x \in L_1 \text{ και } y \in L_2 \}$

$(L_1 L_2)^R = \{ (x.y)^R \mid x \in L_1 \text{ και } y \in L_2 \}$

$(L_1 L_2)^R = \{ y^R x^R \mid x \in L_1 \text{ και } y \in L_2 \}$

$L_2^R L_1^R = \{ y^R x^R \mid x \in L_1 \text{ και } y \in L_2 \}$

$\Rightarrow (L_1 \cdot L_2)^R = L_2^R \cdot L_1^R$