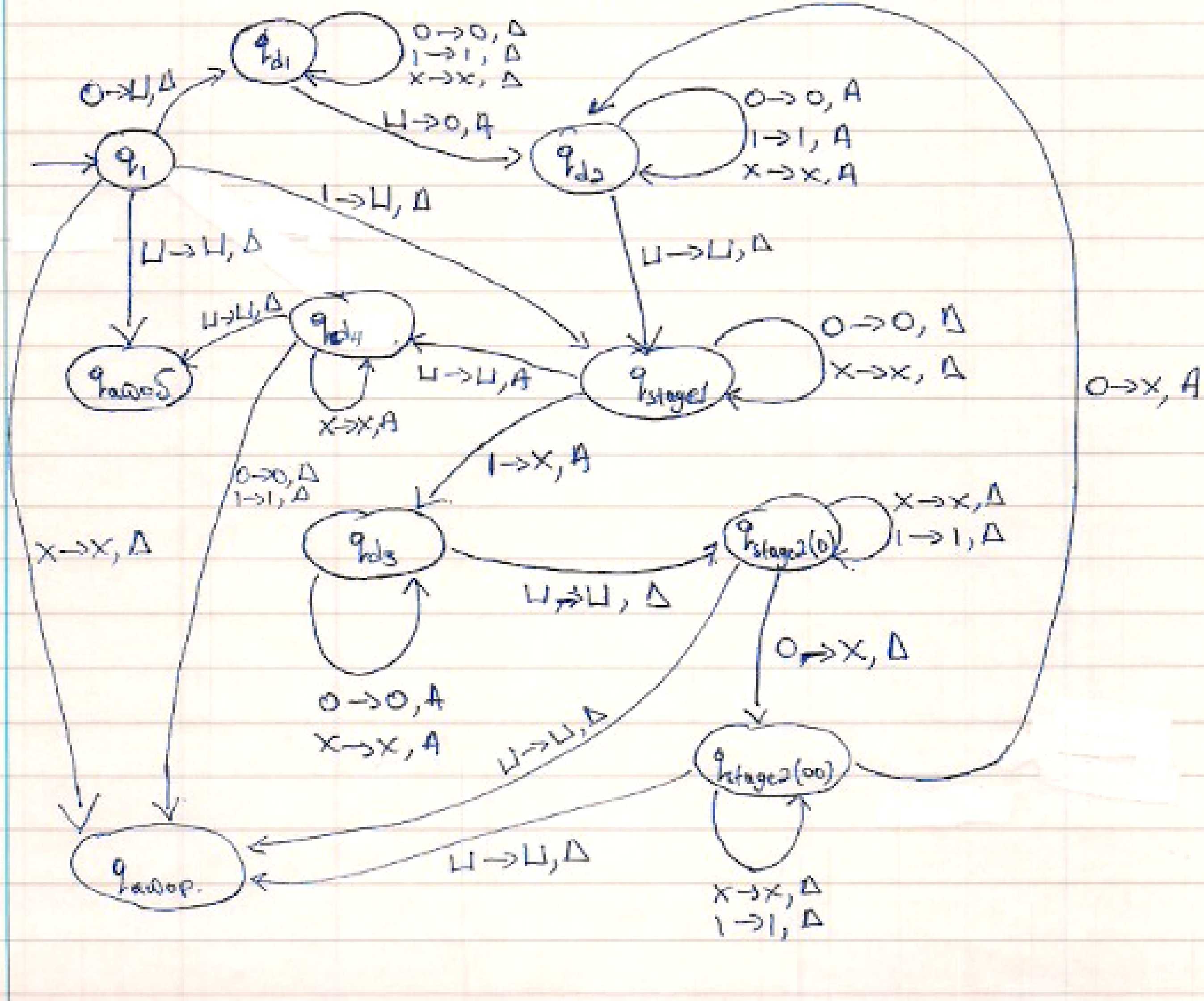
Άσκηση 4 (Πρόχειρες Λύσεις)

1. M = 'Για είσοδο w:
   1. Σάρωσε την ταινία μέχρι το πρώτο 1 που δεν είναι σημαδεμένο. Αν φτάσουμε στο τέλος της λέξης πήγαινε στο 4. Αλλιώς επαναφέρουμε την κεφαλή στην αρχή της ταινίας.
   2. Σάρωσε την ταινία και σημάδεψε τα πρώτα δυο μη σημαδεμένα μηδενικά. Αν φτάσεις στο τέλος της ταινίας απέρριψε.
   3. Επαναφέρουμε την κεφαλή στην αρχή της ταινίας και πάμε στο στάδιο 1.
   4. Σαρώνουμε την ταινία. Αν βρούμε μη σημαδεμένο 0 τότε απορρίπτουμε. Αλλιώς αποδεχόμαστε.'



2. a) Έστω L_1 και L_2 δύο οποιεσδήποτε διαγνώσιμες γλώσσες και M_1, M_2 δύο TM που τις διαγιγνώσκουν αντίστοιχα. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια TM που διαγιγνώσκει την τομή:

M' = 'Για είσοδο w:
1. Προσομοίωσε την M_1 πάνω στην w. Εάν η M_1 αποδεχτεί προσομοιώνουμε την M_2 στην w. Αλλιώς απορρίπτουμε.
2. Αν η M_2 αποδεχτεί, αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.'

Αφού η M_1 και M_2 είναι διαγνώστες θα τερματίσουν σε οποιαδήποτε είσοδο. Άρα και η M' θα τερματίσει σε κάθε είσοδο και έτσι η M' είναι διαγνώστης της $L_1 \cap L_2$.

b) L_1 διαγνώσιμη τότε $\overline{L_1}$ διαγνώσιμη.
Έστω M_1 η TM που διαγιγνώσκει την L_1

M = 'Για είσοδο w:
1. Προσομοίωσε την M_1 πάνω στην w. Εαν αποδεχτεί, απορρίπτουμε. Αλλιώς αποδεχόμαστε.'

Η M διαγιγνώσκει την $\overline{L_1}$.

c) Αν L_1 και L_2 διαγνώσιμες τότε L_1L_2 διαγνώσιμη.
Έστω M_1 και M_2 οι TM που διαγιγνώσκουν τις L_1 και L_2 αντίστοιχα.

c) Αν L_1 και L_2 διαγνώσιμες τότε L_1L_2 διαγνώσιμη.
Έστω M_1 και M_2 οι ΤΜ που διαγιγνώσκουν την L_1 και L_2 αντίστοιχα.

M = 'Για είσοδο w:
1. Για κάθε διαχωρισμό $w = yz$:
1a. Τρέξε την M_1 πάνω στη λέξη y και την M_2 πάνω στην λέξη z.
1b. Εάν και οι δυο μηχανές αποδεχτούν τότε αποδεχόμαστε.
2. Απόρριψε την λέξη'.

Η M είναι διαγνώστης της L_1L_2.

d) Αν L_1 είναι διαγνώσιμη τότε L_1^* διαγνώσιμη.
Έστω M_1 η ΤΜ που διαγιγνώσκει την L_1

M = 'Για είσοδο w:
1. Α $w = e$, τότε αποδεχόμαστε
2. Τρέξε την M_1 πάνω στην w. Εαν η M_1 αποδεχτεί αποδεχόμαστε.
3. Για κάθε πρόθεμα y της w, τέτοιο ώστε $y \neq e$ και $y \neq w$:
3a. Τρέξε ένα αντίγραφο της M στη y και τρέξε την M_1 στη z όπου $w = yz$.
3b. Εαν και οι δυο αποδεχτούν, αποδεχόμαστε.
4. Απόρριψε την λέξη.'

Η M είναι διαγνώστης της L_1^*. Παρατηρείστε ότι η M τερματίζει σε πεπερασμένο χρόνο αφού: (i) Καθε λέξη και τα προθέματά της έχουν πεπερασμένο μήκος και άρα έχουμε πεπερασμένο αριθμό "κλήσεων" της M και (ii) Η M_1 παίρνει πεπερασμένο χρόνο εξ ορισμού.

3 α) Ψευδής.

$L = L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$

Έστω $L_1 = \Sigma^*$ τότε $L = \Sigma^* \cap \overline{L_2} = \overline{L_2}$.
Αν η $\overline{L_2}$ ήταν αναγνωρίσιμη τότε η L_2 θα ήταν αναγνωρίσιμη και συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη. Επομένως θα ήταν διαγνώσιμη. Αντίφαση.

β) Αληθές

$L = L_1 \cap \overline{L_2}$ όπου L_1 και $\overline{L_2}$ αναγνωρίσιμες.

Μπορούμε να δώσουμε μια TM που αναγνωρίζει την L.
Έστω M_1 η TM που αναγνωρίζει την L_1 και M_2 η TM για την $\overline{L_2}$
$M =$ 'Για είσοδο w:
1. Προσομοιώνουμε τις M_1 και M_2 πάνω στην w.
2. Εαν αποδεχτούν και οι δυο αποδεχόμαστε.'

Αφού οι L_1 και $\overline{L_2}$ είναι αναγνωρίσιμες τότε για λέξη $w \in L_1$ και $w \in \overline{L_2}$ τόσο η M_1 όσο και η M_2 θα τερματίσουν και θα αποδεχτούν. Άρα η M θα τερματίσει επίσης και θα αποδεχτεί.

4. α) $A = \{\langle R, S\rangle \mid$ οι R και S είναι κανονικές εκφράσεις και $L(R) \subseteq L(S)\}$.

Αφού R και S είναι κανονικές εκφράσεις, έπεται ότι $L(R)$ και $L(S)$ είναι κανονικές γλώσσες. Από την ιδιότητα του συμπληρώματος των κανονικών γλωσσών, έπεται ότι $\overline{L(S)}$ είναι κανονική γλώσσα. Τέλος, από την ιδιότητα των κανονικών γλωσσών ως προς την τομή έπεται ότι $L(R) \cap \overline{L(S)}$ είναι επίσης κανονική. Επομένως η ακόλουθη TM διαγιγνώσκει την A:

M = "Για είσοδο $\langle R, S\rangle$, όπου R και S κανονικές εκφράσεις:

1. Κατασκευάζουμε DFA D τέτοιο ώστε $L(D) = L(R) \cap \overline{L(S)}$
2. Εκτελούμε την TM ΚΕΝΟΤΗΤΑ/DFA για είσοδο $\langle D\rangle$.
3. Αν η ΚΕΝΟΤΗΤΑ/DFA αποδέχεται τότε αποδεχόμαστε. Αλλιώς απορρίπτουμε."

Παρατηρείστε ότι αν $L(R) \subseteq L(S)$ τότε $L(D) = L(R) \cap \overline{L(S)} = \emptyset$. Αφού η ΚΕΝΟΤΗΤΑ/DFA είναι διαγνώστης τότε θα αποδεχτεί αν $L(D) = \emptyset$ και θα απορρίψει αν $L(D) \neq \emptyset$.

β) $S = \{ \langle M \rangle \mid$ το M είναι ένα DFA που αποδέχεται την λέξη w^R οποτεδήποτε αποδέχεται την λέξη $w \}$.

Σύμφωνα με την S όταν $w \in L(M)$ τότε $w^R \in L(M)$. Γνωρίζουμε ότι $L(M)^R = \{ w^R \mid w \in L(M) \}$. Επομένως για κάθε $w \in L(M) \Rightarrow w^R \in L(M)^R$, και.

$$w^R \in L(M) \Rightarrow (w^R)^R \in L(M)^R \Rightarrow w \in L(M)^R$$

Από τα πιο πάνω έπεται ότι $L(M)^R = L(M)$. Κατασκευάζω μια TM που διαγιγνώσκει την S.

$K =$ 'Για είσοδο $\langle M \rangle$, όπου M ένα DFA:

1. Κατασκευάζω NFA N που αναγνωρίζει την $L(M)^R$ από το M ως εξής:
   - 1α. Μετατρέπω την αρχική κατάσταση του M σε τελική.
   - 1β. Αντιστρέφω την φορά των τόξων του M.
   - 1γ. Προσθέτω μια νέα κατάσταση, τη θέτω αρχική, την ενώνω με ε-μεταβάσεις με κάθε τελική του M, και μετατρέπω τις τελικές του M σε μη τελικές.
2. Μετατρέπω το NFA N σε ένα DFA R σύμφωνα με την κατασκευή που είδαμε στην τάξη.
3. Εκτελούμε την TM ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/DFA για είσοδο $\langle M, R \rangle$.
4. Αν η ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/DFA αποδεχτεί, αποδεχόμαστε. Αλλιώς απορρίπτουμε.'

Παρατηρείστε ότι το DFA R αναγνωρίζει την $L(R) = L(M)^R$.

5 α) ΜΗΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ/TM = {<M> | M μια TM και η L(M) δεν είναι κανονική γλώσσα}.

Η γλώσσα ΜΗΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ/TM (ΜΗΚ/TM για συντομία) δεν είναι ούτε διαγνώσιμη, ούτε αναγνωρίσιμη και ούτε συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη.

Πρώτα θα δείξουμε ότι δεν είναι αναγνωρίσιμη. Για να το κάνουμε αυτό ανάγουμε:

$$\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}}/TM \leq_m \text{ΜΗΚ}/TM$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με

$$\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}/TM \leq_m \overline{\text{ΜΗΚ}/TM}.$$

Για την αναγωγή χρησιμοποιούμε την ακόλουθη απεικονιστική συνάρτηση.

F = ' Για είσοδο <M, ω>, όπου M μια TM και ω μια λέξη:
1. Κατασκευάζω την ακόλουθη TM
M' = ' Για είσοδο x:
1. Εάν $x \notin \{a^n b^n : n \geq 0\}$ τότε εκτελούμε την M πάνω στη ω.
2. Αλλιώς τερμάτισε και αποδέξου.'
2. Επιστρέφουμε τη λέξη <M'>.'

Πρέπει να δείξουμε ότι <M, ω> ∈ ΑΠΟΔΟΧΗ/TM ⟺ <M'> ∈ $\overline{\text{ΜΗΚ}/TM}$

⟹ Αν <M, ω> ∈ ΑΠΟΔΟΧΗ/TM τότε η M' αποδέχεται για κάθε είσοδο x. Άρα $L(M') = \Sigma^*$ η οποία είναι κανονική. Επομένως <M'> ∈ $\overline{\text{ΜΗΚ}/TM}$.

⟸ Αν <M'> ∈ $\overline{\text{ΜΗΚ}/TM}$ τότε $\exists x \notin \{a^n b^n : n \geq 0\}$ και η M' αποδέχεται. Αλλιώς $L(M') = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ που δεν είναι κανονική και η <M'> ∉ $\overline{\text{ΜΗΚ}/TM}$, αντίφαση.
Άρα για x η M' αποδέχεται μόνο αν η M αποδέχεται την ω
⟹ <M, ω> ∈ ΑΠΟΔΟΧΗ/TM

Για να δείξουμε ότι η γλώσσα δεν είναι συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη κάνουμε την ακόλουθη αναγωγή

$$\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}} \leq_m \overline{\text{ΜΗΚ}_{TM}}$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με

$$\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \leq_m \text{ΜΗΚ}_{TM}.$$

λόγω της απεικονιστικής συνάρτησης η οποία είναι ένα προς ένα και επί. Η απεικονιστική συνάρτηση είναι η εξής.

F = 'Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, όπου M TM και w μια λέξη:
1. Κατασκευάζω την ακόλουθη TM.
M' = 'Για είσοδο x:
1. Εάν η $x \in \{a^n b^n : n \geq 0\}$ τότε εκτελούμε την M πάνω στην w.
2. Αλλιώς τρέξε επ' άπειρον.'
2. Επέστρεψε την λέξη $\langle M' \rangle$.'

Πρέπει να δείξουμε ότι: $\langle M, w \rangle \in \text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \iff \langle M' \rangle \in \text{ΜΗΚ}_{TM}$

$\Rightarrow$ Αν $\langle M, w \rangle \in \text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}$ τότε η M' αποδέχεται για κάθε είσοδο $x \in \{a^n b^n : n \geq 0\}$. Άρα $L(M') = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ που δεν είναι κανονική. Επομένως η $\langle M' \rangle \in \text{ΜΗΚ}_{TM}$.

$\Leftarrow$ Αν $\langle M' \rangle \in \text{ΜΗΚ}_{TM}$ τότε η $L(M') = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ αφού η M' τερματίζει και αποδέχεται μια λέξη x αν και μόνο αν η $x \in \{a^n b^n : n \geq 0\}$. Για να αποδεχτεί όμως η M' τη x, σημαίνει ότι η M αποδέχεται την w. Επομένως $\langle M, w \rangle \in \text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}$.

b) K-ΜΗΚΗΣ/TM = {<M,k> | M μια TM και k ένας ακέραιος αριθμός και M δέχεται τουλάχιστον μια λέξη μήκους k

Η γλώσσα K-ΜΗΚΗΣ/TM είναι αναγνωρίσιμη αλλά ούτε διαγνώσιμη, ούτε συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη.

Για να δείξουμε ότι η γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη θα δώσουμε μια TM η οποία τερματίζει σε πεπερασμένο χρόνο και αποδέχεται αν η είσοδος ανήκει στην K-ΜΗΚΗΣ/TM. Η πιο κάτω TM αναγνωρίζει την K-ΜΗΚΗΣ/TM.

K = 'Για είσοδο <M,k>, όπου M μια TM και k ένας ακέραιος:
1. Για κάθε λέξη w με μήκος $|w|=k$, τρέξε ένα αντίγραφο της M πάνω στην w.
2. Εάν κάποιο αντίγραφο αποδεχτεί, αποδεχόμαστε!

Για να δούμε ότι η K τερματίζει σε πεπερασμένο χρόνο προσέξτε ότι το αλφάβητο Σ που χρησιμοποιούμε για την δημιουργία των λέξεων έχει πεπερασμένο αριθμών συμβόλων. Υπάρχουν $|\Sigma|^k$ δυνατές λέξεις μήκους k. Αφού $k \in \mathbb{N}$ τότε και $|\Sigma|^k \in \mathbb{N}$ και είναι ένας πεπερασμένος αριθμός. Επομένως θα τρέξουμε ένα πεπερασμένο πλήθος αντιγράφων που το κάθε ένα χρειάζεται πεπερασμένο χρόνο να αποδεχτεί.

Για να δείξουμε ότι η γλώσσα είναι μη διαγνώσιμη και άρα μη συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη αρκεί να ανάγουμε

$$\text{ΑΠΟΔΟΧΗ/TM} \leq_m \text{K-ΜΗΚΗΣ/TM}$$

Θεωρείστε την ακόλουθη υπολογιστική συνάρτηση.

F = 'Για είσοδο <M, w>, όπου M μια TM και w μια λέξη:
1. Κατασκευάζω την ακόλουθη TM
M' = 'Για είσοδο x:
1. Εάν $|x| = |w|$ τότε εκτελώ την M στη w.
2. Αλλιώς εγκλωβίζομαι.'
2. Επέστρεψε τη λέξη <M', |w|>.'

Πρέπει να δείξουμε ότι: <M, w> ∈ ΑΠΟΔΟΧΗ/TM ⟺ <M', |w|> ∈ Κ-ΜΗΚΗΣ/TM

=> Αν <M, w> ∈ ΑΠΟΔΟΧΗ/TM, τότε η M' εγκλωβίζεται σε όλες τις εισόδους εκτός από τις λέξεις x όπου $|x| = |w|$. Σε μια τέτοια είσοδο x η M' προσομοιώνει την M πάνω στην w. Αφού <M, w> ∈ ΑΠΟΔΟΧΗ/TM τότε η M αποδέχεται την w, και επομένως η M' αποδέχεται την x. Άρα η M' αποδέχεται τουλάχιστον μια λέξη μήκους |w| και έτσι <M', |w|> ∈ Κ-ΜΗΚΗΣ/TM.

<= <M', |w|> ∈ Κ-ΜΗΚΗΣ/TM. Αφού <M', |w|> ∈ Κ-ΜΗΚΗΣ/TM σημαίνει ότι η M' αποδέχεται τουλάχιστον μια λέξη x μήκους $|x| = |w|$. Από το πρόγραμμα της M' παρατηρούμε ότι τερματίζει μόνο εάν η M αποδέχεται την w. Επομένως <M, w> ∈ ΑΠΟΔΟΧΗ/TM