3η Σειρά Ασκήσεων (λύσεις)

1 a) $L_1 = \{x\#y : x, y \in \{a,b\}^* \text{ and } |x| > |y|\}$.

$S \to aSa \mid aSb \mid bSa \mid bSb \mid aS \mid bS \mid a\# \mid b\#$

b) $L_2 = \{a^n w : w \in \{b,c\}^* \text{ and } \#b(w) = 2n\}$.

$S \to aSB \mid e,\ B \to CbCbC,\ C \to cC \mid e$

c) $L_3 = \{a^i b^j c^k : j = i + k\}$.

$L_3 = \{a^i b^i b^k c^k : i, k \geq 0\}$

$S \to AC$
$A \to aAb \mid e$
$C \to bCc \mid e$

d) $L_4 = \{a^i b^j c^k : j \neq i + k\}$.

$= \underbrace{\{a^i b^j c^k : j > i+k\}}_{L_{41}} \cup \underbrace{\{a^i b^j c^k : j < i+k\}}_{L_{42}}$

$L_{41} = \{a^i b^j c^k : j < i+k\}$.

$= \{a^i b^i b^m b^k c^k : i, k \geq 0,\ m > 0\}$.

$S_{41} \to A_1 B_1 C_1$

$A_1 \to aA_1b \mid e$

$B_1 \to bB_1 \mid b$

$C_1 \to bC_1c \mid e$

$$L_{42} = \{a^i b^j c^k : j < i+k\}$$

$$= \underbrace{\{a^i b^j c^k : 0 \leq j < i\}}_{L_{421}} \cup \underbrace{\{a^i b^j c^k : i \leq j < i+k\}}_{L_{422}}$$

$$L_{421} = \{a^i b^j c^k : 0 \leq j < i\}$$
$$= \{a^m a^j b^j c^k : j,k \geq 0 \text{ and } m > 0\}$$

$S_{421} \longrightarrow A_{21} B_{21} C_{21}$

$A_{21} \longrightarrow a A_{21} \mid a$

$B_{21} \longrightarrow a B_{21} b \mid e$

$C_{21} \longrightarrow c C_{21} \mid e$

$$L_{422} = \{a^i b^j c^k : i \leq j < i+k\}.$$

$$= \{a^i b^i b^m c^k : i \geq 0 \text{ and } m < k\}.$$

$S_{422} \longrightarrow A_{22} C_{22}$

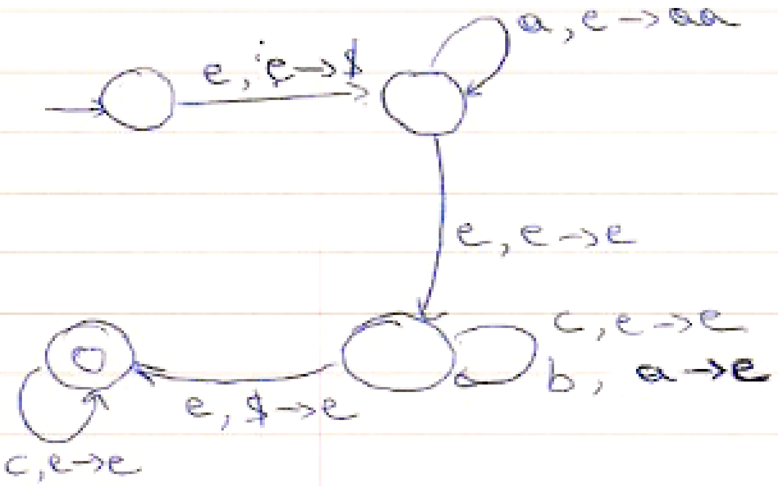
$A_{22} \longrightarrow a A_{22} b \mid e$

$C_{22} \longrightarrow b C_{22} c \mid C_{22} c \mid c$

$S_{42} \longrightarrow S_{421} \mid S_{422}$

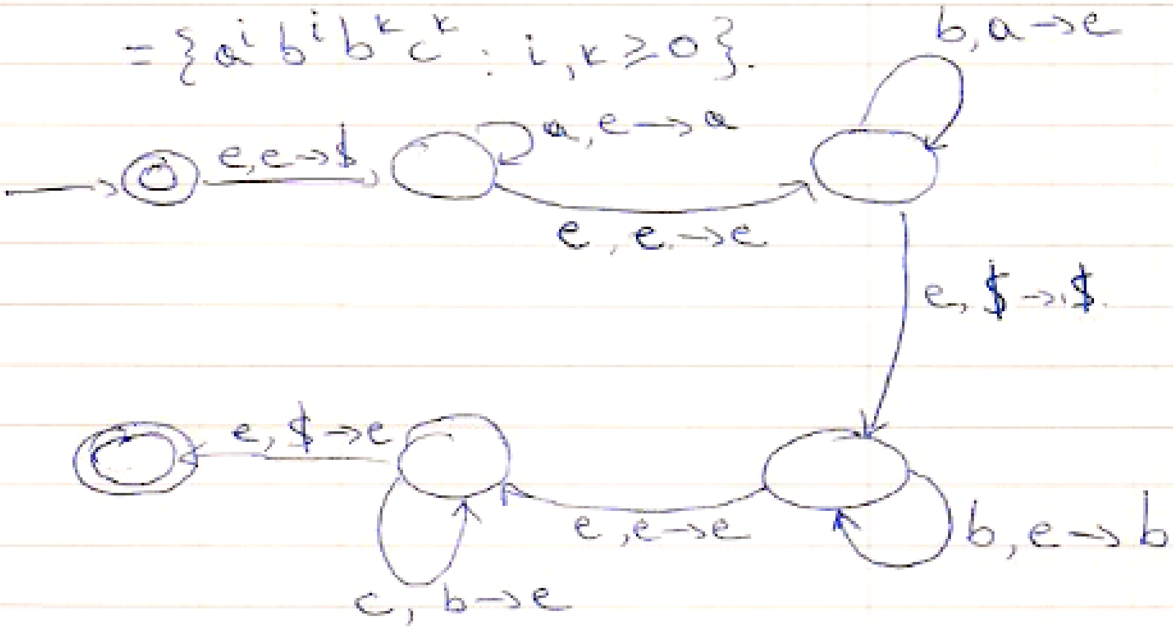
$S \longrightarrow S_{41} \mid S_{42}$

2. i) $L_2 = \{a^n w : w \in \{b,c\}^* \text{ and } \#_b(w) = 2n\}$.



ii) $L_3 = \{a^i b^j c^k : j = i+k\}$.

$= \{a^i b^i b^k c^k : i, k \geq 0\}$.

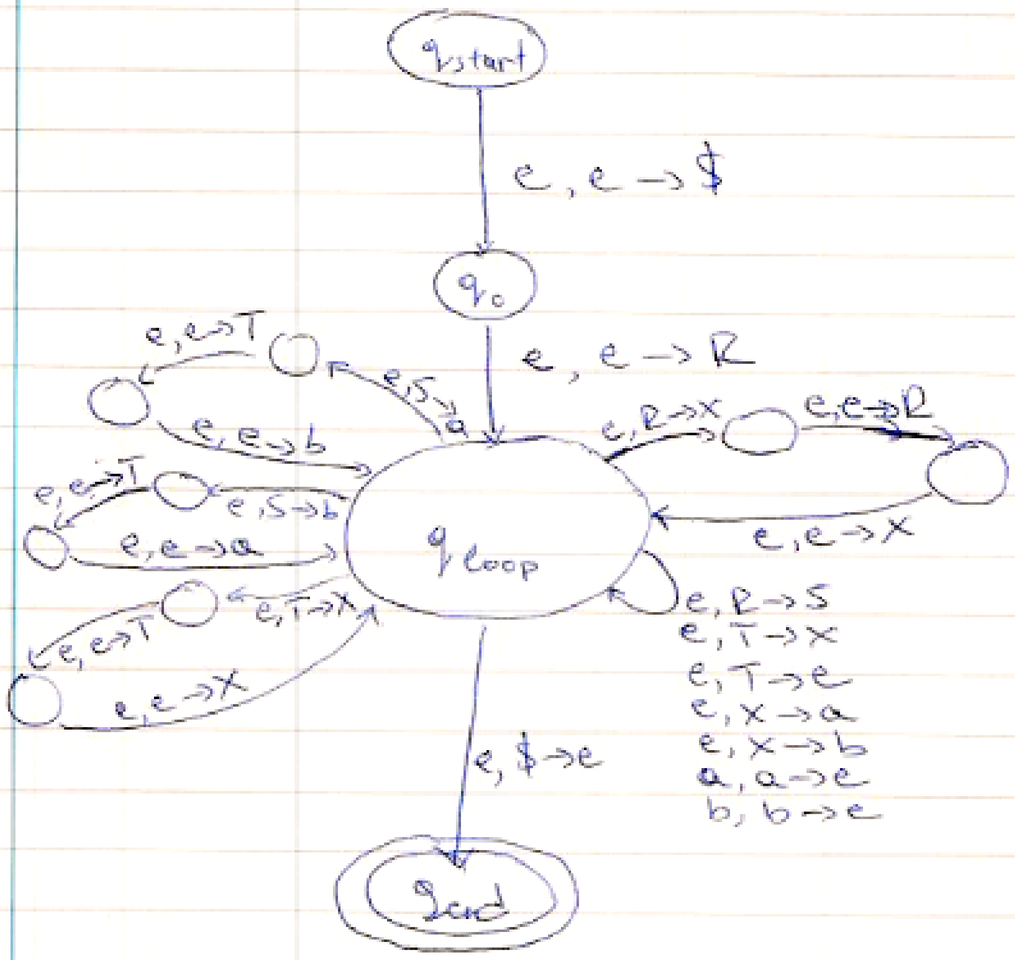


3 a) $R \to XRX \mid S$

$S \to aTb \mid bTa$

$T \to XTX \mid X \mid e$

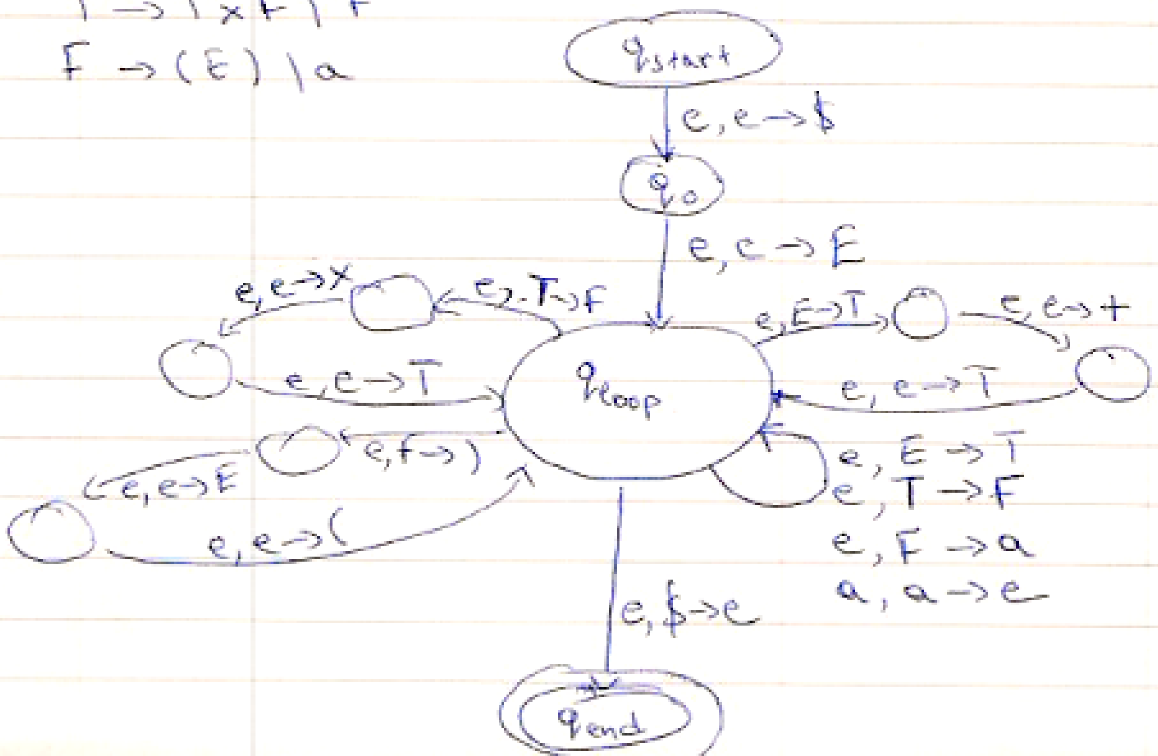
$X \to a \mid b$



b) $E \to E+T \mid T$

$T \to T \times F \mid F$

$F \to (E) \mid a$



4 S → if [C] then {N} else {N} fi
S → if [C] then {N} fi

C → E>E | E<E | E<>E | E==E

N → var=E;

E → E+E | E*E | (E) | a | b

5 $L_1 = \{ w\bar{w} : w \in \{0,1\}^* \}$

Υποθέτουμε ότι L_1 είναι ασυμφραστική γλώσσα. Έστω p είναι το μήκος άντλησης. Σύμφωνα με το λήμμα άντλησης για κάθε $w \in L_1$ με μήκος $|w| \geq p$, η w μπορεί να χωριστεί σε πέντε μέρη $uvxyz$ τέτοια ώστε:

(i) $|vxy| \leq p$
(ii) $|vy| \geq 1$
(iii) $uv^i x y^i z \in L_1$, για κάθε ακέραιο $i \geq 0$

Θέλουμε να βρούμε μια λέξη w που δεν επιδέχεται άντληση. Έστω $w = 0^p 1^p 1^p 0^p$. Για αυτή την λέξη υπάρχει διαχωρισμός που να επιδέχεται άντληση. Αυτός είναι ο ακόλουθος.

$$w = \underbrace{0^{p-1}}_{u}\underbrace{0}_{v}\underbrace{1^m}_{x}\underbrace{1}_{y}\underbrace{1^{p-m-1}1^p0^p}_{z}$$

Παρατηρείστε ότι οποιαδήποτε λέξη της μορφής $0^k 1^z 1^\ell 0^j$ ανήκει στην L_1 εάν $k+j = z+\ell$. Με άλλα λόγια ο $\#_0 = \#_1$. Στον πιο πάνω διαχωρισμό της w αν εφαρμόσουμε άντληση θα πάρουμε μια λέξη της μορφής $w' = uv^i x y^i z = 0^{p-1} 0^i 1^m 1^i 1^{p-m-1} 1^p 0^p$. Άρα για οποιοδήποτε $i \geq 0$ $\#_0(w') = p-1+i+p = 2p+i-1$ και

Ο $\#_1(w') = p-m-1+p+m+i = 2p+i-1$. Έτσι ο $\#_0(w') = \#_1(w')$ και ως εκ τούτου η $w' \in L_1$. Άρα η w μπορεί να επιδεχτεί άντληση.

Ας διαλέξουμε μια διαφορετική λέξη $w_1 = 0^p1^p0^p1^p0^p1^p$. Η $w_1 \in L_1$ και $|w_1| > p$. Μπορούμε να διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για τον χωρισμό της $w_1 = uvxyz$:

Περίπτωση 1: Η λέξη vxy περιέχει μόνο 0 ή μόνο 1. Άρα τα v και y περιέχουν μόνο 0 ή μόνο 1. Αν πάρουμε την λέξη άντλησης $w' = uv^0xy^0z$ τότε παρατηρούμε ότι αφού $|vy| \geq 1$ τότε $\#_0(w') \neq \#_1(w')$. Άρα η $w' \notin L_1$. Αντίφαση.

Περίπτωση 2: Η λέξη vxy περιέχει και 0 και 1. Αφού $|vxy| \leq p$ τότε η $w' = uv^0xy^0z$ θα είναι της μορφής $0^{k_1}1^{k_2}0^{k_3}1^{k_4}0^{k_5}1^{k_6}$ όπου δυο διαδοχικά k_i θα είναι $<p$. και τα υπόλοιπα θα είναι όλα ίσα με p. Για παράδειγμα αν

$$w_1 = \underbrace{0^{p-m}}_{u}\underbrace{0^{m}}_{v}\underbrace{1^{k}}_{x}\underbrace{1^{l}}_{y}\underbrace{1^{p-l-k}0^p1^p0^p1^p}_{z}$$

τότε η $w' = 0^{p-m}1^{p-l}0^p1^p0^p1^p$. Αφού $|vy| \geq 1$ τότε ένα εκ των k_1 και k_2 θα είναι μικρότερο από p ($k_1 = p-m$, $k_2 = p-l$). Μπορούμε να διαχωρίσουμε την w' σε δυο μέρη ως ακολούθως:

α) Το μέσο της w' να είναι:

$$0^{k_1}1^{k_2}0^{k_3} \mid 1^{k_4}0^{k_5}1^{k_6}$$

μέσο.

Σε αυτή την περίπτωση η $w' \in L_1$ αν και μόνο αν $k_1 = k_4$, $k_2 = k_5$ και $k_3 = k_6$. Αφού όμως ξέρουμε ότι τουλάχιστον κάποιο $k_i < p$ τότε αυτό δεν ισχύει και $w' \notin L_1$.

β) Αν το μέσο είναι οπουδήποτε αλλού τότε το ένα μισό της w' θα περιέχει 3 εναλλασσόμενα κομμάτια από 0 και 1 ενώ το άλλο μισό θα περιέχει 4 τέτοια κομμάτια. Άρα η w' δεν θα έχει την κατάλληλη μορφή για να ανήκει στην L_1.

Άρα και σε αυτή την περίπτωση οδηγούμαστε σε Αντίφαση.