

1^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: Δευτέρα 26/09/2011

Άσκηση 1

Αποδείξτε επαγωγικά την γενίκευση του πρώτου νόμου του De Morgan:

$$\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

Λύση

Βάση:

$$n = 2$$

$$\begin{aligned} \overline{A_1 \cup A_2} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \\ \overline{A_1 \cup A_2} &= \{w | w \notin A_1 \cup A_2\} \\ &= \{w | w \notin A_1 \text{ and } w \notin A_2\} \\ &= \{w | w \in \overline{A_1} \text{ and } w \in \overline{A_2}\} \\ &= \{w | w \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\} \end{aligned}$$

Επαγωγική Υπόθεση:

$$n = k$$

$$\overline{A_1 \cup \dots \cup A_k} = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_k}$$

Επαγωγικό Βήμα:

$$n = k + 1$$

$$\begin{aligned} \overline{A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}} &= \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k+1}} \\ \overline{A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}} &= \{w | w \notin A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}\} \\ &= \{w | w \notin A_i, \text{ for } 0 \leq i \leq k + 1\} \\ &= \{w | w \notin A_1 \cup \dots \cup A_k, \text{ and } w \notin A_{k+1}\} \\ &= \{w | w \in \overline{A_1 \cup \dots \cup A_k} \text{ and } w \in \overline{A_{k+1}}\} \\ &= \{w | w \in (\overline{A_1 \cup \dots \cup A_k}) \cap \overline{A_{k+1}}\} \\ &= \{w | w \in \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_k} \cap \overline{A_{k+1}}\} \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται αναδρομικά ως ακολούθως:

$$f_{i+2} = f_i + f_{i+1}, \text{ for } i \geq 0$$

ενώ $f_0=0$ και $f_1=1$. **Αποδείξτε επαγωγικά** ότι:

$$\text{for } 0 \leq i \leq n - 1, f_n = f_{n-i}f_{i+1} + f_{n-i-1}f_i$$

Λύση

Βάση:

$$i = 0$$

$$f_n = f_n f_1 + f_{n-1} f_0 = f_n$$

Επαγωγική Υπόθεση:

$$i = k$$

$$f_n = f_{n-k}f_{k+1} + f_{n-k-1}f_k$$

Επαγωγικό Βήμα:

$$i = k + 1$$

$$f_n = f_{n-(k+1)}f_{(k+1)+1} + f_{n-(k+1)-1}f_{k+1}$$

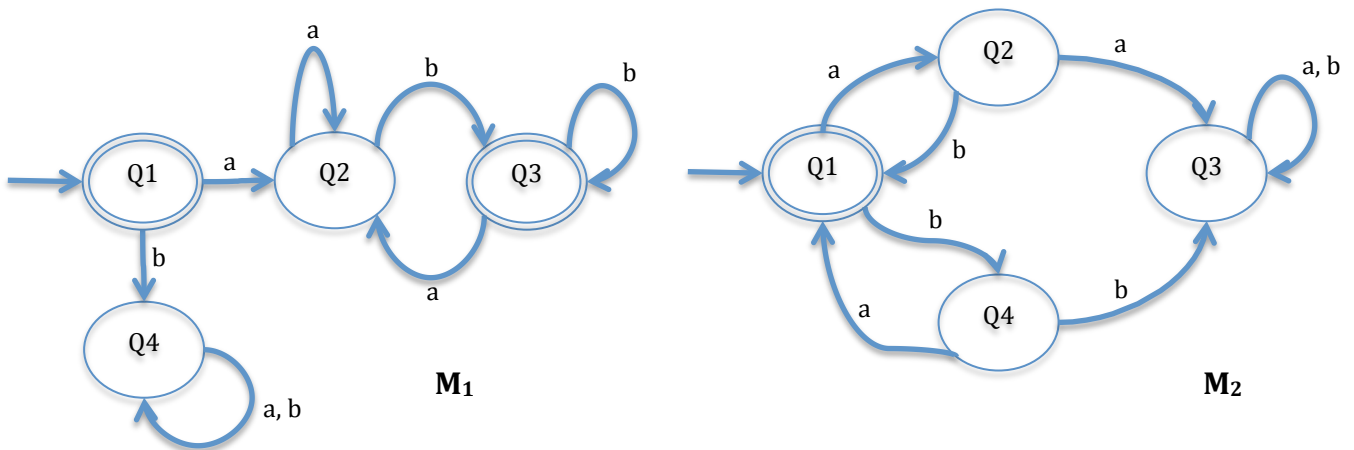
Από τον τύπο του Fibonacci το δεξί μέρος της πιο πάνω πρότασης μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} f_{n-k-1}f_{k+2} + f_{n-k-2}f_{k+1} &= f_{n-k-1}(f_{k+1} + f_k) + (f_{n-k} - f_{n-k-1})f_{k+1} \\ &= f_{n-k-1}f_{k+1} + f_{n-k-1}f_k + f_{n-k}f_{k+1} - f_{n-k-1}f_{k+1} \\ &= f_{n-k-1}f_k + f_{n-k}f_{k+1} \\ &= f_n \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση.

Άσκηση 3

Δώστε τον **τυπικό ορισμό** και μια **περιγραφή της γλώσσας** που αναγνωρίζουν τα πιο κάτω ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα.

**Λύση**

α) $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$Q = \{Q1, Q2, Q3, Q4\}, \Sigma = \{a, b\}, q_0 = Q1, F = \{Q1, Q3\}$

δ :

	a	b
Q1	Q2	Q4
Q2	Q2	Q3
Q3	Q2	Q3
Q4	Q4	Q4

$L(M_1) = \{w \mid w \text{ είναι η κενή λέξη ή αρχίζει με a και τελειώνει με b}\}$

β) $M_2 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$Q = \{Q1, Q2, Q3, Q4\}, \Sigma = \{a, b\}, q_0 = Q1, F = \{Q1\}$

δ :

	a	b
Q1	Q2	Q4
Q2	Q3	Q1
Q3	Q3	Q3
Q4	Q1	Q3

$L(M_2) = \{w \mid w \text{ είναι λέξη με άρτιο αριθμό γραμμάτων και κάθε a ακολουθείται από b και κάθε b ακολουθείται από a}\}$

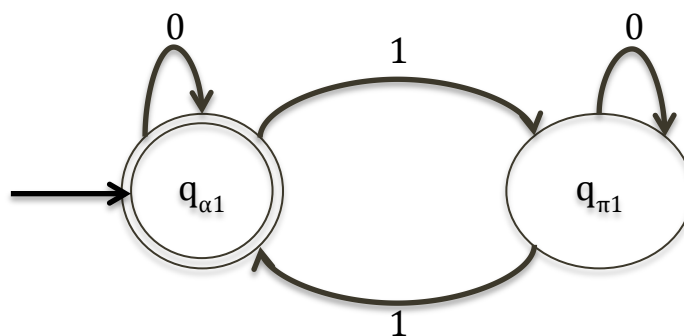
Άσκηση 4

Υποθέστε ότι έχουμε δύο γλώσσες ορισμένες στο αλφάβητο $\Sigma = \{1, 0\}$ τέτοιες ώστε $L_1 = \{x \mid x \text{ έχει άρτιο αριθμό } 1\}$ και $L_2 = \{x \mid x \text{ έχει περιττό αριθμό } 0\}$. Δώστε ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα που να αναγνωρίζουν τις ακόλουθες γλώσσες

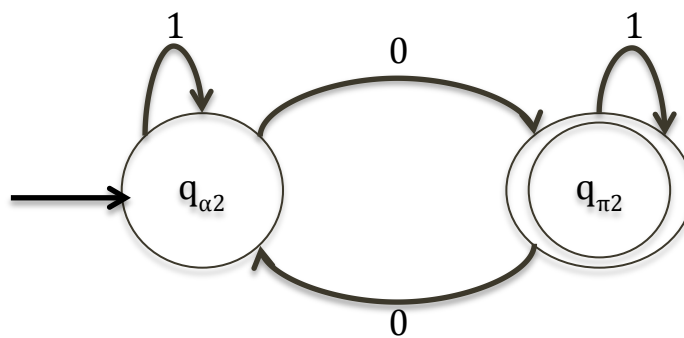
- a. $L(M_1) = L_1$
- b. $L(M_2) = L_2$
- c. $L(M_3) = L_1 \cup L_2$
- d. $L(M_4) = L_1 \cap L_2$

Λύση

a.



b.

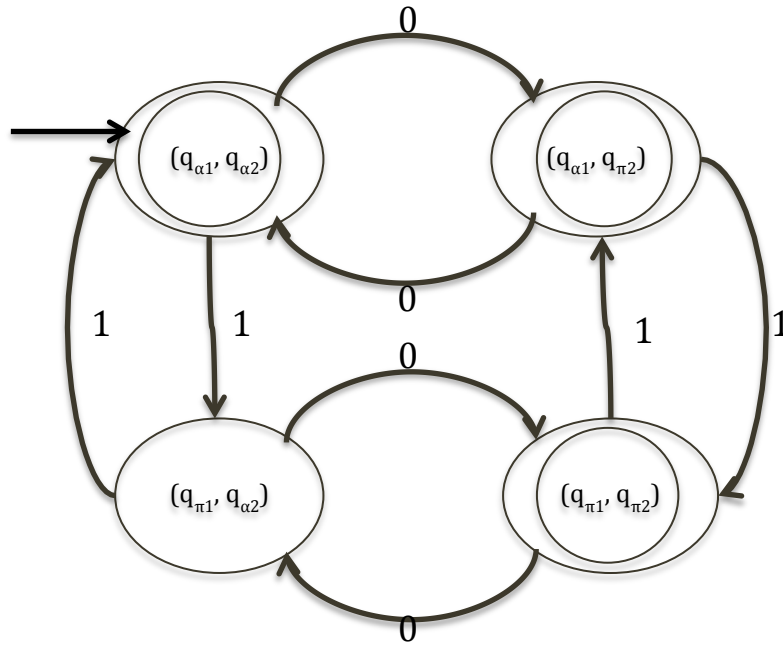


c. $M_3 = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F)$

$Q' = \{(q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2}), (q_{\alpha 1}, q_{\pi 2}), (q_{\pi 1}, q_{\alpha 2}), (q_{\pi 1}, q_{\pi 2})\}$, $q_0 = (q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2})$, $F = \{(q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2}), (q_{\alpha 1}, q_{\pi 2}), (q_{\pi 1}, q_{\pi 2})\}$

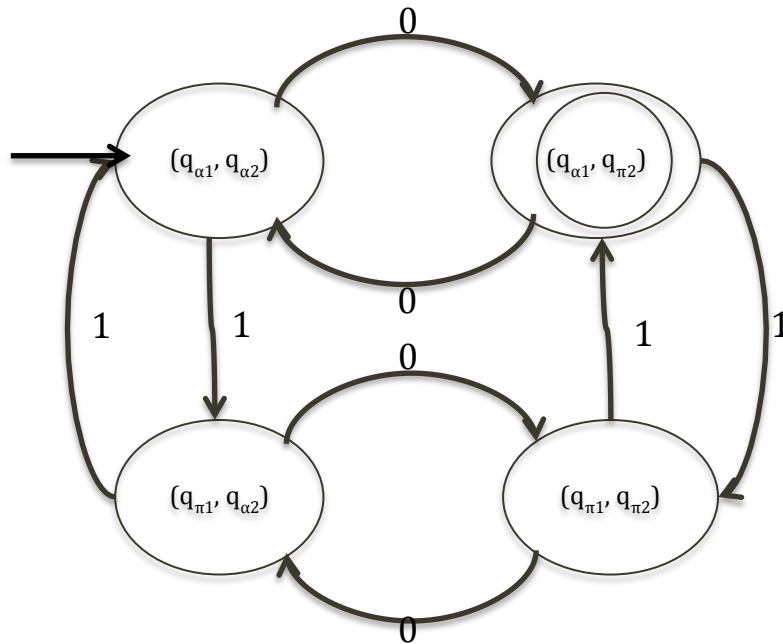
δ' :

	1	0
$(q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2})$	$(q_{\alpha 1}, q_{\pi 2})$	$(q_{\pi 1}, q_{\alpha 2})$
$(q_{\alpha 1}, q_{\pi 2})$	$(q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2})$	$(q_{\pi 1}, q_{\pi 2})$
$(q_{\pi 1}, q_{\alpha 2})$	$(q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2})$	$(q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2})$
$(q_{\pi 1}, q_{\pi 2})$	$(q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2})$	$(q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2})$



d. Το σύνολο καταστάσεων, οι μεταβάσεις και η αρχική κατάσταση του M_4 είναι τα ίδια με του M_3 . Διαφέρει μόνο το σύνολο των τελικών καταστάσεων.

$$F = \{(q_{\alpha 1}, q_{\pi 2})\}$$



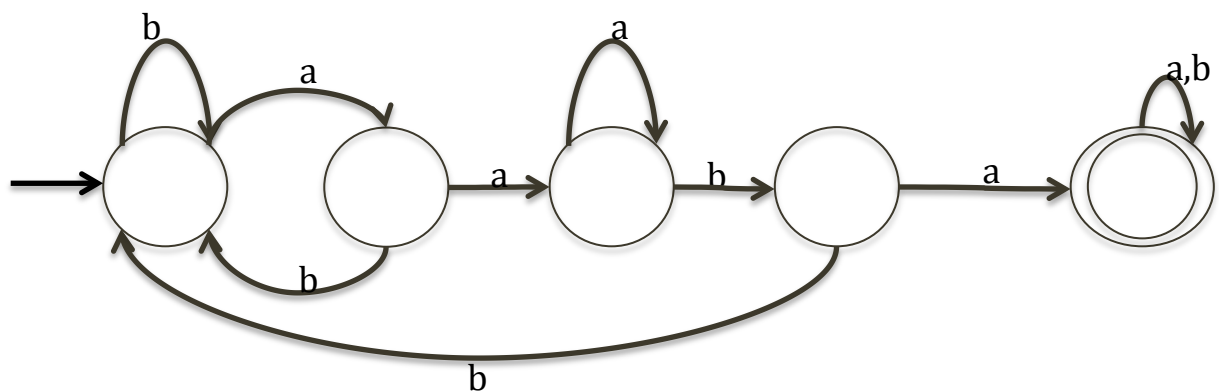
Άσκηση 5

Δώστε ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα που να αναγνωρίζουν τις παρακάτω γλώσσες πάνω στο αλφάβητο $\Sigma = \{a, b\}$.

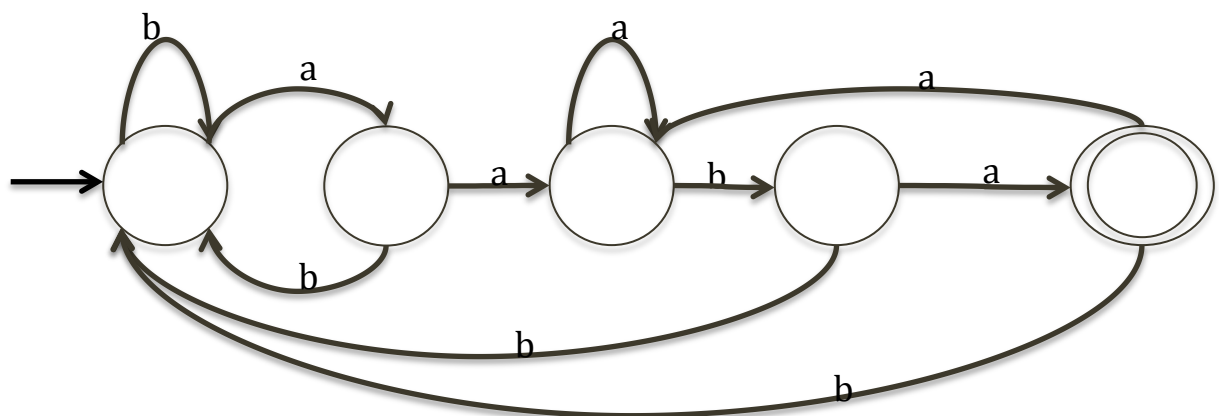
- $L_1 = \{w \mid \eta \ w \text{ περιέχει την λέξη } aaba \text{ σαν υπολέξη}\}$
- $L_2 = \{w \mid \eta \ w \text{ τελειώνει με την υπολέξη } aaba\}$
- $L_3 = \{w \mid \eta \ w \text{ αρχίζει με την υπολέξη } aaba\}$
- $L_4 = \{w \mid \eta \ w \text{ δεν περιέχει την υπολέξη } aab\}$

Λύση

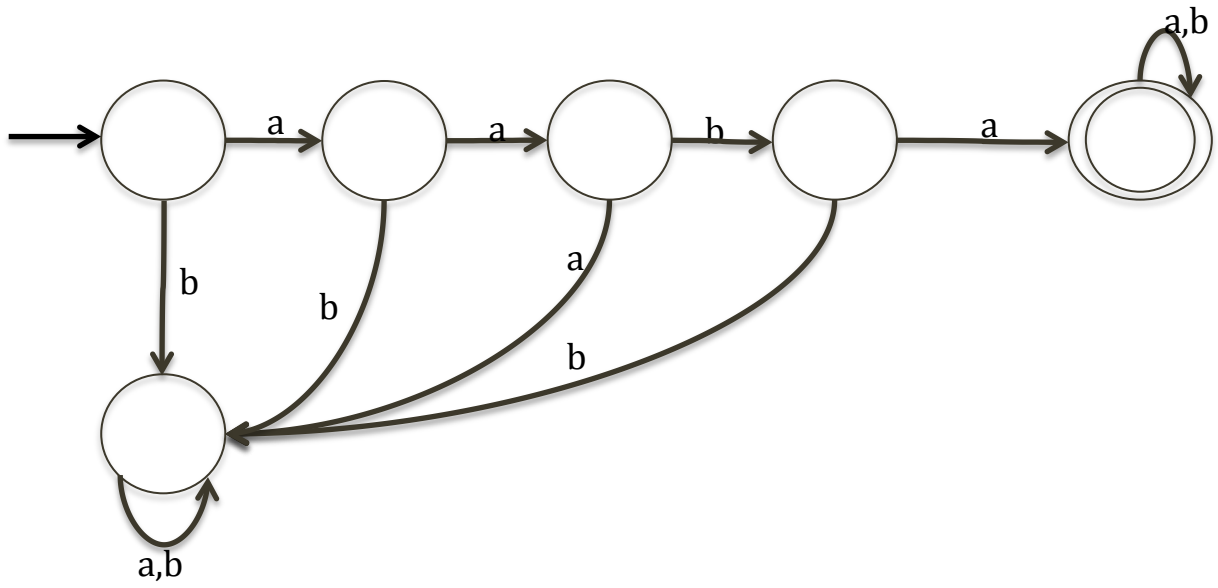
a.



b.



c.



d.

