1η Σειρά Ασκήσεων

1. Για οποιοδήποτε άρτιο ακέραιο $n > 2$, θεωρούμε σύγχρονο δακτύλιο μήκους n. Υπάρχουν δύο δυνατοί *αριθμοί ταυτότητας* (**ΑΤ**) στο δακτύλιο, οι x και y. (Φυσικά, οι επεξεργαστές δεν γνωρίζουν εξ αρχής το γεγονός αυτό.) Πλην της συνιστώσας **ΑΤ** στην οποία δυνατό να διαφέρουν, όλοι οι επεξεργαστές βρίσκονται αρχικά στην ίδια κατάσταση.

   Στο πρόβλημα αυτό, θα θεωρήσουμε διάφορες υποθέσεις (άγνωστες στους επεξεργαστές) αναφορικά με το πλήθος των **ΑΤ** x και y στους επεξεργαστές του δακτυλίου. Για κάθε υπόθεση, θα διερευνήσουμε τη δυνατότητα ύπαρξης ή όχι μη ομοιόμορφου αλγόριθμου εκλογής προέδρου στο δακτύλιο.

   - Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μία από τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις, αποφασίστε ξεχωριστά αν υπάρχει ή όχι <u>μη ομοιόμορφος</u> αλγόριθμος εκλογής προέδρου στο δακτύλιο, κάτω από τη συγκεκριμένη υπόθεση.
     - Αν ΝΑΙ, παρουσιάστε ένα τέτοιο αλγόριθμο και αποδείξτε την ορθότητά του.
     - Αν ΟΧΙ, παρουσιάστε απόδειξη ανυπαρξίας.
   - Αιτιολογείστε πλήρως τη ξεχωριστή απάντηση που θα δώσετε σε κάθε μία από τις τέσσερις περιπτώσεις.

   - <u>*Πρώτη περίπτωση:*</u> Υπάρχει *ακριβώς* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** x. (Επομένως, υπάρχουν *ακριβώς* $n-1$ επεξεργαστές με **ΑΤ** y.)
   - <u>*Δεύτερη περίπτωση:*</u> Υπάρχουν *ακριβώς* δύο επεξεργαστές με **ΑΤ** x. (Επομένως, υπάρχουν *ακριβώς* $n-2$ επεξεργαστές με **ΑΤ** y.)
   - <u>*Τρίτη περίπτωση:*</u> Υπάρχουν *ακριβώς* $n/2$ επεξεργαστές με **ΑΤ** x. (Επομένως, υπάρχουν *ακριβώς* $n/2$ επεξεργαστές με **ΑΤ** y.)
   - <u>*Τέταρτη περίπτωση:*</u> Υπάρχει *τουλάχιστον* ένας επεξεργαστές με **ΑΤ** x, και υπάρχει *τουλάχιστον* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** y.

2. Για οποιοδήποτε ακέραιο $n > 2$ ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 6, θεωρούμε σύγχρονο δακτύλιο μήκους n. Υπάρχουν τρεις δυνατοί *αριθμοί ταυτότητας* (**ΑΤ**) στο δακτύλιο, οι x y και z. (Φυσικά, οι επεξεργαστές δεν γνωρίζουν εξ αρχής το γεγονός αυτό.) Πλην της συνιστώσας **ΑΤ** στην οποία δυνατό να διαφέρουν, όλοι οι επεξεργαστές βρίσκονται αρχικά στην ίδια κατάσταση.

   Στο πρόβλημα αυτό, θα θεωρήσουμε διάφορες υποθέσεις (άγνωστες στους επεξεργαστές) αναφορικά με το πλήθος των **ΑΤ** x και y στους επεξεργαστές του δακτυλίου. Για κάθε υπόθεση, θα διερευνήσουμε τη δυνατότητα ύπαρξης ή όχι μη ομοιόμορφου αλγόριθμου εκλογής προέδρου στο δακτύλιο.

- Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μία από τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις, αποφασίστε ξεχωριστά αν υπάρχει ή όχι μη ομοιόμορφος αλγόριθμος εκλογής προέδρου στο δακτύλιο, κάτω από τη συγκεκριμένη υπόθεση.
  - Αν ΝΑΙ, παρουσιάστε ένα τέτοιο αλγόριθμο και αποδείξτε την ορθότητά του.
  - Αν ΟΧΙ, παρουσιάστε απόδειξη ανυπαρξίας.
- Αιτιολογείστε πλήρως τη ξεχωριστή απάντηση που θα δώσετε σε κάθε μία από τις τέσσερις περιπτώσεις.

- *Πρώτη περίπτωση:* Υπάρχει *ακριβώς* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** x, και υπάρχει *ακριβώς* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** y. (Επομένως, υπάρχουν *ακριβώς* $n-2$ επεξεργαστές με **ΑΤ** z.)
- *Δεύτερη περίπτωση:* Υπάρχουν *ακριβώς* τρεις επεξεργαστές με **ΑΤ** x, και υπάρχουν *ακριβώς* δύο επεξεργαστές με **ΑΤ** y. (Επομένως, υπάρχουν *ακριβώς* $n-5$ επεξεργαστές με **ΑΤ** z.)
- *Τρίτη περίπτωση:* Υπάρχουν *ακριβώς* $n/3$ επεξεργαστές με **ΑΤ** x, και υπάρχουν *ακριβώς* $n/3$ επεξεργαστές με **ΑΤ** y. (Επομένως, υπάρχουν *ακριβώς* $n/3$ επεξεργαστές με **ΑΤ** z.)
- *Τέταρτη περίπτωση:* Υπάρχει *τουλάχιστον* ένας επεξεργαστές με **ΑΤ** x, υπάρχει *τουλάχιστον* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** y, και υπάρχει *τουλάχιστον* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** z.

3. Για οποιοδήποτε ακέραιο $n \geq 13$, ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 4, θεωρούμε σύγχρονο δακτύλιο μήκους n. Υπάρχουν τέσσερις δυνατοί *αριθμοί ταυτότητας* (**ΑΤ**) στο δακτύλιο, οι x, y, z και w. (Φυσικά, οι επεξεργαστές δεν γνωρίζουν εξ αρχής το γεγονός αυτό.) Πλην της συνιστώσας **ΑΤ** στην οποία δυνατό να διαφέρουν, όλοι οι επεξεργαστές βρίσκονται αρχικά στην ίδια κατάσταση.

   Στο πρόβλημα αυτό, θα θεωρήσουμε διάφορες υποθέσεις (άγνωστες στους επεξεργαστές) αναφορικά με το πλήθος των **ΑΤ** x, y, z και w στους επεξεργαστές του δακτυλίου. Για κάθε υπόθεση, θα διερευνήσουμε τη δυνατότητα ύπαρξης ή όχι μη ομοιόμορφου αλγόριθμου εκλογής προέδρου στο δακτύλιο.

   - Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μία από τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις, αποφασίστε ξεχωριστά αν υπάρχει ή όχι μη ομοιόμορφος αλγόριθμος εκλογής προέδρου στο δακτύλιο, κάτω από τη συγκεκριμένη υπόθεση.
     - Αν ΝΑΙ, παρουσιάστε ένα τέτοιο αλγόριθμο και αποδείξτε την ορθότητά του.
     - Αν ΟΧΙ, παρουσιάστε απόδειξη ανυπαρξίας.
   - Αιτιολογείστε πλήρως τη ξεχωριστή απάντηση που θα δώσετε σε κάθε μία από τις τέσσερις περιπτώσεις.

- <u>*Πρώτη περίπτωση:*</u> Υπάρχει *ακριβώς* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** x, υπάρχει *ακριβώς* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** y, και υπάρχει *ακριβώς* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** z. (Επομένως, υπάρχουν *ακριβώς* $n-3$ επεξεργαστές με **ΑΤ** w.)

- <u>*Δεύτερη περίπτωση:*</u> Υπάρχουν *ακριβώς* τέσσερις επεξεργαστές με **ΑΤ** x, υπάρχουν *ακριβώς* τρεις επεξεργαστές με **ΑΤ** y, και υπάρχουν *ακριβώς* δύο επεξεργαστές με **ΑΤ** z. (Επομένως, υπάρχουν *ακριβώς* $n-9$ επεξεργαστές με **ΑΤ** z.)

- <u>*Τρίτη περίπτωση:*</u> Υπάρχουν *ακριβώς* $n/4$ επεξεργαστές με **ΑΤ** x, υπάρχουν *ακριβώς* $n/4$ επεξεργαστές με **ΑΤ** y, και υπάρχουν *ακριβώς* $n/4$ επεξεργαστές με **ΑΤ** z. (Επομένως, υπάρχουν *ακριβώς* $n/4$ επεξεργαστές με **ΑΤ** w.)

- <u>*Τέταρτη περίπτωση:*</u> Υπάρχει *τουλάχιστον* ένας επεξεργαστές με **ΑΤ** x, υπάρχει *τουλάχιστον* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** y, υπάρχει *τουλάχιστον* ένας επεξεργαστές με **ΑΤ** z, και υπάρχει *τουλάχιστον* ένας επεξεργαστής με **ΑΤ** w.

4. Για οποιοδήποτε ακέραιο $n \geq 13$, ο οποίος είναι της μορφής $2 \cdot (2^{\rho} - 1)$ για κάποιο ακέραιο $\rho \geq 2$, θεωρούμε *σύγχρονο* δακτύλιο μήκους n. Υπάρχουν ρ δυνατοί *αριθμοί ταυτότητας* (**ΑΤ**) στο δακτύλιο, οι $x_1, x_2, \ldots, x_{\rho}$. (Φυσικά, οι επεξεργαστές δεν γνωρίζουν εξ αρχής το γεγονός αυτό.) Πλην της συνιστώσας **ΑΤ** στην οποία δυνατό να διαφέρουν, όλοι οι επεξεργαστές βρίσκονται αρχικά στην ίδια κατάσταση. Θεωρούμε ότι κάθε επεξεργαστής γνωρίζει το μήκος n του δακτυλίου.

   Υποθέτουμε ότι για κάθε ακέραιο ℓ, $1 \leq \ell \leq \rho$, υπάρχουν ακριβώς 2^{ℓ} επεξεργαστές με **ΑΤ** x_{ℓ}.

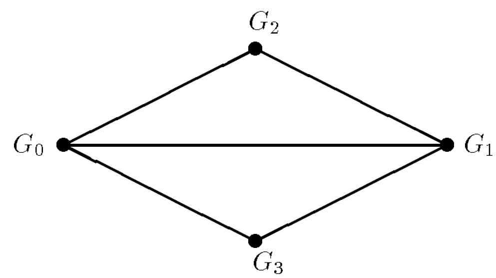
   Αποφασίστε αν υπάρχει ή όχι αλγόριθμος εκλογής προέδρου στο δακτύλιο αυτό, κάτω από τη συγκεκριμένη υπόθεση.

   - Αν ΝΑΙ, παρουσιάστε ένα τέτοιο αλγόριθμο και αποδείξτε την ορθότητά του.
   - Αν ΟΧΙ, παρουσιάστε απόδειξη ανυπαρξίας.

   Αιτιολογείστε πλήρως την απάντησή σας.

5. Θεωρούμε το πρόβλημα των *Βυζαντινών Στρατηγών*, στην περίπτωση όπου τέσσερεις επεξεργαστές, οι G_0, G_1, G_2 και G_3, είναι τοποθετημένοι στις κορυφές του γράφου Γ που φαίνεται στο Σχήμα 1. *Στρατηγός* είναι ο επεξεργαστής G_0, ο οποίος δέχεται μια δυαδική είσοδο. Μεταξύ των τεσσάρων επεξεργαστών, ένας (το πολύ) είναι σφαλματώδης (δηλαδή, *Βυζαντινός*).

   Θεωρούμε τον πιθανοτικό αλγόριθμο $\mathcal{A}$ για το πρόβλημα των Βυζαντινών Στρατηγών που φαίνεται στο Σχήμα 2: Προσδιορίστε την πιθανότητα επιτυχίας του αλγορίθμου $\mathcal{A}$.



Σχήμα 1: Ο γράφος Γ.

Βήμα 1: Ο G_0 στέλλει την είσοδό του στους G_1, G_2 και G_3.
Βήμα 2: Κάθε ένας από τους G_2 και G_3 στέλλει την τιμή που άκουσε από τον G_0 στον G_1.
Βήμα 3: Ο G_2 αποφασίζει 0 με πιθανότητα 1/2 και 1 με πιθανότητα 1/2.
Ο G_3 αποφασίζει την τιμή που έλαβε από τον G_0 στο Βήμα 1.
Οι G_2 και G_3 στέλλουν τις αποφάσεις τους στον G_1.
Βήμα 4: Ο G_1 αποφασίζει την πλειοψηφία των τιμών που έλαβε από τους G_0, G_2 και G_3.

Σχήμα 2: **Ο αλγόριθμος** $\mathcal{A}$