Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier

(CLR, κεφάλαιο 32)

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής θέματα:

Παραστάσεις πολυωνύμων

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier

Πολυώνυμα

- Ένα *πολυώνυμο βαθμού n-1* στη μεταβλητή x είναι μια συνάρτηση p(x) της μορφής

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j, \qquad a_{n-1} \neq 0$$

- Οι παράμετροι $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ονομάζονται *συντελεστές* του πολυωνύμου p(x).

Πράξεις σε πολυώνυμα

- Πρόσθεση

Αν $p(x)=\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ και $q(x)=\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$ τότε

$$r(x)=p(x)+q(x)\equiv\sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j,\quad c_j=a_j+b_j$$

- Πολλαπλασιασμός

Αν $p(x)=\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ και $q(x)=\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$ τότε

$$s(x)=p(x)\cdot q(x)\equiv\sum_{j=0}^{2n-2} d_j x^j, d_j=\sum_{k=0}^{j} a_k\cdot b_{j-k}$$

- Το διάνυσμα $\langle d_0, d_1, \ldots, d_{2n-2}\rangle^T$ λέγεται η *συνέλιξη* των διανυσμάτων $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$ και $\langle b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\rangle$.

- Η κλασσική μέθοδος πολλαπλασιασμού δύο πολυωνύμων πολλαπλασιάζει κάθε όρο του p(x) επί κάθε όρο του q(x) και προσθέτει τα αποτελέσματα.

Πράξεις σε πολυώνυμα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$
\begin{array}{r}
6x^3 + 7x^2 - 10x + 9 \\
-2x^3 + \quad 4x - 5 \times \\
\hline
-30x^3 - 35x^2 + 50x - 45 \\
24x^4 + 28x^3 - 40x^2 + 36x \quad \\
-12x^6 - 14x^5 + 20x^4 - 18x^3 \qquad\qquad\qquad + \\
\hline
-12x^6 - 14x^5 + 44x^4 - 20x^3 - 75x^2 + 86x - 45
\end{array}
$$

- Η κλασσική μέθοδος αποτελεί άμεση υλοποίηση του πολλαπλασιασμού δύο πολυωνύμων.

Πράξεις σε πολυώνυμα

- Πόσο χρόνο παίρνει; (δεδομένου ότι μονάδα μέτρησης χρόνος είναι ο αριθμός στοιχειωδών αριθμητικών πράξεων μεταξύ των συντελεστών των πολυωνύμων.)

  j+1 πολλαπλασιασμοί και j προσθέσεις = 2j+1 πράξεις για κάθε συντελεστή του γινομένου πολυωνύμου, δηλαδή, συνολικά

$$\sum_{j=0}^{2n-2}(2j+1) = \sum_{j=0}^{2n-2}2j + \sum_{j=0}^{2n-2}1$$

$$= 2 \cdot \frac{(2n-2)(2n-1)}{2} + 2n - 1$$

$$\in \Theta(n^2)$$

- Θα δούμε πως να κάνουμε πολλαπλασιασμό με $O(n^2)$ πράξεις με χρήση FFT (Fast Fourier Transform, η Ταχύ Μετασχηματισμό Fourier).

Παραστάσεις Πολυωνύμων

- Παράσταση με συντελεστές

  Ένα πολυώνυμο παριστάνεται ως το διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \;\rightarrow\; \vec{p} = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle^T$$

1. Πρόσθεση πολυωνύμων γίνεται σε χρόνος Θ(n)
2. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων γίνεται σε χρόνο $\Theta(n^2)$
3. Υπολογισμός της τιμής ενός πολυωνύμου p(x) σε κάποιο σημείο c γίνεται σε n-1 προσθέσεις και n-1 πολλαπλασιασμούς χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Horner.

$$p(c) = a_0 + c(a_1 + c(a_2 + \ldots + c(a_{n-2} + c(a_{n-1}))\ldots))$$

Παραστάσεις Πολυωνύμων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$p(x) = 7x^3 - 10x^2 + 35x + 9$

$p(c) = 9 + c(35 + c(-10 + 7c))$

- Τι κερδίζουμε με τον κανόνα του Horner;

  Ο αριθμός των πολλαπλασιασμών πέφτει περίπου στο μισό από τον αριθμό των πολλαπλασιασμών που εξασφαλίζει η προφανής μέθοδος υπολογισμού του p(c):

```
x=1;
p=a[0];
for (j=1; j<n ; j++)
    x = x·c;
    c[j]=a[j]·x;
    p = p+c[j];
```

Παραστάσεις πολυωνύμων

- Παράσταση με τιμές σε σημεία

  Το πολυώνυμο p(x) παριστάνεται με ένα σύνολο από *n ζεύγη σημείων-τιμών*

  $$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$$

  τέτοια ώστε όλα τα x_i είναι διάφορα μεταξύ τους και

  $$y_k = p(x_k),\ 0 \le k \le n-1$$

- Ένα πολυώνυμο μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές παραστάσεις με τιμές σε σημεία (αλλά μόνο μια παράσταση με συντελεστές).

Παραστάσεις πολυωνύμων

- Με παράσταση πολυωνύμων με τιμές σε σημεία μπορούμε να πετύχουμε:

1. Πρόσθεση 2 πολυωνύμων σε χρόνο Θ(n)

$$
\begin{array}{r}
\{(x_0,y_0), \quad (x_1,y_1), \quad \ldots, \quad (x_{n-1},y_{n-1})\} \\
\{(x_0,y_0'), \quad (x_1,y_1'), \quad \ldots, \quad (x_{n-1},y_{n-1}')\} \quad + \\
\hline
\{(x_0,y_0+y_0'),(x_1,y_1+y_1'),\ldots,(x_{n-1},y_{n-1}+y_{n-1}')\}
\end{array}
$$

2. Πολλαπλασιασμό 2 πολυωνύμων σε χρόνο Θ(n).
3. Υπολογισμό της τιμής ενός πολυωνύμου σε ένα καινούριο σημείο σε χρόνο $\Theta(n^2)$ με μετατροπή σε παράσταση συντελεστών και χρήση κανόνα του Horner.

Μετατρέποντας ανάμεσα στις δύο παραστάσεις

- Υπολογισμός παράστασης με τιμές σε σημεία από παράσταση με συντελεστές

  Διάλεξε n διαφορετικά σημεία και υπολόγισε τις τιμές του πολυωνύμου σε αυτά με τον κανόνα του Horner. Κόστος:$\Theta(n^2)$

- Υπολογισμός παράστασης με συντελεστές από παράσταση με τιμές σε σημεία (Πολυωνυμική Παρεμβολή)

  ΘΕΩΡΗΜΑ

  Για οποιοδήποτε σύνολο από n ξεχωριστά ζεύγη σημείων-τιμών

  $$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$$

  υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n-1, p(x), τέτοιο ώστε

  $$y_k = p(x_k), \qquad 0 \le k \le n-1$$

Μετατρέποντας ανάμεσα στις δύο παραστάσεις

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού $y_k = p(x_k), \qquad 0 \le k \le n-1$ έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας

$$V(x_0, x_1, \dots x_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

λέγεται πίνακας Vandermonde.

Μετατρέποντας ανάμεσα στις δύο παραστάσεις

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$D = |V(x_0, x_1, \ldots x_{n-1})| = \prod_{j<k} (x_k - x_j)$$

Αφού όλα τα ζεύγη είναι διαφορετικά, D≠0, συνεπώς ο V είναι αντιστρέψιμος και υπάρχει μοναδική λύση

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = V^{-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Αλγόριθμοι πολυωνυμικής παρεμβολής

Αλγόριθμος 1

Προσδιόρισε τα $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ λύνοντας το σύστημα στο προηγούμενο θεώρημα (με αλγόριθμους επίλυσης γραμμικών συστημάτων, κεφάλαιο 31).

Χρόνος εκτέλεσης: $\Theta(n^3)$

Αλγόριθμος 2

Χρησιμοποιεί τον τύπο Lagrange:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} \cdot y_k$$

Αλγόριθμοι πολυωνυμικής παρεμβολής

ΛΗΜΜΑ

$$y_l = p(x_l), \qquad 0 \le l \le n-1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$p(x_l) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j \neq k} (x_l - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} \cdot y_k$$

Υπολογίζουμε τους όρους του αθροίσματος χωρίζοντάς τους σε δύο κατηγορίες:

<u>Αν l≠k</u>

$$\frac{\prod_{j \neq k} (x_l - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} \cdot y_k = \frac{0}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} \cdot y_k = 0$$

αφού ο παράγοντας $(x_l - x_l)$ δημιουργείται στον αριθμητή όταν ο δείκτης j πάρει την τιμή l.

Αλγόριθμοι πολυωνυμικής παρεμβολής

Αν l=k

$$\frac{\prod_{j\neq k}(x_l - x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k - x_j)} \cdot y_k = \frac{\prod_{j\neq k}(x_k - x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k - x_j)} \cdot y_k = y_k = y_l$$

Έτσι

$$p(x_l) = \sum_{k\neq l} 0 + y_l = y_l$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο τύπος Lagrange μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πολυωνυμική παρεμβολή σε χρόνο $\Theta(n^2)$.

Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier

- Ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier μας επιτρέπει

  1. στην παράσταση με συντελεστές, πολλαπλασιασμό πολυωνύμων σε χρόνο Θ(n lg n)
  2. στην παράσταση με τιμές σε σημεία, πολυωνυμική παρεμβολή σε χρόνο Θ(n lg n)

Μιγαδικές ρίζες της μονάδας

- Μια *μιγαδική n-ιοστή ρίζα* της μονάδας είναι ένας μιγαδικός αριθμός w τέτοιος ώστε $$w^n = 1$$

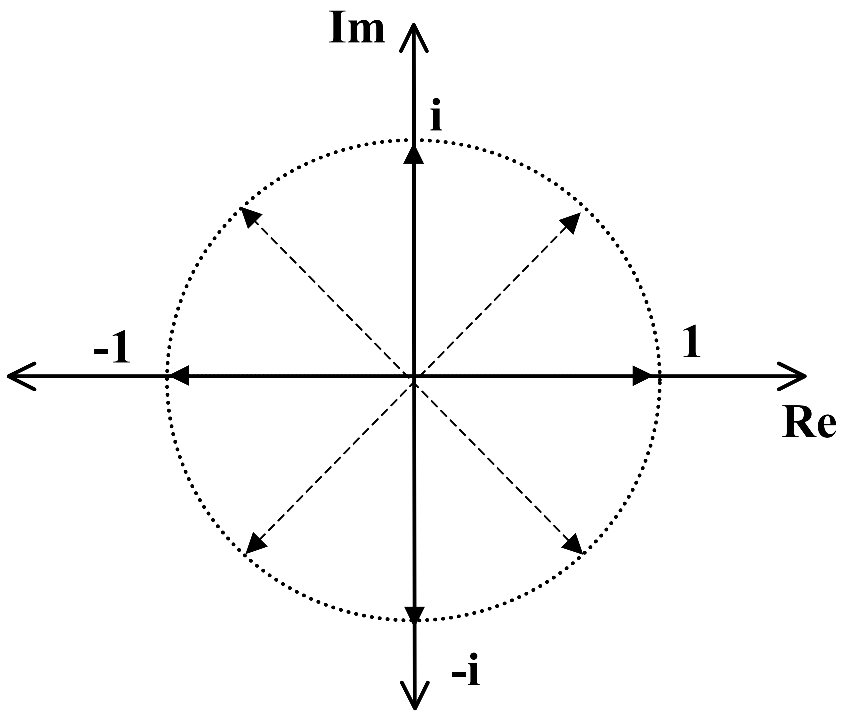
- Υπάρχουν ακριβώς n μιγαδικές n-ιοστές ρίζες της μονάδας:
$$e^{\frac{2\pi ik}{n}} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad 0 \le k \le n-1$$

- Επαλήθευση:
$$\left(e^{\frac{2\pi ik}{n}}\right)^n = e^{2\pi ik} = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k = 1$$

- Συμβολισμός: Γράφουμε
$$w_n = e^{2\pi i/n}$$

Μιγαδικές ρίζες της μονάδας

- Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών ριζών της μονάδας στο μιγαδικό επίπεδο:



Ιδιότητες των μιγαδικών ριζών της μονάδας

1. Για οποιουσδήποτε ακέραιους n≥0, k≥0, d>0, $w_n^k = w_{dn}^{dk}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$w_{dn}^{dk} = e^{\frac{2\pi i dk}{dn}} = e^{\frac{2\pi i k}{n}} = w_n^k$$

2. Για οποιοδήποτε άρτιο ακέραιο n>0, $w_n^{n/2} = w_2 = -1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$w_n^{n/2} = e^{\frac{2\pi i n}{n \cdot 2}} = e^{\pi i} = w_2 = -1$$

Ιδιότητες των μιγαδικών ριζών της μονάδας

3. *Ιδιότητα μοιράσματος*

   Για οποιοδήποτε άρτιο ακέραιο n>0, τα τετράγωνα των n μιγαδικών n-ιοστών ριζών της μονάδας είναι οι n/2 μιγαδικές (n/2)-ιοστές ρίζες της μονάδας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ιδιότητα 1 $(w_n^k)^2 = w_{n/2}^k$ για οποιοδήποτε μη αρνητικό ακέραιο k.

Επίσης

$$
\begin{aligned}
(w_n^{k+n/2})^2 &= w_n^{2k+n} \\
&= w_n^{2k} \cdot w_n^n \\
&= w_n^{2k} \cdot 1 \\
&= (w_n^k)^2
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, οι μιγαδικές n-ιοστές ρίζες w_n^k και $w_n^{k+n/2}$ έχουν το ίδιο τετράγωνο που είναι η μιγαδική n-ιοστή ρίζα της μονάδας $w_{n/2}^k$.

Αφού όλες οι (n/2)-ιοστές ρίζες της μονάδας είναι διάφορες μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι η ιδιότητα ισχύει. ■

Ιδιότητες των μιγαδικών ριζών της μονάδας

4. Για οποιοδήποτε ακέραιο n≥1, k≥1 και μή-διαιρετό από το n,

$$\sum_{j=0}^{n-1}(w_n^k)^j = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\sum_{j=0}^{n-1}(w_n^k)^j = \frac{(w_n^k)^n - 1}{w_n^k - 1}$$

$$= \frac{(w_n^n)^k - 1}{w_n^k - 1}$$

$$= \frac{(1)^k - 1}{w_n^k - 1} = \frac{0}{w_n^k - 1}$$

Αφού το k δεν διαιρεί το n, ο παρονομαστής ισούται με

$\cos(2\pi k/n) + i\cdot\cos(2\pi k/n) - 1 \neq 0$

και η ιδιότητα έπεται.

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Έστω πολυώνυμο p(x)

  $$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1}$$

  το οποίο μας δίδεται ως το διάνυσμα των συντελεστών του

  $$a = \langle a_0, a_1, \ldots a_{n-1} \rangle \qquad .$$

- Έστω $y = \langle y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \rangle^T$

  όπου

  $$y_k = p(w_n^k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot (w_n^k)^j$$

- Το διάνυσμα y είναι ο *διακριτός μετασχηματισμός Fourier* του διανύσματος p.

- Συμβολικά: $y = DFT(a)$.

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το διακριτό μετασχηματισμό του πολυωνύμου p, DFT(a);

- Υποθέτοντας ότι το n είναι άρτιος, θέτουμε

$$q(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \ldots + a_{n-2} x^{\frac{n}{2}-1}$$

$$r(x) = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{\frac{n}{2}-1}$$

- Το πολυώνυμο q περιέχει όλους τους συντελεστές του p(x) με άρτιους δείκτες, ενώ το πολυώνυμο r όλους τους συντελεστές με περιττούς δείκτες.

- Ισχύει ότι

$$p(x) = q(x^2) + x \cdot r(x^2)$$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Η πιο πάνω σχέση υπαγορεύει τον πιο κάτω αλγόριθμο για τον υπολογισμό της τιμής του πολυωνύμου p(x) στις n-ιοστές ρίζες της μονάδας:

1. Υπολόγισε την τιμή των πολυωνύμων q(x) και r(x) στα σημεία

$$(w_n^0)^2, (w_n^1)^2, \dots, (w_n^{n-1})^2$$

2. συνδύασε τα αποτελέσματα σύμφωνα με την εξίσωση

$$p(x) = q(x^2) + x \cdot r(x^2)$$

3. Από την ιδιότητα του μοιράσματος, τα σημεία

$$(w_n^0)^2, (w_n^1)^2, \dots, (w_n^{n-1})^2$$

είναι ακριβώς τα σημεία

$$w_{n/2}^0, w_{n/2}^1, \dots, w_{n/2}^{n/2-1}$$

- Έτσι υπολογισμός του $DFT_n(p)$ ανάγεται στους υπολογισμούς των $DFT_{n/2}(r)$ και $DFT_{n/2}(q)$.

Ο Αλγόριθμος

```
DFT_n(a){
  if n=1  return a
  else
     w=1;
     q=⟨a_0,a_2, . . . ,a_{n−2}⟩;
     r=⟨a_1,a_3, . . . ,a_{n−1}⟩;
     y_0 =DFT_{n/2}(q);
     y_1 =DFT_{n/2}(r);
     for(k=0;k≤n/2 -1;k++)
        y[k]=y_0[k]+w·y_1[k];
        y[k+n/2]=y_0[k]−w·y_1[k];
        w=w·e^{2πi/n}
     return y=⟨y[0],y[1],...,y[n-1]⟩
}
```

Αυτή η αναδρομικότητα οδηγεί στον εξής διαίρει και βασίλευε αλγόριθμο για υπολογισμό DFT ο οποίος είναι γνωστός ως ταχύς μετασχηματισμός Fourier.

Απόδειξη ορθότητας

Με τη μέθοδο της επαγωγής:

- Η βάση της αναδρομής είναι προφανώς ορθή.
- Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι για $0 \leq k \leq n/2 - 1$

$$y_0[k] = q(w_{n/2}^k),$$
$$y_1[k] = r(w_{n/2}^k)$$

- Άρα για $0 \leq k \leq n/2 - 1$

$$\begin{aligned} y[k] &= y_0[k] + w_n^k \cdot y_1[k] \\ &= q(w_{n/2}^k) + w_n^k \cdot r(w_{n/2}^k) \\ &= q(w_n^{2k}) + w_n^k \cdot r(w_n^{2k}) \\ &= p(w_n^k) \end{aligned}$$

Απόδειξη ορθότητας

- ενώ οι τιμές y[n/2 + k], $0 \le k \le n/2 - 1$ δίνονται ως:

$$
\begin{aligned}
y[k+n/2] &= y_0[k] - w_n^k \cdot y_1[k] \\
&= q(w_{n/2}^k) - w_n^k \cdot r(w_{n/2}^k) \\
&= \{w_n^k = -w_n^{k+n/2}\} \\
& \quad q(w_n^{2k}) + w_n^{k+n/2} \cdot r(w_n^{2k}) \\
&= q(w_n^{2k+n}) + w_n^{k+n/2} \cdot r(w_n^{2k+n}) \\
&= q(w_n^{2(k+n/2)}) + w_n^{k+n/2} \cdot r(w_n^{2(k+n/2)}) \\
&= p(w_n^{k+n/2})
\end{aligned}
$$

όπως χρειάζεται.

Χρόνος Εκτέλεσης

- Έστω T(n) ο χρόνος εκτέλεσης της DFT. Αφού ο χρόνος εκτέλεσης για την εκτέλεση των πράξεων μέσα στο βρόχο είναι γραμμικός (O(4n)), έχουμε:

  $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + kn.$

- Από το θεώρημα γενικής χρήσης παίρνουμε ότι: $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.

- **Άσκηση:** Να υπολογίσετε το DFT(<1,2,3,4>)

Πολυωνυμική παρεμβολή στις μιγαδικές ρίζες της μονάδας

- Σε μορφή γινομένου πινάκων, ο ορισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, μπορεί να δοθεί ως εξής:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & w_n^0 & (w_n^0)^2 & \ldots & (w_n^0)^{n-1} \\ 1 & w_n^1 & (w_n^1)^2 & \ldots & (w_n^1)^{n-1} \\ & & & & \\ 1 & w_n^{n-1} & (w_n^{n-1})^2 & \ldots & (w_n^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Πίνακας Vandermonde με σημεία τις n-ιοστές μιγαδικές ρίζες του 1.

- Στη θέση (k,j) του πίνακα έχουμε την τιμή

$$V[k,j] = (w_n^k)^j = w_n^{kj}$$

Πολυωνυμική παρεμβολή στις μιγαδικές ρίζες της μονάδας

- Έτσι $$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = V_n^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

<u>*Λήμμα 1*</u>

$$V_n^{-1}[k,j] = \frac{1}{n} \cdot w_n^{-kj}$$

<u>*Απόδειξη*</u>

Δείχνουμε ότι για V_n^{-1} όπως ορίζεται στην εκφώνηση του λήμματος ισχυεί ότι

$$V_n \cdot V_n^{-1} = I_{n\times n}$$

Πολυωνυμική παρεμβολή στις μιγαδικές ρίζες της μονάδας

Έχουμε
$$(V_n \cdot V_n^{-1})[j,j'] = \sum_{k=0}^{n-1} V_n[j,k] \cdot V_n^{-1}[k,j']$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kj} \cdot \frac{1}{n} \cdot w_n^{-kj'}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{k(j-j')} \cdot \frac{1}{n}$$

Αν j=j΄, τότε
$$(V_n \cdot V_n^{-1})[j,j'] = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Διαφορετικά, από την ιδιότητα 4 των μιγαδικών ριζών της μονάδας έχουμε:
$$(V_n \cdot V_n^{-1})[j,j'] = \sum_{k=0}^{n-1} (w_n^{j-j'})^k \cdot \frac{1}{n} = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες της ιδιότητας εξασφαλίζονται αφού

$-(n-1) \le j' - j \le n-1$

έτσι ώστε ο ακέραιος j'-j δεν είναι διαιρετός από το n.

Αντίστροφος DFT

- Από το λήμμα συμπεραίνουμε ότι

$$a_j = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot w_n^{-kj}$$

- Παρατηρούμε ότι

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot w_n^{kj}$$

$$a_j = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot w_n^{-kj}$$

- Βλέπουμε ότι υπάρχει ένας δυισμός μεταξύ των διανυσμάτων p και y, ως προς το διακριτό μετασχηματισμό Fourier και τον αντίστροφό του.

Αντίστροφος DFT

- Αυτός ο δυισμός συνεπάγεται ότι και ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier μπορεί να υπολογισθεί σε χρόνο Θ(n lg n):
  - με παραλλαγή του ταχέως μετασχηματισμού Fourier, όπου αντικαθιστούμε το w με το w^{-1} και διαιρούμε κατάλληλα με το n, όπου χρειάζεται.
- Γράφοντας $DFT^{-1}(y)$ για τη διαδικασία πολυωνυμικής παρεμβολής στις μιγαδικές ρίζες της μονάδας, παίρνουμε την εξής διαδικασία για πολλαπλασιασμό δύο πολυωνύμων με παράσταση με συντελεστές:

```
multiply(p,q){
    a=DFT(p);
    b=DFT(q);
    c=a·b;
    return DFT^{-1}(c);
}
```

- Χρονική Πολυπλοκότητα: