

Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

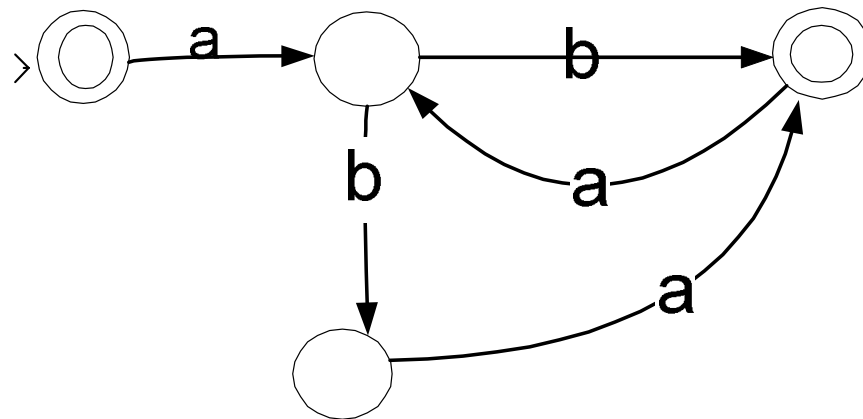
3^ο Φροντιστήριο:
Ντετερμινιστικά και
Μη Ντετερμινιστικά
Πεπερασμένα Αυτόματα

29 Φεβρουαρίου 2008

Δρ. Παπαδοπούλου Βίκη

1. Κατασκευή κανονικής έκφρασης από ΜΝΠΑ

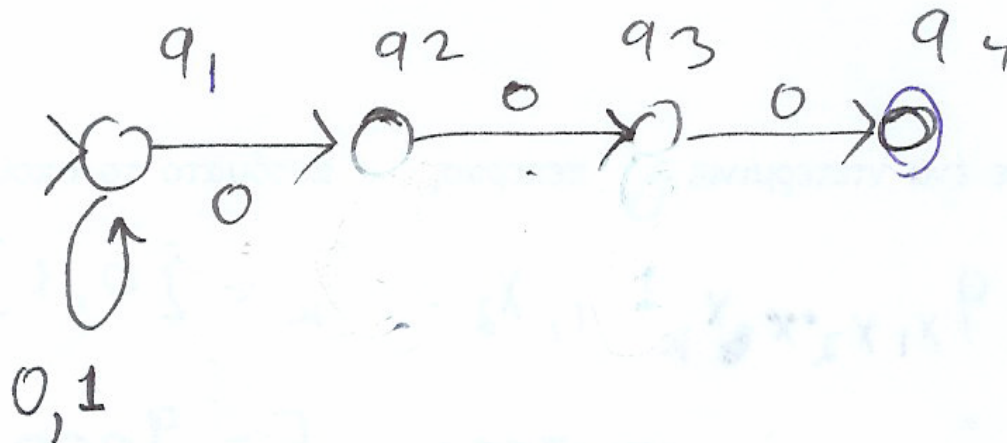
Γράψτε κανονική έκφραση για το παρακάτω αυτόματο:



$$((ab) \cup (aba))^*$$

2. Κατασκευή ε-MNΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας

1. (15 μονάδες) Έστω $\Sigma = \{0, 1\}$ και L η γλώσσα η οποία περιέχει όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ οι οποίες να τελειώνουν με 3 συνεχόμενα 0.
- (a) Κατασκευάστε ένα (ε)-μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο με 4 καταστάσεις το οποίο να αποδέχεται την γλώσσα L .



2. Κατασκευή ε-MNΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας 2. Κατασκευή ε-MNΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας (συνέχεια)

(15 μονάδες) Έστω $\Sigma = \{0, 1\}$ και L η γλώσσα η οποία περιέχει όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ οι οποίες να τελειώνουν με 3 συνεχόμενα 0.

(b) Κατασκευάστε ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται την

$$Q = \{ q_{x_1 x_2 x_3} : x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \} = \{ q_{000}, q_{001}, q_{010}, \dots, q_{111} \}$$

- q_{111} = αρχική κατάσταση

- Για κάθε κατάσταση $q_{x_1 x_2 x_3} \in Q$, $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$

$$\text{ορίσω} : \delta(q_{x_1 x_2 x_3}, 0) = q_{x_2 x_3 0}$$

$$\delta(q_{x_1 x_2 x_3}, 1) = q_{x_2 x_3 1}$$

$$F = \{ q_{000} \}$$

2. Κατασκευή ε -ΜΝΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας (συνέχεια)

(15 μονάδες) Έστω $\Sigma = \{0, 1\}$ κα L η γλώσσα η οποία περιέχει όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ οι οποίες να τελειώνουν με 3 συνεχόμενα 0.

Σημειώστε ότι το αυτόματο δεν κάνει δεκτή οποιαδήποτε λέξη με λιγότερα από 3 σύμβολα.

Αρχική κατάσταση 111 (όπου δεν έχει δει και κανένα σύμβολο και κανένα 0)

2. Κατασκευή ε-MNΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας 2. Κατασκευή ε-MNΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας (συνέχεια)

(15 μονάδες) Έστω $\Sigma = \{0, 1\}$ και L η γλώσσα η οποία περιέχει όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ οι οποίες να τελειώνουν με 3 συνεχόμενα 0.

Κατάσταση $q_{x_1x_2x_3}$ = τα τρία τελευταία σύμβολα που έχω δει είναι τα $x_1x_2x_3$

Διαδικασία 1:

Όταν η λέξη δεν έχει τελειώσει (έχει και άλλα σύμβολα), διαδίδουμε το επόμενο σύμβολο της, b , ($b \in \Sigma$), και μετακινούμαστε στην κατάσταση $q_{x_2x_3b}$, η οποία δηλώνει ότι τα τελευταία 3 σύμβολα που έχουμε δει έως τώρα ήταν η λέξη x_2x_3b .

2. Κατασκευή ε-MNΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας 2. Κατασκευή ε-MNΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας (συνέχεια)

(15 μονάδες) Έστω $\Sigma = \{0, 1\}$ και L η γλώσσα η οποία περιέχει όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ οι οποίες να τελειώνουν με 3 συνεχόμενα 0.

εχουμε

Αν η λέξη έχει τελειώσει, ελέγχουμε αν $x_2 x_3 b \in F$

(δηλ τα 30 ^{τελευταία} συμβολισμοί από το τέλος είναι 0) οπότε η λέξη

είναι δεκτή. Αν δεν έχει τελειώσει ~~επαναλαμβάνουμε~~

~~και διαπιστώνουμε αν τελειώνει στα 0~~

~~αν όχι~~ επαναλαμβάνουμε την διαδικασία ~~ανά~~

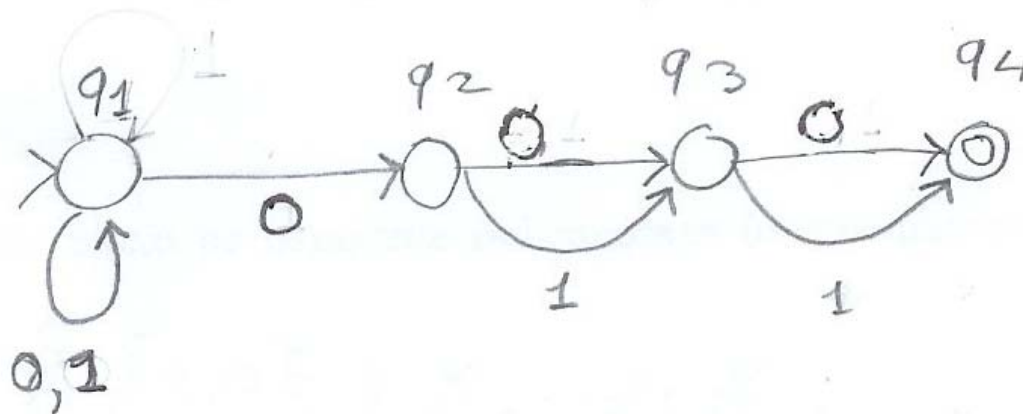
διαδοχικά το επόμενο συμβολισμο της λέξης έως ότου

να τελειώσει η λέξη.

3. Κατασκευή ε-MNΠA από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας

(15 μονάδες) Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$ και L η γλώσσα η οποία περιέχει όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ οι οποίες περιέχουν το σύμβολο 0 στην θέση 3 (ξεκινώντας από δεξιά) της λέξης w .

- (a) Κατασκευάστε ένα (ε)-μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο με 4 καταστάσεις το οποίο να αποδέχεται την γλώσσα L .



3. Κατασκευή ε-MNΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας (συνέχεια)

(b) Κατασκευάστε ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται την γλώσσα L .

$$- Q = \{q_{x_1 x_2 x_3} : x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}\} = \{q_{000}, q_{001}, q_{010}, \dots, q_{111}\}$$

- q_{111} : αρχική κατάσταση

- Για κάθε κατάσταση $q_{x_1 x_2 x_3}$, $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$ ορίσουμε μεταδιδάσει:

$$\rightarrow \delta(q_{x_1 x_2 x_3}, 0) = q_{x_2 x_3 0}$$

$$\rightarrow \delta(q_{x_1 x_2 x_3}, 1) = q_{x_2 x_3 1}$$

$$- F = \{q_{x_1 x_2 x_3} \in Q : x_1 = 0\}$$

3. Κατασκευή ε-MNΠA από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας (συνέχεια)

(15 μονάδες) Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$ και L η γλώσσα η οποία περιέχει όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ οι οποίες περιέχουν το σύμβολο 0 στην θέση 3 (ξεκινώντας από δεξιά) της λέξης w .

Σημειώστε ότι το αυτόματο δεν κάνει δεικτή οποιαδήποτε λέξη με λιγότερα από 3 σύμβολα.

Αρχική κατάσταση 111 (όπου δεν έχει δει κανένα και κανένα σύμβολο και κανένα 0)

3. Κατασκευή ε-MNΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας (συνέχεια)

Εξήγηση: Έχουμε μια κατάσταση $q_{x_1x_2x_3}$ η οποία αντιστοιχεί σε κάθε πιθανή λέξη 3 συμβόλων. Όταν διαδίδουμε μια λέξη 3 συμβόλων, προσιδιάμε στην αντίστοιχη κατάσταση, δηλ την κατάσταση $q_{x_1x_2x_3}$.

Διαδικασία 1:

Όταν η λέξη δεν έχει τελειώσει (έχει και άλλα σύμβολα), διαδίδουμε το επόμενο σύμβολο της, b , ($b \in \{0, 1\}$) και μετασυνιάμε στην κατάσταση $q_{x_2x_3b}$, η οποία δηλώνει ότι τα τελευταία 3 σύμβολα που έχουμε δεί έως τώρα ήταν η λέξη x_2x_3b .

3. Κατασκευή ε-MNΠΑ από λεκτική περιγραφή μιας γλώσσας (συνέχεια)

έχουμε ότι αν

Αν η λέξη έχει τελειώσει, ελέγχουμε αν $qx_2x_3b \in F$

(δηλ το 3ο σύμβολο από το τέλος είναι 0) οπότε η λέξη

είναι δεκτή. Αν δεν έχει τελειώσει ~~επαναλαμβάνουμε~~

~~τη διαδικασία~~ ~~επαναλαμβάνουμε~~ ~~την διαδικασία~~

~~επαναλαμβάνουμε~~ επαναλαμβάνουμε την διαδικασία ~~επανά~~

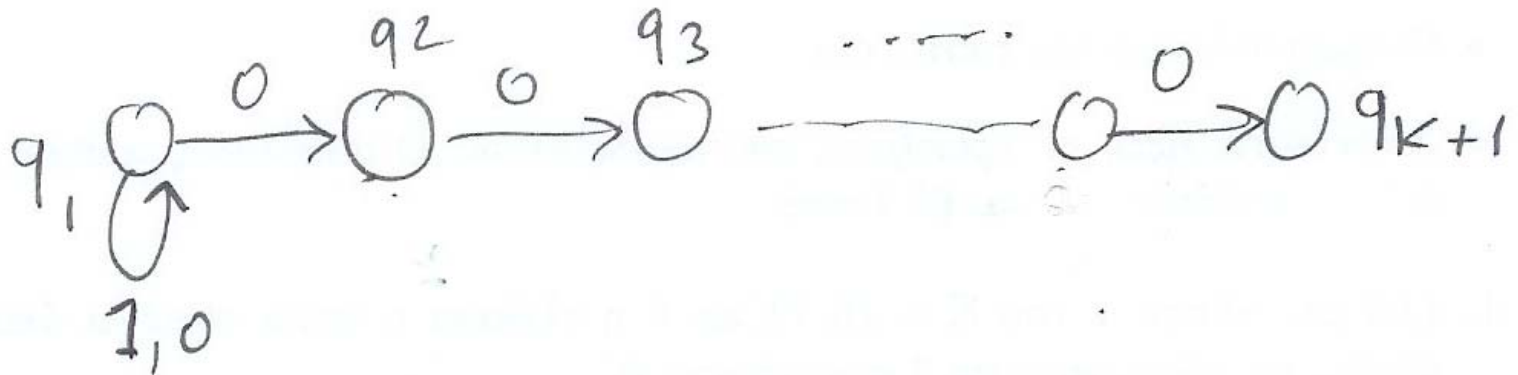
διαδικασίας το επόμενο σύμβολο της λέξης έως ότου

να τελειώσει η λέξη.

4. Κατασκευή ΜΝΠΑ μιας γλώσσας που περιγράφεται λεκτικά

(15 μονάδες) Έστω k ένας θετικός ακαίρεος. $\Sigma = \{0, 1\}$ και L η γλώσσα η οποία περιέχει όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ οι οποίες να τελειώνουν με k συνεχόμενα 0.

- (a) Κατασκευάστε ένα (ε)-μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο με $k+1$ καταστάσεις το οποίο να αποδέχεται την γλώσσα L .



4. Κατασκευή ΜΝΠΑ μιας γλώσσας που περιγράφεται λεκτικά (συνέχεια)

(15 μονάδες) Έστω k ένας θετικός ακαίρεος. $\Sigma = \{0, 1\}$ και L η γλώσσα η οποία περιέχει όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ οι οποίες να τελειώνουν με k συνεχόμενα 0.

(b) Κατασκευάστε ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται την γλώσσα L .

$$- Q = \{ q_{x_1 x_2 \dots x_k} : x_1, x_2, \dots, x_k \in \{0, 1\} \}$$

$$- q_{\epsilon \epsilon \epsilon} : \text{αρχική κατάσταση}, F = q_{000} \text{ (τελική)}$$

$$- \text{Για κάθε } q_{x_1 \dots x_k} \in Q, \quad x_1, x_2, \dots, x_k \in \{0, 1\} \text{ ορίσει}$$

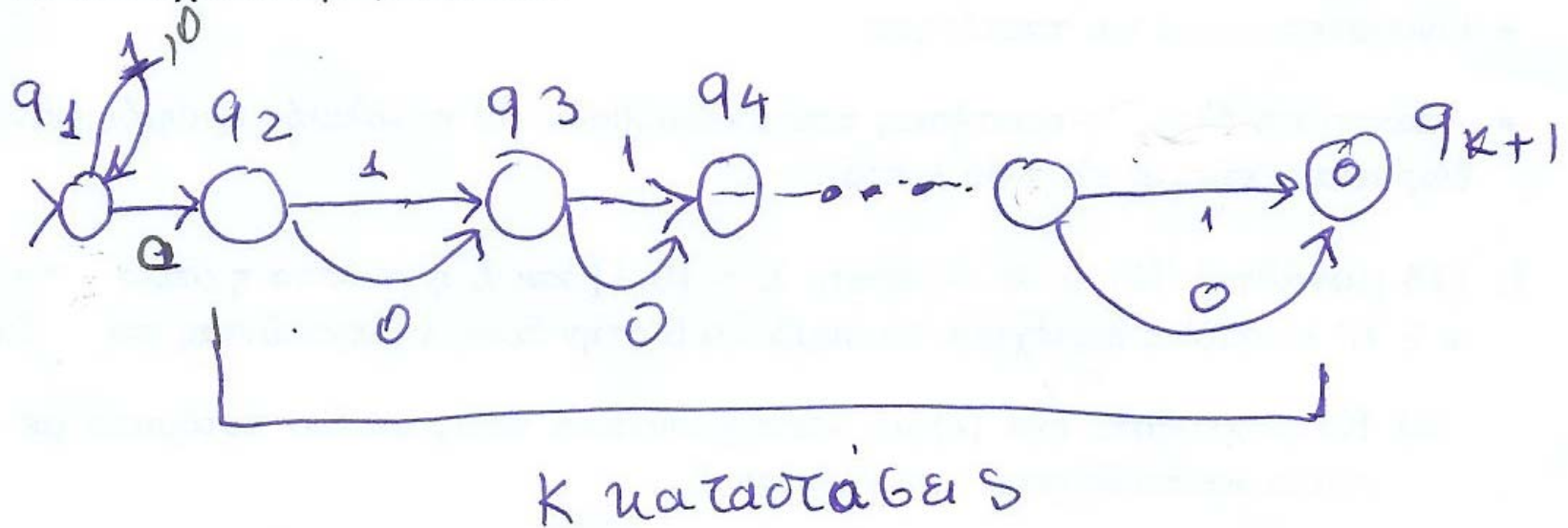
$$\delta(q_{x_1 x_2 \dots x_k}, 0) = q_{x_2 x_3 \dots x_k 0}, \text{ όπου}$$

$$0 \in \{0, 1\}$$

5. Κατασκευή ΜΝΠΑ μιας γλώσσας που περιγράφεται λεκτικά

(15 μονάδες) Έστω k ένας θετικός ακαίρεος, $\Sigma = \{0, 1\}$ και L η γλώσσα η οποία περιέχει όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ οι οποίες περιέχουν το σύμβολο 0 στην k στη θέση (ξεκινώντας από δεξιά) της λέξης w .

- (a) Κατασκευάστε ένα (ϵ) -μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο με $k+1$ καταστάσεις το οποίο να αποδέχεται την γλώσσα L .



5. Κατασκευή ΜΝΠΑ μιας γλώσσας που περιγράφεται λεκτικά (συνέχεια)

- (b) Κατασκευάστε ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται την γλώσσα L .

$$Q = \{ q_{x_1 x_2 \dots x_k} : x_1, x_2, \dots, x_k \in \{0, 1\} \}$$

q : αρχική κατάσταση , $F = \{ q_{x_1 \dots x_k} \in Q : x_1 = 0 \}$

• Για κάθε $q_{x_1 \dots x_k} \in Q$, $x_1, x_2, \dots, x_k \in \{0, 1\}$, ορίσω :

$$\hookrightarrow \delta(q_{x_1 x_2 \dots x_k}, b) = q_{x_2 x_3 \dots x_k b} ,$$

όπου $b \in \{0, 1\}$.

6. Κατασκευή κανονικής έκφρασης γλώσσας που περιγράφεται λεκτικά

(a) $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : |w| \text{ είναι άρτιος και το } a \text{ παρουσιάζεται τουλάχιστον } 1 \text{ φορά}\}.$

$$(ba \cup ab)^* \cdot (aa \cup ab \cup ba \cup ba \cup bb)^*$$

6. Κατασκευή κανονικής έκφρασης γλώσσας που περιγράφεται λεκτικά (συνέχεια)

(b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* : \text{το πλήθος των } a \text{ να μην διαιρείται με το } 3\}$.

$$b^* \cdot (a b^* a b^* a b^*)^* \cdot ((a b^*) \cup (b^* a b^* a b^*))$$

7. Κατασκευή κανονικής έκφρασης γλώσσας που περιγράφεται λεκτικά

(a) $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : |w| \text{ είναι περιττός και το } b \text{ παρουσιάζεται τουλάχιστον 1 φορά} \}$.

$$L_1 = (aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* b (aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

Το α π

7. Κατασκευή κανονικής έκφρασης γλώσσας που περιγράφεται λεκτικά (συνέχεια)

(b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* : \text{το πλήθος των } a \text{ να μην διαιρείται με το } 5\}$.

↓ *το a παραβιάζεται 1 φορά*

$$L_2 = b^* \cdot \left((a b^* a b^* a b^* a b^* a b^*)^* \cdot ((a b^*) \cup (a b^* a b^* a b^*)) \right)$$

↓ *το a παραβιάζεται 2 φορές*

$$L_2 = b^* \cdot \left((a b^* a b^* a b^* a b^* a b^*)^* \cdot \left((a b^*) \cup (a b^* a b^* a b^*) \right) \right)$$

↓ *a παραβιάζεται 3 φορές*

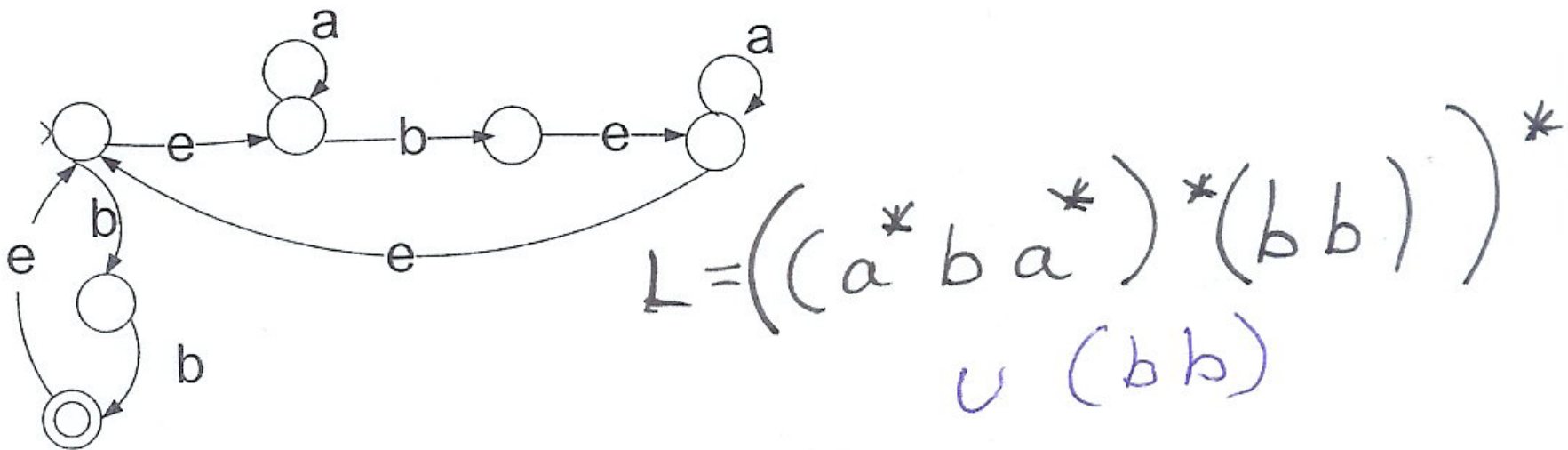
$$L_2 = b^* \cdot \left((a b^* a b^* a b^* a b^* a b^*)^* \cdot \left((a b^*) \cup (a b^* a b^* a b^*) \cup (a b^* a b^* a b^* a b^*) \right) \right)$$

↓ *a παραβιάζεται 4 φορές*

$$L_2 = b^* \cdot \left((a b^* a b^* a b^* a b^* a b^*)^* \cdot \left((a b^*) \cup (a b^* a b^* a b^*) \cup (a b^* a b^* a b^* a b^*) \cup (a b^* a b^* a b^* a b^* a b^*) \right) \right)$$

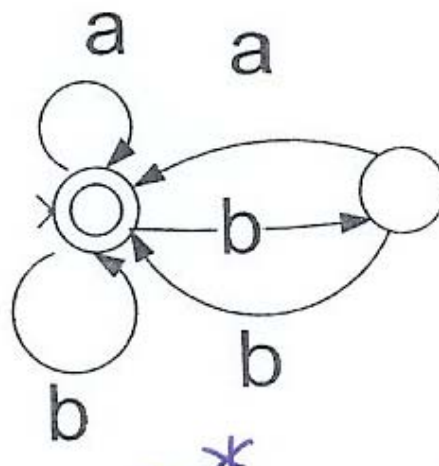
8. Κατασκευή κανονικής έκφρασης από ΜΝΠΑ

Γράψτε κανονική έκφραση για το παρακάτω αυτόματο:



9. Κατασκευή κανονικής έκφρασης από ΜΝΠΑ

Γράψτε κανονική έκφραση για το παρακάτω αυτόματο:



$$\begin{aligned} L &= (a \cup b \cup ba \cup bb)^* \\ &= (a \cup (b \cup (\emptyset \cup a \cup b)))^* = (a \cup b)^* \end{aligned}$$

10. Ιδιότητες κανονικών γλωσσών

(10 μονάδες) Να δείξετε ότι η παρακάτω γλώσσα είναι αποδεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο.
 $L = \{w \in \{a, b\}^* : \text{το πλήθος των } a \text{ να μην διαιρείται με το } 3 \text{ και } |w| \text{ είναι άρτιος και το } 0 \text{ παρουσιάζεται τουλάχιστον } 1 \text{ φορά}\}.$

$L = L_1 \cap L_2$ άσκησης 4.

Η τομή είναι κλειστή πράξη στα πεπερασμένα αυτόματα (θεώρημα Kleene). Οι L_1, L_2 είναι κανονικές γλώσσες, άρα κάθε μια από αυτές είναι αποδεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο. Αφού η L είναι η τομή τους, συμπεραίνουμε ότι είναι κανονική, οπότε 'και διε' τη από ένα πεπερασμένο αυτόματο.

11. Ιδιότητες κανονικών γλωσσών

- (10 μονάδες) Να δείξετε ότι η παρακάτω γλώσσα είναι αποδεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο.
 $L = \{w \in \{a, b\}^* : |w| \text{ είναι περιττός και το } 1 \text{ παρουσιάζεται τουλάχιστον } 1 \text{ φορά και το πλήθος των } a \text{ να μην διαιρείται με το } 5 \}$.

$L = L_1 \cap L_2$ άσκησης 4.

Η τομή είναι κλειστή πράξη στα πεπερασμένα αυτόματα (θεώρημα Kleene). Οι L_1, L_2 είναι κανονικές γλώσσες, άρα κάθε μια από αυτές είναι αποδεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο. Αφού η L είναι η τομή τους, συμπεραίνουμε ότι είναι κανονική, οπότε 'και διε' τη από ένα πεπερασμένο αυτόματο.

