Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

10ο Φροντιστήριο: Επανάληψη

6 Μαΐου 2008

Δρ. Παπαδοπούλου Βίκη

1. Θεώρημα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες

Χρησιμοποιείστε το Θ. Άντλησης για κανονικές γλώσσες για να δείξετε ότι η γλώσσα

$$L = \{\, x_1 \# x_2 \# \ldots \# x_k \mid \text{κάθε } x_i \in \{1\}^* \text{ και } x_i \neq x_j \text{ όταν } i \neq j \,\} \quad \text{για } k \geq 0$$

δεν είναι κανονική.

ΛΥΣΗ:

Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η L είναι κανονική. Αφού η L είναι προφανώς άπειρη γλώσσα, το Θ. Άντλησης (ισχυρή μορφή) μπορεί να εφαρμοστεί. Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε λέξη w με $|w| \geq p$, υπάρχουν λέξεις $x, y, z \in \{1, \#\}^*$ τέτοιες ώστε:

(i) $|xy| \leq p$

(ii) $|y| > 0$

(iii) $xy^n z \in L \;\; \forall \; n \geq 0$

(όπου $w = xyz$) (Εδώ p είναι η σταθερά του Θ. Άντλησης για την L.)

Επιλέγουμε $w = 1^{p}\#1^{p-1}\#1^{p-2}\#\dots\#1^{1}\#1^{0}$. Προφανώς, $w \in L$ και $|w| > p$. Από την συνθήκη (i), $|y| \leq p$, ενώ από την συνθήκη (ii), $|y| > 0$. Έπεται ότι $y = 1^{i}$, όπου $1 \leq i \leq p$.

Θεωρούμε την λέξη $xy^{0}z = 1^{p-i}\#1^{p-1}\#1^{p-2}\#\dots\#1^{1}$. Από την συνθήκη (iii), $xy^{0}z \in L$. Αφού $1 \leq i \leq p$, έπεται ότι $0 \leq p-i \leq p-1$. Συνεπάγεται ότι $xy^{0}z \notin L$. Αντίφαση.

2. Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες

- Να δείξετε ότι η παρακάτω γλώσσα δεν είναι κατηγορηματική.

Παράδειγμα 9.5 *Η γλώσσα* $L_5 = \{a^i b^j c^k \mid k = \max\{i, j\}\}$.

- Έστω ότι η γλώσσα είναι κατηγορηματική.
- Εφαρμόζεται το θεώρημα άντλησης για κατηγ. Έστω $M_{L_5} > 0$

η σταθερά της γλώσσας.

- Έστω η λέξη: $w = a^{M_{L_5}} b^{M_{L_5}} c^{M_{L_5}} \in L_4$ με $|w| = 3M_{L_5} > M_{L_5}$.
- Δυνατές περιπτώσεις:

1. Η λέξη vy δεν περιέχει το σύμβολο c.
2. Η λέξη vy περιέχει το σύμβολο c.

1. Η λέξη vy δεν περιέχει το σύμβολο c.

- Η λέξη vy δεν περιέχει το σύμβολο c. Τότε, θεωρούμε τη λέξη uv^2xy^2z. Η συνθήκη *2* συνεπάγεται ότι ο αριθμός των a ή ο αριθμός των b στη λέξη αυτή είναι μεγαλύτερος από M_{L_4}. Από την άλλη, ο αριθμός των c στη λέξη uv^2xy^2z είναι ο ίδιος με τον αριθμό των c στη λέξη $uvxyz = w$, δηλαδή M_{L_5}. Έπεται ότι $uv^2xy^2z \notin L_5$. Ωστόσο, η συνθήκη *3* συνεπάγεται ότι $uv^2xy^2z \in L_5$. Αντίφαση.

2. Η λέξη vy περιέχει το σύμβολο c.

- Η λέξη vy περιέχει το σύμβολο c. Τότε, θεωρούμε τη λέξη $uv^0xy^0z = uxz$. Προφανώς, ο αριθμός των c στη λέξη uxz είναι μικρότερος από M_{L_5}. Αφετέρου, η συνθήκη *2* συνεπάγεται ότι η λέξη vy δεν περιέχει το σύμβολο a. Έτσι, ο αριθμός των a στη λέξη uxz είναι ο ίδιος με τον αριθμό των a στη λέξη $uvxyz = w$, δηλαδή M_{L_5}. Έπεται ότι $uv^0xy^0z \notin L_5$. Ωστόσο, η συνθήκη *3* συνεπάγεται ότι $uv^0xy^0z \in L_5$. Αντίφαση.

Αφού έχουμε καταλήξει σε αντίφαση για κάθε δυνατή περίπτωση, η απόδειξή μας ότι η L_5 δεν είναι κατηγορηματική είναι τώρα ολοκληρωμένη. $\square$

3. Αυτόματα Στοίβας

- Κατασκευάστε αυτόματο στοίβας που να δέχεται τη γλώσσα

$a^i b^j d^k c^l \mid i+l=j+k$.

4. Μη επιλυσιμότητα

- Να δείξετε ότι η παρακάτω γλώσσα δεν είναι αναδρομική.
- $L_5 = \{p(M) \mid$ η $p(M)$ δεν είναι ίση με την κανονική γλώσσα $a^i \mid i \geq 0\}$

Δες βιβλίο σελιδα 308, παράδειγμα (e).

5. Προβλήματα που ανήκουν στην κλάση NP

- Το πρόβλημα μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου: Για ένα δεδομένο γράφημα G(V, E) βρες ένα υποσύνολο Iμ V τέτοιο ώστε
  - για κάθε v_i , $v_j \in I$ ισχύει $(vi, vj) \notin E$
  - το $|I|$ είναι το μέγιστο δυνατό για το γράφημα G.
- **Σε μορφή γλώσσας:**
- Το πρόβλημα μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου: Για ένα δεδομένο γράφημα G(V, E) και ενός ακεραίου K, υπάρχει ένα υποσύνολο Iμ V τέτοιο ώστε
  - για κάθε v_i , $v_j \in I$ $(vi, vj) \notin E$
  - $|I| \geq K$?
- Δεν είναι γνωστός πολυωνυμικός αλγόριθμος για το πρόβλημα ☹

5. Να δείξετε ότι το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο ανήκει στην κλάση NP.

- Είσοδος: I= (E, K) , E πίνακας γειτνίασης $n \times n$, στοιχεία : e_{ij}
- Μάντεμα (μη ντετερμινιστική φάση): Μαντεύει μια λύση για το I: H MMT γράφει σε μια 2^{η} ταινία μια συμβολοσειρά από 0, 1 και $\sqcup$ μήκους $|I|$.
- Έλεγχος (ντετερμινιστική φάση):
  1. Ελέγχει αν η λέξη που έγραψε είναι μια δυαδική κωδικοποίηση ενός συνόλου S από K κόμβους από το σύνολο των n κόμβων διαχωρισμένων με ένα κενό, δηλ. της μορφής $\pi(1) \sqcup \pi(2) \cdots \sqcup \pi(K)$.
     A. Εάν ναι, τότε ελέγχει εάν το σύνολο είναι ανεξάρτητο σύνολο με βάση των πίνακα γειτνίασης E. Δηλ. για κάθε x, για όλα τα $y \in S\text{-}x$, $e_{xy} = 0$.
        a) Εάν είναι αποφασίζει YES.
  2. Αλλιώς αποφασίζει NO.
- Ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται σε πολυωνυμικό μη ντετερμινιστικό χρόνο.