Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Πληροφορικής
ΕΠΛ 211 Θεωρία Υπολογισμού
Καθηγητής Μ. Μαυρονικόλας

Φυλλάδιο 5
31 Οκτωβρίου 1995

3η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: Παρασκευή 10 Νοεμβρίου 1995

[1] (α) Δώστε μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα που παράγει τη γλώσσα

$L1 = \{ w \in \{ 0,1 \}^* : \#_0(w) > \#_1(w)\}$.

Αποδείξτε την ορθότητα της γραμματικής σας.

(β) Δώστε ένα αυτόματο με στοίβα που δέχεται τη γλώσσα.

$L2 = \{ \alpha^n w : n \in N, w \in \{b,c\}^* \text{ και } |w| = 2n \}$.

Αποδείξτε την ορθότητα του αυτομάτου σας.

(γ) Δώστε μια κανονική γραμματική που παράγει ή ένα αυτόματο με στοίβα που δέχεται τη γλώσσα.

$L3 = \{ x \# y x^R Z : x, y, z \in \{0,1\}^* \}$.

[2] Χρησιμοποιείστε το θεώρημα άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα για να δείξετε ότι καθε μία από τις παρακάτω γλώσσες δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα:

(α) $\{ ww : w \in \{0,1\}^* \}$, όπου w είναι η κατά ψηφίο άρνηση της λέξης w (δηλ., κάθε O στην w αντικαθίσταται από 1 στην w και αντίστροφα).

(β) $\{ w \# w^R \# w : w \in \{0,1\}^* \}$.

[3] (α) Δείξτε ότι το σύνολο των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστό κάτω από την πράξη της αντιστροφής. Δηλαδή, δείξτε ότι αν η L είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα, τότε και η

$L^R = \{ w : w^R \in L \}$

είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα μιας γλώσσας χωρίς συμφραζόμενα της οποίας το συμπλήρωμα **δεν** είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα. (Αποδείξτε όλους τους μή τετριμμένους ισχυρισμούς σας.)

[4] Δώστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα που παράγουν κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα:

(α) $L1 = \{ x\#y : x, y \in \{\alpha,b\}^* \text{ και } |x| > |y| \}$.

(β) $L2 = \{ x\#y : x, y \in \{\alpha,b\}^* \text{ και } y \neq x^R \}$.

(γ) $L3 = \{ \alpha^i b^j : i \leq j \}$.

[5] Έστω $L = \{ w \in \{\alpha,b\}^* : w = w^R$ και $\#_1(w)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3 $\}$. Κατασκευάστε ένα αυτόματο με στοίβα που δέχεται την L. Αποδείξτε την ορθότητα της κατασκευής σας.

ΕΠΛ 211 – 3η Σειρά Ασκήσεων (Πρόχειρες Λύσεις)

1. [α] $L_1 = \{ w \in \{0,1\}^* : \#_0(w) > \#_1(w) \}$

$S \to SA \mid A$

$A \to E0E$

$B \to E1E$

$E \to 0B \mid 1A \mid e$

[β] $L_2 = \{ a^n w : n \in \mathbb{N},\ w \in \{b,c\}^* \text{ καί } |w| = 2n \}$

$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

όπου: $K = \{ s, q, q_0, q_1, s' \}$

$\Sigma = \{ a, b, c \}$

$\Gamma = \{ \#, a \}$

$F = \{ s, s' \}$

$\Delta = \{ ((s, e, e), (s, \#)),$
$((s, a, \#), (q, a\#)),$
$((q, b, a), (q_1, a)),$
$((q, c, a), (q_1, a)),$
$((q_1, b, a), (q_0, e)),$
$((q_1, c, a), (q_0, e)),$
$((q_0, b, a), (q_1, a)),$
$((q_0, c, a), (q_1, a)),$
$((q_0, e, \#), (s', e))$
$\}$

[γ] $L_2 = \{ x \# y x^R z : x, y, z \in \{a, b\}^* \}$

$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

όπου: $K = \{s, s', f, f'\}$

$\Sigma = \{ \quad \# \}$

$\Gamma = \{ \quad , \quad \}$

$F = \{f, f'\}$

$$\Delta = \{ ((s, a, e), (s, a)),$$
$$((s, b, e), (s, b)),$$
$$((s, \#, e), (s', e)),$$
$$((s', a, e), (s', e)),$$
$$((s', b, e), (s', e)),$$
$$((s', e, e), (f, e)),$$
$$((f, a, a), (f, e)),$$
$$((f, b, b), (f, e)),$$
$$((f, e, e), (f', e)),$$
$$((f', a, e), (f', e)),$$
$$((f', b, e), (f', e))$$
$$\}$$

2. [a] $L_1 = \{ w\bar{w} : w \in \{0,1\}^* \}$

Ὑποθέτουμε, γιά νά φθάσουμε σέ ἀντίφαση, ὅτι ἡ L_1 εἶναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα. Ἀπό τό θ. ἄντλησης γιά γλῶσσες χωρίς συμφραζόμενα, ὑπάρχει κάποιος ἀκέραιος $K > 0$ τέτοιος ὥστε κάθε λέξη $w \in L_1$ μέ μῆκος $|w| > K$ μπορεῖ νά γραφεῖ σάν $w = uvxyz$ ὅπου:

(i) $|vy| > 0$

(ii) $|vxy| \leq K$

(iii) $uv^m xy^m z \in L_1$ γιά κάθε ἀκέραιο $m \geq 0$.

Διαλέγουμε $w = 0^K 1^K 0^K 1^K 0^K 1^K$ ἔτσι ὥστε ἡ προϋπόθεση τοῦ θ. ἄντλησης ($|w| > K$) νά ἰσχύει. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, καί θεωροῦμε σέ κάθε μία ἀπό αὐτές τίς περιπτώσεις τή λέξη $w' = uv^0xy^0z \in L$.

(1) Ἡ λέξη vxy περιέχει μόνο 0 ἤ μόνο 1. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, $\#_0(w') \neq \#_1(w')$, καί ἔτσι $w' \notin L_1$. Ἀντίφαση.

(2) Ἡ λέξη vxy περιέχει καί 0 καί 1. (Ἀκριβέστερα, τά v καί y περιέχουν μαζί καί τά δύο εἴδη συμβόλων.) Ἀφοῦ $|vxy| \leq K$, ἡ w' εἶναι τῆς μορφῆς $0^{k_1}1^{k_2}0^{k_3}1^{k_4}0^{k_5}1^{k_6}$, ὅπου δύο διαδοχικά k_i εἶναι $< K$, ἐνῶ τά ὑπόλοιπα (4) k_i εἶναι ὅλα ἴσα μέ K. Θεωροῦμε καί πάλι δύο περιπτώσεις:

(a) Τό μέσο τῆς λέξης w' εἶναι ἀκριβῶς:

$$0^{k_1}1^{k_2}0^{k_3} \mid 1^{k_4}0^{k_5}1^{k_6}$$

μέσο

δηλ., $m_1 + m_2 + m_3 = m_4 + m_5 + m_6$.

Ἀφοῦ $w' \in L$, πρέπει νά εἶναι $\cancel{\kappa}_1 = \cancel{\kappa}_4$, $\cancel{\kappa}_2 = \cancel{\kappa}_5$ καί $\cancel{\kappa}_3 = \cancel{\kappa}_6$. Αὐτό ὅμως δέν μπορεῖ νά συμβαίνει ἀφοῦ δύο διαδοχικά $\cancel{\kappa}_i$ εἶναι $< K$, ἐνῶ ὅλα τά ἄλλα K_i εἶναι ἴσα K.

(β) Τό μέσο τῆς λέξης w' εἶναι κάπου ἀλλοῦ. Τότε ἕνα ἀπό τά δύο μισά τῆς w' περιέχει 3 ἐναλλασσόμενα κομμάτια ἀπό 0 καί 1, ἐνῶ τό ἄλλο μισό περιέχει 4 ἐναλλασσόμενα κομμάτια ἀπό 0 καί 1, ὁπότε ἡ w' δέν ἔχει τήν κατάλληλη μορφή γιά νά ἀνήκει στήν L_1. Ἀντίφαση.

[β] $L_2 = \{ w \# w^R \# w \; : \; w \in \{0,1\}^* \}$

Ὑποθέτουμε, γιά νά φθάσουμε σέ ἀντίφαση, ὅτι ἡ L_2 εἶναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα. Μέ τό θ. ἄντλησης διατυπωμένο ὅπως στό [α], διαλέγουμε $w = 0^K \# 0^K \# 0^K$ (τό ὁποῖο πληροῖ τήν προϋπόθεση τοῦ θ. ἄντλησης). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Ἄν ἡ λέξη v ἤ ἡ λέξη y περιέχει τό σύμβολο #, τότε ἡ λέξη uv^2xy^2z περιέχει περισσότερα ἀπό δύο σύμβολα #, καί ἑπομένως δέν ἀνήκει στή γλώσσα.

(2) Καί ἡ λέξη v καί ἡ λέξη y ἀποτελοῦνται ἀποκλειστικά ἀπό σύμβολα 0. Τότε, ἕνα τουλάχιστον ἀπό τα (α), (β), (γ) δέν περιέχει τό v ἤ τό y:

$$\underset{(\alpha)}{0^K} \# \underset{(\beta)}{0^K} \# \underset{(\gamma)}{0^K}$$

Θεωροῦμε τώρα τή λέξη uv^0xy^0z. Σ' αὐτή τή λέξη, ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά ⓐ, ⓑ, ⓒ ἔχει μῆκος ἀκριβῶς k, ἐνῶ ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά ⓐ, ⓑ, ⓒ ἔχει μῆκος $< k$ (ἀφοῦ ἀπό αὐτό ἀφαιρέσαμε τό v, τό y ἤ καί τά δύο). Ἄρα, ἡ w' δέν ἔχει τήν κατάλληλη μορφή γιά νά ἀνήκει στήν L_2. Ἀντίφαση.

3. [α] Ἔστω $G = (V, \Sigma, R, S)$ τέτοια ὥστε $L(G) = L$. Ὁρίζουμε $G^R = (V, \Sigma, R^R, S)$ ὅπου $R^R = \{ A \to \alpha^R : A \to \alpha \in R \}$. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι $L(G^R) = L^R$: αὐτό ἰσχύει διότι γιά κάθε παραγωγή $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$ τῆς G, ἄν ἀντιστρέψουμε τή λέξη σέ κάθε βῆμα τῆς παραγωγῆς, τότε παίρνουμε μιά ἀντίστοιχη παραγωγή $S \overset{*}{\underset{G^R}{\Rightarrow}} w^R$ τῆς G^R, καί ἀντίστροφα. Αὐτό μπορεῖ νά δειχθεῖ αὐστηρά μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, κάνοντας ἐπαγωγή πάνω στό μῆκος τῆς παραγωγῆς, διότι ἄν ἔχουμε ἕνα βῆμα $\beta_1 A \beta_2 \underset{G}{\Rightarrow} \beta_1 \alpha \beta_2$ μέ χρήση τοῦ κανόνα $A \to \alpha \in R$, τότε ἔχουμε καί τό βῆμα $\beta_2^R A \beta_1^R \underset{G^R}{\Rightarrow} \beta_2^R \alpha^R \beta_1^R$ μέ χρήση τοῦ κανόνα $A \to \alpha^R \in R^R$.

[β] Ἔστω $L = \{ w \in \{a, b, c\}^* : w$ δέν εἶναι τῆς μορφῆς $a^n b^n c^n$ γιά κάποιο $n \geq 0 \}$. Θά δείξουμε ὅτι ἡ L εἶναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα, ἐνῶ ἡ $\overline{L}$ δέν εἶναι.

- Προφανῶς, $\overline{L} = \{ a^n b^n c^n : n \geq 0 \}$, ἡ ὁποία εἶναι τό κανονικό παράδειγμα γλώσσας πού δέν εἶναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
- Μποροῦμε νά γράψουμε:

$$L = L(a^* b^* c^*) \cup \{ a^i b^j c^k : i \neq j \}$$

κανονική γλώσσα, ἄρα καί γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα

$$\cup \{ a^i b^j c^k : i \neq k \}$$

$$\cup \{ a^i b^j c^k : j \neq k \}$$

Ἰσχυριζόμαστε ὅτι ἡ γλῶσσα $\{a^i b^j c^k : i \neq j\}$ εἶναι γλῶσσα χωρὶς συμφραζόμενα: ἡ γλῶσσα αὐτὴ παράγεται ἀπὸ τὴ γραμματικὴ χωρὶς συμφραζόμενα μὲ κανόνες:

$$S \rightarrow aSbC \mid T$$
$$T \rightarrow aA \mid bB$$
$$A \rightarrow aA \mid e$$
$$B \rightarrow bB \mid e$$
$$C \rightarrow cC \mid e$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο, μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὶς γλῶσσες $\{a^i b^j c^k : i \neq k\}$ καὶ $\{a^i b^j c^k : j \neq k\}$ εἶναι γλῶσσα χωρὶς συμφραζόμενα.

Ἀφοῦ τὸ σύνολο τῶν γλωσσῶν χωρὶς συμφραζόμενα εἶναι κλειστὸ κάτω ἀπὸ τὴν πράξη τῆς ἕνωσης, ἕπεται ὅτι ἡ L εἶναι γλῶσσα χωρὶς συμφραζόμενα.

4. [α] $L_1 = \{ x\#y : x, y \in \{a,b\}^* \text{ και } |x| > |y| \}$

$S \to aSa \mid aSb \mid bSa \mid bSb \mid aS \mid bS \mid a\# \mid b\#$

[β] $L_2 = \{ x\#y : x, y \in \{a,b\}^* \text{ και } y \neq x^R \}$

$S \to aSa \mid bSb \mid aTb \mid bTa$
$T \to aT \mid Ta \mid bT \mid Tb \mid \#$

[γ] $L_3 = \{ a^i b^j : i \leq j \}$

$S \to aSb \mid Sb \mid e$

5. $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

όπου:

$K = \{(s,0), (s,1), (s,2), (f,0), (f,1), (f,2)\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{a, b\}$

$s = (s,0)$

$F = \{(f,0)\}$

$$
\begin{aligned}
\Delta = \{ & (((s,0), a, e), ((s,1), a)), \\
& (((s,1), a, e), ((s,2), a)), \\
& (((s,2), a, e), ((s,0), a)), \\
& (((s,0), b, e), ((s,0), b)), \\
& (((s,1), b, e), ((s,1), b)), \\
& (((s,2), b, e), ((s,2), b)), \\
& (((s,0), e, e), ((f,0), e)), \\
& (((s,1), e, e), ((f,1), e)), \\
& (((s,2), e, e), ((f,2), e)), \\
& (((s,0), a, e), ((f,1), e)), \\
& (((s,1), a, e), ((f,2), e)), \\
& (((s,2), a, e), ((f,0), e)), \\
& (((s,0), b, e), ((f,0), e)), \\
& (((s,1), b, e), ((f,1), e)), \\
& (((s,2), b, e), ((f,2), e)), \\
& (((f,0), a, a), ((f,1), e)), \\
& (((f,1), a, a), ((f,2), e)), \\
& (((f,2), a, a), ((f,0), e)), \\
& (((f,0), b, b), ((f,0), e)), \\
& (((f,1), b, b), ((f,1), e)), \\
& (((f,2), b, b), ((f,2), e)) \\
\}
\end{aligned}
$$