Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Πληροφορικής
ΕΠΛ211: Θεωρία Υπολογισμού — Φυλλάδιο 5
Καθηγητής Μ. Μαυρονικόλας — 5 Οκτωβρίου 1994

3η σειρά ασκήσεων

Παράδοση: Παρασκευή 14 Οκτωμβρίου, 1994.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω αλφάβητα Σ και Δ. Θεωρείστε μια συνάρτηση $h: \Sigma \to \Delta^*$. Μπορούμε να επεκτείνουμε την h σε μια συνάρτηση από το Σ^* στο Δ^* θέτοντας:

$$h(e) = e$$
$$h(w\sigma) = h(w)\,h(\sigma) \text{ για κάθε } w \in \Sigma^*,\ \sigma \in \Sigma.$$

Για παράδειγμα, αν $\Sigma = \Delta = \{a,b\}$, $h(a) = ab$, $h(b) = aab$, τότε

$$\begin{aligned} h(aab) &= h(aa)\,h(b) \\ &= h(a)\,h(a)\,h(b) \\ &= ababaab \end{aligned}$$

Κάθε συνάρτηση $h: \Sigma^* \to \Delta^*$ που ορίζεται με αυτό τον τρόπο από μια συνάρτηση $h: \Sigma \to \Delta^*$ καλείται ένας ομομορφισμός. Έστω, λοιπόν, h ένας ομομορφισμός από το Σ^* στο Δ^*.

[α] Δείξτε ότι αν η $L \subseteq \Sigma^*$ γίνεται δεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο, τότε, επίσης, και η $h(L) = \{h(w) \in \Delta^* : w \in L\}$ γίνεται δεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο.

[β] Δείξτε ότι αν η $L \subseteq \Delta^*$ γίνεται δεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο, τότε, επίσης, και η $h^{-1}(L) = \{w \in \Sigma^* : h(w) \in L\}$ γίνεται δεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια αριθμητική πρoοδος είναι ένα σύνολο $\{p+qn: n = 0,1,2,\ldots\}$ για κάποια $p,q \in N$.

[α] Δείξτε ότι αν $L \subseteq \{a\}^*$ και το σύνολο $\{n: a^n \in L\}$ είναι μια αριθμητική πρόοδος, τότε η L είναι κανονική.

[β] Δείξτε ότι αν $L \subseteq \{a\}^*$ και το σύνολο $\{n: a^n \in L\}$ είναι η ένωση ενός πεπερασμένου συνόλου από αριθμητικές προόδους, τότε η L είναι κανονική.

[γ] Δείξτε ότι αν $L \subseteq \{a\}^*$ είναι κανονική, τότε το σύνολο $\{n: a^n \in L\}$ είναι η ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους από αριθμητικές προόδους.

[δ] Δείξτε ότι, για οποιοδήποτε αλφάβητο Σ, αν η $L \subseteq \Sigma^*$ είναι κανονική, τότε το σύνολο $\{|w| : w \in L\}$ είναι η ένωση ενός πεπερασμένου συνόλου από αριθμητικές προόδους.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω $D = \{0,1\}$ και $T = D \times D \times D$. Μια ορθή πρόσθεση δύο ακεραίων σε δυαδική παράσταση μπορεί να παρασταθεί σαν μια λέξη στο T^* αν σκεφτόμαστε τα σύμβολα του T σαν "κατακόρυφες τριάδες". Για παράδειγμα, η πρόσθεση

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \; + \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

θα παρίστατο σαν η παρακάτω λέξη μήκους 4:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Δείξτε ότι το σύνολο όλων των λέξεων στο T^* που παριστούν ορθές προσθέσεις είναι μια κανονική γλώσσα.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Σ' αυτό το πρόβλημα, δείχνουμε μια ισχυρότερη μορφή του θεωρήματος 'Αντλησης.

Έστω $M = (K,\Sigma,\delta,s,F)$ ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο, και έστω w μια οποιαδηποτε λέξη στην L (M) τέτοια ώστε $|w| \geq |k|$. Δείξτε ότι υπάρχουν λέξεις x,y και z τέτοιες ώστε $w = xyz$, $|xy| \leq |k|$, $y \neq e$ και $xy^nz \in L(M)$ για κάθε $n \geq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Χρησιμοποιειστε την άσκηση 4 και κατάλληλες ιδιότητες θήκης των κανονικών γλωσσών για να δείξετε ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι κανονικές:

[a] $\{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$

[b] $\{ww : w \in \{a,b\}^*\}$

ΕΠΛ 211
3η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 2

[α] Έστω ότι τό σύνολο τών λέξεων στήν L άποτελεί άριθμητική πρόοδο, δηλ. $L = \{a^{p+qm} : m \in \mathbb{N}\}$ γιά κάποιους άκεραίους $p, q \geq 0$. Η L είναι κανονική άφοῦ:
$L(((\underbrace{a(a\cdots a)a}_{p \text{ φορές}})(\underbrace{a(a\ldots a)a}_{q \text{ φορές}})^*)) = L$.

[β] Διαμέρισε τό σύνολο τών μηκών $\{n : a^n \in L\}$ σέ ένα πεπερασμένο πλήθος άπό άριθμητικές προόδους ℓ_1, $\ell_2, \ldots, \ell_k$, $k \geq 1$. Λόγω τοῦ [α], κάθε μιά άπό τίς γλῶσσες $L_k = \{a^n : n \in \ell_k\}$ είναι κανονική. Άφοῦ τό σύνολο τών κανονικών γλωσσών είναι κλειστό κάτω άπό τήν πράξη τής ένωσης, ή γλώσσα $\bigcup L_k = L$ είναι έπίσης κανονική.

[γ] Έστω $M = (K, \{a\}, \delta, s_0, F)$ ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αύτόματο πού δέχεται τήν L καί ύπόθεσε ότι κάθε κατάσταση τοῦ M είναι προσιτή. Έστω ότι οί καταστάσεις είναι $s_0 = q_0, q_1, \ldots, q_\ell$, $\ell \geq 0$, όπου $\delta(q_i, a) = q_{i+1}$ γιά $0 \leq i \leq \ell-1$ καί $\delta(q_\ell, a) = q_p$ γιά κάποιο p, $0 \leq p \leq \ell$. Έστω ότι ή q_j είναι μιά τελική κατάσταση τοῦ M γιά κάποιο j, $0 \leq j \leq \ell$. Ίσχυριζόμαστε ότι τό σύνολο τών μηκών λέξεων πού γίνονται δεκτές μέσω τής q_j άποτελοῦν μιά άριθμητική πρόοδο $\ell_j = \{p_j + q_j m : m \in \mathbb{N}\}$, όπου $p_j = j$ καί $q_j = 0$ άν $j < p$ (ή κατάσταση q_j βρίσκεται "έκτός τοῦ βρόγχου" καί μποροῦμε νά φθάσουμε στήν q_j κατά ἕνα μόνο τρόπο), ἢ $q_j = \ell - p + 1$ ἂν $p \leq j \leq \ell$ (ἂν ἡ p_j βρίσκεται "μέσα στό βρόχο, τότε μποροῦμε ἐπίσης νά ξαναφθάσουμε στήν p_j διατρέχοντας τόν βρόχο, μήκους $\ell - p + 1$ ὁποιοδήποτε ἀριθμό ἀπό φορές. Ἀφοῦ τό F εἶναι πεπερασμένο, ὑπάρχει ἕνας πεπερασμένος ἀριθμός ἀπό τέτοιες ἀριθμητικές προόδους, μιά γιά κάθε τελική κατάσταση.

[δ] Ἔστω $M = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$ ἕνα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αὐτόματο πού δέχεται τήν L, ὅπου $|\Sigma| > 1$. Κατασκευάζουμε τό πεπερασμένο αὐτόματο $M' = (K, \{a\}, \delta', s_0, F)$, ἔτσι ὥστε γιά ὁποιεσδήποτε δύο καταστάσεις $p, q \in K$, $((p, a), q) \in \delta'$ ἂν καί μόνο ἂν $((p, \sigma), q) \in \delta$ γιά κάποιο σύμβολο $\sigma \in \Sigma$. Προφανῶς, ἂν $w \in L$ μέ $|w| = n$, τότε $a^n \in L(M')$ καί ἀντίστροφα, ἂν $a^n \in L(M')$, τότε ὑπάρχει κάποια λέξη w μήκους n τέτοια ὥστε $w \in L$. Συνεπῶς:

$$\underbrace{\{n : w \in L \text{ καί } |w| = n\}}_{\text{μήκη λέξεων τῆς } L} = \underbrace{\{n : a^n \in L(M')\}}_{\text{μήκη λέξεων τῆς } L(M')}$$

Ἀπό τό [γ], $\{a^n : a^n \in L(M')\}$ εἶναι ἡ ἕνωση ἑνός πεπερασμένου πλήθους ἀπό ἀριθμητικές προόδους, ἄρα καί ἡ $\{n : w \in L \text{ καί } |w| = n\}$, ὅπως χρειάζεται.

ΑΣΚΗΣΗ 3

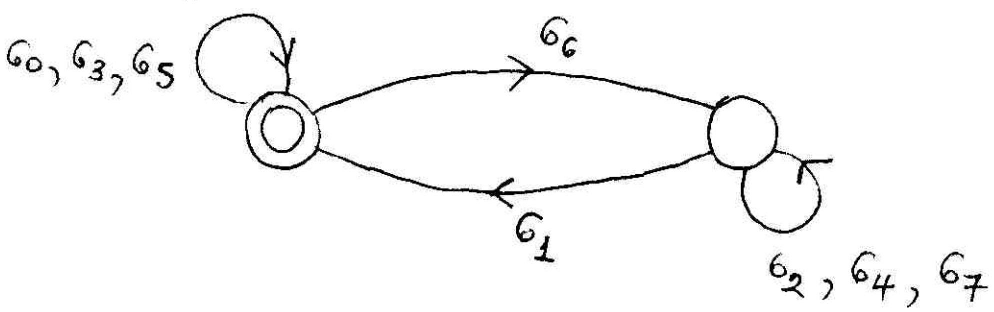
Ἔστω L τό σύνολο τῶν λέξεων στό T^* πού παριστοῦν ὀρθές προσθέσεις.
Ἔστω $L^R = \{ w \in T^* : w^R \in L \}$

- Δείχνουμε πρῶτα ὅτι γιά κάθε γλώσσα L, ἡ L εἶναι κανονική ἄν καί μόνο ἄν ἡ L^R εἶναι κανονική. (Αὐτό γίνεται "ἀντιστρέφοντας" τίς μεταβάσεις σέ ἕνα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αὐτόματο M πού δέχεται τήν L καί προσθέτοντας μιά καινούργια ἀρχική κατάσταση μέ μεταβάσεις ἀπό αὐτή πάνω στήν κενή λέξη σέ κάθε τελική κατάσταση τοῦ M. Ἡ ἀπόδειξη ὅτι τό αὐτόματο M' πού προκύπτει δέχεται τήν L^R γίνεται μέ ἐπαγωγή.)

Ἀρκεῖ λοιπόν νά κατασκευάσουμε ἕνα μή ντετερμινιστικό πεπερασμένο αὐτόματο γιά τήν L^R.

- Ἔστω $\underset{\sigma_0}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{\sigma_1}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{\sigma_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\sigma_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{\sigma_4}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{\sigma_5}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{\sigma_6}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\sigma_7}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$ τά σύμβολα.

Τό ζητούμενο αὐτόματο γιά τήν L^R εἶναι:



ΑΣΚΗΣΗ 4

Ἀφοῦ ἡ L εἶναι κανονική, ὑπάρχει κάποιο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αὐτόματο M πού τή δέχεται καί ἔχει K καταστάσεις. Ἔστω λέξη $w = s_1 s_2 \dots s_K \dots s_\ell$ ($s_i \in \Sigma$) μήκους $\ell \geq K$. Διαβάζοντας τήν λέξη $s_1 s_2 \dots s_K$, τό M περνᾶ ἀπό τίς καταστάσεις $q_0, q_1, \dots, q_K$. Ἀφοῦ ὁ ἀριθμός τῶν καταστάσεων εἶναι K, ἀπό τήν ἀρχή τοῦ περιστερώνα ὑπάρχουν καταστάσεις q_i καί q_j πού ταυτίζονται, δηλ. $q_i = q_j$. Ἔστω $x = s_1 \cdots s_i$, $y = s_{i+1} \cdots s_j$ καί $z = s_{j+1} \cdots s_\ell$. Προφανῶς, ἀντίγραφα τοῦ y μποροῦν νά ἀντληθοῦν ("προστεθοῦν") ὁποιοδήποτε ἀριθμό ἀπό φορές. Δηλ., ἡ λέξη $xy^n z \in L$ γιά κάθε $n \geq 0$.

- Προσέξτε ὅτι $|xy| = j \leq K$, ἀφοῦ τό s_j εἶναι κάποιο ἀπό τά σύμβολα $s_1, s_2, \dots, s_K$
- Ἐπίσης, $y \neq e$ ἀφοῦ ἡ ἀκολουθία $q_i, \dots, q_j$ εἶναι ἕνας "μή τετριμμένος" κύκλος

ΑΣΚΗΣΗ 5

[a] Ἔστω, γιὰ νὰ φθάσουμε σὲ ἀντίφαση, ὅτι ἡ $L_1 = \{ ww^R : w \in \{a,b\}^* \}$ εἶναι κανονική. Ἀφοῦ τὸ σύνολο τῶν κανονικῶν γλωσσῶν εἶναι κλειστὸ κάτω ἀπὸ τὴν πράξη τῆς τομῆς, τότε καὶ ἡ γλῶσσα
$$L_1 \cap L(((a^*b)(ba^*))) = \{ a^n b b a^n : n \geq 0 \} = L_1'$$
θὰ εἶναι κανονική.

Ἀφοῦ ἡ τελευταία γλῶσσα εἶναι ἄπειρη, ἰσχύει ἡ προϋπόθεση τοῦ θ. Ἀντλήσεως γιὰ κανονικὲς γλῶσσες, καὶ ἑπομένως κάθε λέξη $a^N bba^N$ τέτοια ὥστε $2N+2 \geq K$ μπορεῖ νὰ γραφεῖ σὰν xyz ὅπου $|xy| \leq K$ γιὰ κάποιο ἀκέραιο K, $y \neq e$ καὶ $xy^m z \in L_1'$ γιὰ κάθε $m \geq 0$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $y = a^\ell$ γιὰ κάποιο $\ell > 0$. Τότε ἡ λέξη xy^2z θὰ ἔχει περισσότερα a στὴ μιὰ πλευρὰ ἀπὸ τὶς (A), (B)
$$\underbrace{a^N}_{(A)} b b \underbrace{a^N}_{(B)}$$
ἀπὸ ὅτι στὴν ἄλλη πλευρά. Ἀντίφαση.

(ii) y περιέχει κάποιο b. Τότε ἡ λέξη xy^2z περιέχει περισσότερα ἀπὸ δύο b. Ἀντίφαση.

[β] Ἔστω, γιά νά φθάσουμε σέ ἀντίφαση, ὅτι ἡ $L_2 = \{ ww : w \in \{a,b\}^* \}$ εἶναι κανονική.

Ἀφοῦ τό σύνολο τῶν κανονικῶν γλωσσῶν εἶναι κλειστό κάτω ἀπό τήν πράξη τῆς τομῆς, τότε ἡ γλῶσσα $L_2' = L_2 \cap L(((a^*b)(a^*b)))$

$$= \{ a^n b a^n b : n \geq 0 \}$$

εἶναι ἐπίσης κανονική.

Μέ ἀνάλογα ἐπιχειρήματα ὅπως στό [α], καταλήγουμε σέ ἀντίφαση.

Ἡ λύση τῆς ΑΣΚΗΣΗΣ 1 παραλείπεται.