Λύσεις 5ης Σειράς Ασκήσεων

1. **(25 + 25 = 50 μονάδες)** Το πρόβλημα αυτό αφορά τις **μηχανές απαρίθμησης** και τις αντίστοιχες **απαριθμήσιμες γλώσσες**.

   (α) Ορίζουμε τη γλώσσα L_1 ως το σύνολο κωδικοποιήσεων μηχανών Turing το οποίο ικανοποιεί τις εξής δύο συνθήκες:

   - Για κάθε κωδικοποίηση $\rho(M) \in L_1$, η μηχανή Turing M είναι ολική.
   - Για κάθε αναδρομική γλώσσα L, υπάρχει κωδικοποίηση $\rho(M) \in L_1$ τέτοια ώστε $L = \mathsf{L}(M)$.

   Χρησιμοποιείστε την τεχνική της διαγωνιοποίησης για να δείξετε ότι η γλώσσα L_1 δεν είναι απαριθμήσιμη.

   Λύση. Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η γλώσσα L_1 είναι απαριθμήσιμη. Έτσι, υπάρχει μηχανή απαρίθμησης E_1 η οποία απαριθμεί την γλώσσα L_1. Συμβολίζουμε ως $\rho(M_0), \rho(M_1), \rho(M_2), \ldots$ την αντίστοιχη απαρίθμηση της γλώσσας L_1.

   Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing M με το εξής πρόγραμμα:

   > "Πάνω σε είσοδο w, προσομοίωσε την μηχανή απαρίθμησης E_1. Οταν η μηχανή E_1 καταγράψει την κωδικοποίηση $\rho\left(M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}\right)$ στην ταινία εξόδου της, τότε προσομοίωσε την μηχανή $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ πάνω στην είσοδο w. Αν η μηχανή $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ (τερματίσει και) αποδεχθεί τη λέξη w, τότε τερμάτισε και απόρριψε. Αν η μηχανή $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ (τερματίσει και) απορρίψει τη λέξη w, τότε τερμάτισε και αποδέξου."

   Από την πρώτη συνθήκη, έπεται ότι για κάθε λέξη x, η (αριθμημένη κατά την απαρίθμηση) μηχανή $M_{\mathsf{bin}^{-1}(x)}$ είναι ολική. Από το πρόγραμμα της μηχανής M_0, αυτό συνεπάγεται ότι η μηχανή M_0 είναι επίσης ολική.

   Από το πρόγραμμα της μηχανής M_0, έχουμε ότι για αυθαίρετη είσοδο w, η (αριθμημένη κατά την απαρίθμηση) μηχανή $M_{\mathsf{bin}^{-1}(x)}$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη w αν και μόνο αν η μηχανή M_0 τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη w. Έπεται ότι για κάθε είσοδο w, $\mathsf{L}(M_0) \neq \mathsf{L}\left(M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}\right)$. Έπεται ότι δεν υπάρχει κωδικοποίηση $\rho(M) \in L_1$ τέτοια ώστε $\mathsf{L}(M_0) = \mathsf{L}(M)$.

   Αφού η μηχανή M_0 είναι ολική, η γλώσσα $\mathsf{L}(M_0)$ είναι αναδρομική. Από τη δεύτερη συνθήκη, έπεται ότι υπάρχει κωδικοποίηση $\rho(M) \in L_1$ τέτοια ώστε $\mathsf{L}(M_0) = \mathsf{L}(M)$. Αντίφαση.

   (β) Ορίζουμε τη γλώσσα L_2 ως το σύνολο κωδικοποιήσεων μηχανών Turing το οποίο ικανοποιεί τις εξής δύο συνθήκες:

   - Για κάθε κωδικοποίηση $\rho(M) \in L_2$, η γλώσσα $\mathsf{L}(M)$ είναι αναδρομική.
   - Για κάθε αναδρομική γλώσσα L, υπάρχει κωδικοποίηση $\rho(M) \in L_2$ τέτοια ώστε $L = \mathsf{L}(M)$.

Αποδείξτε ότι η γλώσσα L_2 είναι απαριθμήσιμη.

Λύση: Έστω αυθαίρετη απαρίθμηση $\rho(M_0), \rho(M_1), \rho(M_2, \ldots$ των κωδικοποιήσεων των μηχανών Turing. Θα κατασκευάζουμε μηχανή απαρίθμησης E_2 η οποία, όπως θα δείξουμε, απαριθμεί τη γλώσσα L_2. Το πρόγραμμα της μηχανής E_2 έχει ως εξής:

> "Για κάθε κωδικοποίηση $\rho(M_i$, τροποποίησε το πρόγραμμα της μηχανής Turing M_i ώστε να λάβεις την μηχανή Turing $\widehat{M_i}$ με το εξής πρόγραμμα:
>
> > "Πάνω σε είσοδο w, προσομοίωσε με τη μέθοδο της ουράς του περιστεριού την μηχανή M_i πάνω σε όλες τις εισόδους $\mathsf{bin}(0), \mathsf{bin}(1), \ldots, w$. Αν όλες οι προσομοιώσεις τερματίσουν και η μηχανή M_i (τερματίσει και) αποδεχθεί τη λέξη w, τότε τερμάτισε και αποδέξου."
>
> Κατάγραψε την κωδικοποίηση $\rho(\widehat{M_i})$ στην ταινία εξόδου.

Θα δείξουμε τώρα ότι η μηχανή απαρίθμησης E_2 απαριθμεί την γλώσσα L_2. Προς τούτο, θα δείξουμε ότι το σύνολο των κωδικοποιήσεων μηχανών Turing που καταγράφονται από την μηχανή E_2 στην ταινία εξόδου της ικανοποιούν τις δύο συνθήκες που ορίζουν την γλώσσα L_2.

- *Πρώτη συνθήκη:* Θεωρούμε κωδικοποίηση $\rho(\widehat{M_i})$ η οποία καταγράφεται από την μηχανή E_2 στην ταινία εξόδου της. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
  - Η μηχανή M_i είναι ολική. Τότε, από το πρόγραμμα της μηχανής $\widehat{M_i}$, για κάθε είσοδο w, η μηχανή $\widehat{M_i}$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη w αν και μόνο αν η μηχανή M_i τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη w. Έπεται ότι $\mathsf{L}(\widehat{M_i}) = \mathsf{L}(M_i)$. Αφού η μηχανή M_i είναι ολική, η γλώσσα $\mathsf{L}(M_i)$ είναι αναδρομική. Έπεται ότι η γλώσσα $\mathsf{L}(\widehat{M_i})$ είναι αναδρομική.
  - Η μηχανή M_i δεν είναι ολική. Τότε, υπάρχει βραχυτάτη λέξη w πάνω στην οποία η μηχανή M_i δεν τερματίζει. Από το πρόγραμμα της μηχανής $\widehat{M_i}$, αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε λέξη x με $\mathsf{bin}^{-1}(x) \geq \mathsf{bin}^{-1}(w)$, η μηχανή $\widehat{M_i}$ δεν τερματίζει και αποδέχεται την είσοδό της x. Έπεται ότι η γλώσσα $\mathsf{L}(\widehat{M_i})$ είναι πεπερασμένη, άρα και αναδρομική.

  Σε κάθε περίπτωση, η γλώσσα $\mathsf{L}(\widehat{M_i})$ είναι αναδρομική, όπως χρειάζεται.
- *Δεύτερη συνθήκη:* Θεωρούμε αναδρομική γλώσσα L. Τότε, υπάρχει ολική μηχανή Turing M_i τέτοια ώστε $L = \mathsf{L}(M_i)$. Τότε, από το πρόγραμμα της μηχανής $\widehat{M_i}$, για κάθε είσοδο w, η μηχανή $\widehat{M_i}$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη w αν και μόνο αν η μηχανή M_i τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη w. Έπεται ότι $\mathsf{L}(\widehat{M_i}) = \mathsf{L}(M_i)$. Αφού $L = \mathsf{L}(M_i)$, έπεται ότι $L = \mathsf{L}(\widehat{M_i})$, όπως χρειάζεται.

2. **(10 μονάδες)** Θεωρούμε τη γλώσσα

$$L_3 \;\; = \;\; \{a^i b^{2i} a^{2i} b^i \mid i \geq 0\} .$$

Περιγράψτε (με όση μεγαλύτερη ακρίβεια μπορείτε) αυτόματο με δύο στοίβες M τέτοιο ώστε $L_3 = \mathsf{L}(M)$.

Λύση. Το αυτόματο με στοίβας M έχει το εξής πρόγραμμα:

- $\boxed{1}$ Διαβάζουμε πρώτα την πρώτη σειρά των a και την αντιγράφουμε και στις δύο στοίβες. (Έτσι, θα έχουμε τη λέξη a^i για κάποιο $i \geq 0$ σε καθεμιά από τις δύο στοίβες.)
- $\boxed{2}$ Μη ντετερμινιστικά, αλλάζουμε κατάσταση.

- $\boxed{3}$ Διαβάζουμε τη δεύτερη σειρά των b και για κάθε δύο b που διαβάζουμε, σβήνουμε ένα a από την πρώτη στοίβα. (Στη σωστή περίπτωση, η πρώτη στοίβα θα έχει αδειάσει.)
- $\boxed{4}$ Μη ντετερμινιστικά, αλλάζουμε κατάσταση.
- $\boxed{5}$ Διαβάζουμε την δεύτερη σειρά των a και για κάθε δύο a που διαβάζουμε, γράφουμε ένα a στην πρώτη στοίβα. (Στη σωστή περίπτωση, θα έχουμε τη λέξη a^i σε καθεμιά από τις δύο στοίβες.)
- $\boxed{6}$ Μη ντετερμινιστικά, αλλάζουμε κατάσταση.
- $\boxed{7}$ Διαβάζουμε την δεύτερη σειρά των b και για κάθε ένα b που διαβάζουμε, σβήνουμε ταυτόχρονα ένα a από κάθε στοίβα. (Στη σωστή περίπτωση, οι δύο στοίβες θα έχουν αδειάσει.)
- $\boxed{8}$ Μη ντετερμινιστικά, μπαίνουμε στην τελική κατάσταση.

3. **(20 + 20 = 40 μονάδες)** Παρουσιάστε γενικές γραμματικές οι οποίες παράγουν τις γλώσσες:

(α)

$$L_4 \;=\; \{a^i b^{2i} c^i \mid i \geq 0\}\,.$$

Λύση. (Με τροποποίηση της γενικής γραμματικής στο Παράδειγμα 11.8 του βιβλίου.)
Πρώτη ομάδα κανόνων:

$$S \;\to\; aSBBC \mid \epsilon$$

Οι κανόνες αυτοί οδηγούν σε λέξεις της μορφής $a^n(BBC)^n$ όπου $n \geq 0$. (Συγκρίνετε τον κανόνα $S \to aSBBC$ με τον αντίστοιχο κανόνα $S \to aSBC$ στη γενική γραμματική για τη γλώσσα

$$L \;=\; \{a^i b^{2i} c^i \mid i \geq 0\}\,,$$

από το Παράδειγμα 11.8 του βιβλίου. Αυτός είναι ο μοναδικός κανόνας στον οποίο οι δύο γραμματικές διαφέρουν.)
Δεύτερη ομάδα κανόνων:

$$CB \;\to\; BC$$

Οι κανόνες αυτοί μετασχηματίζουν κάθε λέξη της μορφής $a^n(BBC)^n$ όπου $n \geq 0$ στη λέξη $a^n B^{2n} C^n$.
Τρίτη ομάδα κανόνων:

$$\begin{aligned} aB &\to ab \\ bB &\to bb \\ bC &\to cc \\ cC &\to cc \end{aligned}$$

Οι κανόνες αυτοί μετατρέπουν όλα τα B σε b και όλα τα C σε c.

(β)

$$L_5 = \{a^i b^i c^i a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}.$$

Λύση. (Με τροποποίηση της γενικής γραμματικής στο Παράδειγμα 11.8 του βιβλίου.)
<u>Πρώτη ομάδα κανόνων:</u>

$$S \rightarrow aBCSa\widehat{B}\widehat{C} \mid \epsilon$$

Οι κανόνες αυτοί οδηγούν σε λέξεις της μορφής $(aBC)^n(a\widehat{B}\widehat{C})^n$ όπου $n \geq 0$.
<u>Πρώτη και μισή ομάδα κανόνων:</u>

$$\begin{aligned} BCa &\rightarrow aBC \\ \widehat{B}\widehat{C}a &\rightarrow a\widehat{B}\widehat{C} \end{aligned}$$

Οι κανόνες αυτοί μετασχηματίζουν κάθε λέξη της μορφής $(aBC)^n(a\widehat{B}\widehat{C})^n$ όπου $n \geq 0$ στη λέξη $a^n(BC)^n a^n(\widehat{B}\widehat{C})^n$.
<u>Δεύτερη ομάδα κανόνων:</u>

$$CB \rightarrow BC$$

$$\widehat{C}\widehat{B} \rightarrow \widehat{B}\widehat{C}$$

Οι κανόνες αυτοί μετασχηματίζουν κάθε λέξη της μορφής $a^n(BC)^n a^n(\widehat{B}\widehat{C})^n$ όπου $n \geq 0$ στη λέξη $a^n B^n C^n a^n \widehat{B}^n \widehat{C}^n$.
<u>Τρίτη ομάδα κανόνων:</u>

$$\begin{aligned} aB &\rightarrow ab \\ bB &\rightarrow bb \\ bC &\rightarrow cc \\ cC &\rightarrow cc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\widehat{B} &\rightarrow ab \\ b\widehat{B} &\rightarrow bb \\ b\widehat{C} &\rightarrow cc \\ c\widehat{C} &\rightarrow cc \end{aligned}$$

Οι κανόνες αυτοί μετατρέπουν όλα τα B και $\widehat{B}$ σε b, και όλα τα C και $\widehat{C}$ σε c.