# Λύσεις 4ης Σειράς Ασκήσεων

1. **(10 μονάδες)** Περιγράψτε μία μηχανη Turing η οποία αποφασίζει τη γλώσσα

$$L_1 \;=\; \{a^n \mid \text{ ο } n \text{ είναι δύναμη του } 2\}\,.$$

**Λύση.** Η γλώσσα $L_1$ αποφασίζεται από τη μηχανή Turing με το εξής πρόγραμμα:

- $\boxed{1}$ Έλεγξε αν $n = 0$ (δηλαδή, αν $a^n = \epsilon$).
(Δηλαδή, έλεγξε ότι δεν υπάρχουν σύμβολα μεταξύ του αριστερού οριοθέτη [ και του δεξιού οριοθέτη ].)
Αν Ναι, απόρριψε.
- $\boxed{2}$ Έλεγξε αν $n = 1$ (δηλαδή, αν $a^n = a$).
(Δήλαδη, έλεγξε ότι μεταξύ του αριστερού οριοθέτη [ και του δεξιού οριοθέτη ] υπάρχει μόνο ένα σύμβολο $a$.)
Αν Ναι, τερμάτισε και αποδέξου.
- $\boxed{3}$ Έλεγξε αν η λέξη $a^n$ έχει περιττό μήκος. (Δηλαδή, έλεγξε αν η λέξη $a^n$ έχει μεσαίο σύμβολο.)
(Δηλαδή, σημάδεψε τα δύο σύμβολα δεξιά του αριστερού οριοθέτη [ και αριστερά του δεξιού οριοθέτη ]. Συνέχισε αναδρομικά να σημαδεύεις το υπόλοιπο της λέξης μέχρις ότου το υπόλοιπο της λέξης γίνει η κενή λέξη (ή το σύμβολο $a$).)
Αν Ναι, τερμάτισε και απόρριψε. (Αλλοιώς, υπάρχει μεσαίο σημείο.)
- $\boxed{4}$ Σβήσε όλα τα σύμβολα δεξιά από το μεσαίο σημείο. (Τότε, θα μείνει αποθηκευμένη στην ταινία εισόδου η λέξη $[a^{\frac{n}{2}}]$.)
- $\boxed{5}$ Πήγαινε στο βήμα $\boxed{2}$.

2. **(15 + 15 = 30 μονάδες)** Κατατάξτε καθεμιά από τις παρακάτω γλώσσες σαν **Α** (αναδρομική), **ΑΑ** (αναδρομικά αριθμήσιμη αλλά όχι αναδρομική), **ΣΑ** (συναναδρομικά αριθμήσιμη αλλά όχι αναδρομική) ή **Τ** (ούτε αναδρομικά αριθμήσιμη, ούτε συναναδρομικά αριθμήσιμη). Οι γλώσσες αυτές αναφέρονται σε ιδιότητες της μηχανής Turing $M$. Υπενθυμίζουμε ότι $\rho(M)$ και $\rho(q)$ συμβολίζουν κωδικοποιήσεις της μηχανής Turing $M$ και της κατάστασης $q$, αντίστοιχα. Αποδείξτε τις απαντήσεις σας.

(α)

$$L_2 \;=\; \{\langle \rho(M_1), \rho(M_2)\rangle \mid \mathsf{L}(M_1) = \mathsf{L}(M_2)\}\,.$$

**Λύση.** Θα χρησιμοποιήσουμε την γλώσσα της ολικότητας για τις μηχανές Turing

$$L \;=\; \{\rho(M) \mid L(M) = \Sigma^*\}\,.$$

Θεωρούμε γνωστό τυ γεγονός ότι η $L$ δεν είναι ούτε αναδρομικά αριθμήσιμη, ούτε συναναδρομικά αριθμήσιμη. (Δηλαδή, ούτε η $L$ ούτε η $\overline{L}$ δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη.) Θα δείξουμε ότι $L \leq_m L_2$. Από αυτό θα προκύψει ότι η $L_2$ δεν είναι ούτε αναδρομικά αριθμήσιμη, ούτε συναναδρομικά αριθμήσιμη.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \{\rho(M)\} \rightarrow \{\langle \rho(M_1), \rho(M_2)\rangle\}$, όπου $\rho(M)$, $\rho(M_1)$ και $\rho(M_2)$ είναι κωδικοποιήσεις μηχανών Turing. Για κάθε λέξη $\rho(M)$, $f(\rho(M)) = \langle \rho(M_1), \rho(M_2)\rangle$, όπου $\rho(M_1) = \rho(M)$ και $M_2$ ορίζεται ως η μηχανή Turing με το εξής πρόγραμμα:

> "Πάνω στην είσοδο $w$, τερμάτισε και αποδέξου."

Παρατηρούμε ότι $\mathsf{L}(M_1) = \mathsf{L}(M)$ και $\mathsf{L}(M_2) = \Sigma^*$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνάρτηση αναγωγής από την $L$ στην $L_2$.

Προφανώς, η συνάρτηση $f$ είναι αναδρομική. Θα δείξουμε τώρα το ικανό και το αναγκαίο στη δεύτερη συνθήκη του ορισμού της συνάρτησης αναγωγής για τη συνάρτηση $f$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \rho(M) \in L &\Leftrightarrow \mathsf{L}(M) = \Sigma^* \\ &\Leftrightarrow \mathsf{L}(M_1) = \mathsf{L}(M_2) \\ &\Leftrightarrow \langle \rho(M_1), \rho(M_2)\rangle \in L_2 \\ &\Leftrightarrow f(\rho(M)) \in L_2\,. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη ότι η $f$ είναι συνάρτηση αναγωγής από την $L$ στην $L_2$. Έτσι, $L \leq_m L_2$. Από την ιδιότητα συμμετρίας, αυτό ισοδυναμεί με $\overline{L} \leq_m \overline{L_2}$. Αφού ούτε η $L$ ούτε η $\overline{L}$ δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη, έπεται από την ιδιότητα της μη-αναδρομικής αριθμησιμότητας προς τα πάνω ότι ούτε η $L_2$ ούτε η $\overline{L_2}$ δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη. Δηλαδή, η $L_2$ δεν είναι ούτε αναδρομικά αριθμήσιμη, ούτε συναναδρομικά αριθμήσιμη.

(β)

$$L_3 \;=\; \{\langle \rho(M), \rho(q)\rangle \mid \text{υπάρχει λέξη που οδηγεί τη μηχανή } M \text{ στην κατάσταση } q\}\ .$$

**Λύση:** Η γλώσσα $L_3$ είναι **ΑΑ** (αναδρομικά αριθμήσιμη αλλά όχι συναναδρομικά αριθμήσιμη).

Θα δείξουμε πρώτα ότι η $L_3$ είναι αναδρομικά αριθμήσιμη. Θεωρούμε την μηχανή Turing $M_0$ με το εξής πρόγραμμα:

> "Πάνω στην είσοδο $w$, έλεγξε αν η $w$ έχει την μορφή $\langle \rho(M), \rho(q)\rangle$, για κάποιο ζεύγος μηχανής Turing $M$ και κατάστασης $q$. Αν όχι, τερμάτισε και απόρριψε. Αλλοιώς, χρησιμοποίησε την τεχνική της ουράς του περιστεριού για να προσομοιώσεις όλους τους υπολογισμούς της μηχανής $M$ πάνω σε όλες τις δυνατές εισόδους της. Μόλις διαπιστώσεις ότι η μηχανή $M$ οδηγήθηκε στην κατάσταση $q$ από κάποια είσοδό της, τερμάτισε και αποδέξου."

Η τεχνική της ουράς του περιστεριού εξασφαλίζει ότι για κάθε είσοδο $\langle \rho(M), \rho(q)\rangle$ για την οποία υπάρχει λέξη η οποία οδηγεί την μηχανή $M$ στην κατάσταση $q$, η προσομοίωση θα καταδείξει ότι αυτό συμβαίνει και η μηχανή $M_0$ θα τερματίσει και θα αποδεχθεί την είσοδο $\langle \rho(M), \rho(q)\rangle$. Έπεται ότι η γλώσσα $L_3$ είναι αναδρομικά αριθμήσιμη.

Θα δείξουμε τώρα ότι η $L_3$ δεν είναι συναναδρομικά αριθμήσιμη, δηλαδή ότι η $\overline{L_3}$ δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη. Από την ιδιότητα της μη-αναδρομικής αριθμησιμότητας προς τα πάνω, αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{K_0} \leq_m \overline{L_3}$. Από την ιδιότητα συμμετρίας, αυτό ισοδυναμεί με $K_0 \leq_m L_3$. Θα δείξουμε, επομένως, ότι υπάρχει αναδρομική συνάρτηση $f : \{\langle \rho(M), x\rangle\} \to \{\langle \rho(M'), \rho(q')\rangle\}$ τέτοια ώστε για κάθε λέξη $\langle \rho(M), x\rangle$, $\langle \rho(M), x\rangle \in K_0$ αν και μόνο αν $\langle \rho(M'), \rho(q')\rangle \in L_3$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f$ ως εξής: Για αυθαίρετη λέξη $\langle \rho(M), x\rangle$, $f(\langle \rho(M), x\rangle) = \langle \rho(M'), \rho(q')\rangle$, όπου $M'$ ορίζεται ως η μηχανή Turing με το εξής πρόγραμμα:

> "Πάνω στην είσοδο $w$, προσομοίωσε την μηχανή Turing $M$ πάνω στην είσοδο $x$ και ακολούθησε την προσομοίωση."

Ορίζουμε ως $q'$ την κατάσταση αποδοχής της μηχανής $M'$. Προφανώς, η συνάρτηση $f$ είναι αναδρομική.

Από την κατασκευή της κατάστασης $q'$, υπάρχει λέξη που οδηγεί τη μηχανή $M'$ στην κατάσταση $q'$ αν και μόνο αν υπάρχει λέξη $w$ πάνω στην οποία η μηχανή $M'$ τερματίζει και (την) αποδέχεται. Από το πρόγραμμα της $M'$, έπεται ότι για αυθαίρετη λέξη $w$, η μηχανή $M'$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη $w$ αν και μόνο αν η μηχανή $M$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη $x$. Συνολικά, έχουμε ότι υπάρχει λέξη που οδηγεί τη μηχανή $M'$ στην κατάσταση $q'$ αν και μόνο αν η μηχανή $M$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη $x$. Δηλαδή, $\langle \rho(M'), \rho(q')\rangle \in L_3$ αν και μόνο αν $\langle \rho(M), x\rangle \in K_0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη ότι η $f$ είναι συνάρτηση αναγωγής από την $K_0$ στην $L_3$. Έτσι, $K_0 \leq_m L_3$, και η $L_3$ δεν είναι συναναδρομικά αριθμήσιμη.

3. **($20 + 20 + 20 = 60$ μονάδες)** Θεωρούμε το υποσύνολο των μηχανών Turing (με μία ταινία εισόδου) για τις οποίες δεν επιτρέπεται να διαβάσουν ή να γράψουν οτιδήποτε στο μέρος της ταινίας πέρα από τη λέξη εισόδου. Υποθέστε, δηλαδή, ότι η λέξη εισόδου βρίσκεται εγκλεισμένη μέσα σε αριστερούς και δεξιούς οριοθέτες [ και ], και η μηχανή είναι περιορισμένη να μην κινείται ποτέ αριστερότερα από τον αριστερό οριοθέτη [ ή δεξιότερα από τον δεξιό οριοθέτη ]. Μπορεί, ωστόσο, να διαβάσει και να γράψει οτιδήποτε μεταξύ των δύο οριοθετών. Μια τέτοια μηχανή καλείται **γραμμικά φραγμένο αυτόματο**.

   (α) Αποδείξτε ότι υπάρχει αναδρομική γλώσσα η οποία δεν αποφασίζεται από κανένα γραμμικά φραγμένο αυτόματο.

   **Λύση.** **(Με την τεχνική της διαγωνιοποίησης.)** Έστω η συνάρτηση κωδικοποίησης $\rho : \mathcal{LBA} \to \{0,1\}^*$ των γραμμικά φραγμένων αυτομάτων στο δυαδικό αλφάβητο $\{0,1\}$. ($\mathcal{LBA}$ συμβολίζει το σύνολο των γραμμικά φραγμένων αυτομάτων.) Αυτή επάγει μία απαρίθμηση $M_0, M_1, M_2, \ldots$ του συνόλου των γραμμικά φραγμένων αυτομάτων, όπου $M_n$ είναι το γραμμικά φραγμένο αυτόματο με κωδικοποίηση την δυαδική παράσταση $\mathsf{bin}(n)$ του ακεραίου $n$.

   Κατασκευάζουμε μία (ολική) μηχανή Turing $M$ με το εξής πρόγραμμα:

   > "Πάνω σε είσοδο $w \in \{0,1\}^*$, προσομοίωσε το γραμμικά αυτόματο $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$ πάνω στην είσοδο $w$ για αριθμό βημάτων ίσο με $|Q| \cdot (|w| + 2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$. Αν η μηχανή $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ τερματίσει, τότε τερμάτισε και αποδέξου αν η μηχανή $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ απορρίψει, ή απόρριψε αν η μηχανή $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ δεχθεί. Αλλοιώς (δηλ., η μηχανή $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ δεν έχει τερματίσει), τερμάτισε και αποδέξου."

Προφανώς, η γλώσσα $\mathsf{L}(M)$ είναι αναδρομική (αφού η μηχανή Turing $M$ είναι ολική). Παρατηρούμε ότι:

**Πρόταση 1.** *Για κάθε λέξη $w \in \{0,1\}^*$, $w \in \mathsf{L}\left(M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}\right)$ αν και μόνο αν $w \notin \mathsf{L}(M)$.*

**Απόδειξη.** Έστω καταρχήν ότι $w \in \mathsf{L}\left(M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}\right)$. Δηλαδή, το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ τερματίζει και αποδέχεται την είσοδο $w$. Αφού $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$ είναι ο αριθμός των δυνατών διατάξεων της μηχανής $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ πάνω στην είσοδο $w$, έπεται ότι το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ τερματίζει και αποδέχεται την είσοδο $w$ εντός $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$ βημάτων. Από το πρόγραμμα της μηχανής Turing $M'$, αυτό συνεπάγεται ότι η μηχανή $M$ τερματίζει και απορρίπτει τη λέξη $w$. Έτσι, $w \notin \mathsf{L}(M)$.

Έστω τώρα ότι $w \notin \mathsf{L}\left(M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}\right)$. Τότε, υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ τερματίζει και απορρίπτει τη λέξη $w$.

  Αφού $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$ είναι ο αριθμός των δυνατών διατάξεων της μηχανής $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ πάνω στην είσοδο $w$, έπεται ότι το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ τερματίζει και απορρίπτει την είσοδο $w$ εντός $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$ βημάτων. Τότε, από το πρόγραμμα της μηχανής Turing $M$, έπεται ότι η μηχανή $M$ τερματίζει και αποδέχεται την είσοδο $w$.
- Το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ δεν τερματίζει πάνω στη λέξη $w$.

  Προφανώς, το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}$ δεν τερματίζει πάνω στην είσοδο $w$ εντός $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$ βημάτων. Τότε, από το πρόγραμμα της μηχανής Turing $M$, έπεται ότι η μηχανή $M$ τερματίζει και αποδέχεται την είσοδο $w$.

Συνολικά, έχουμε ότι $w \in \mathsf{L}(M)$.

Η ζητουμένη ισοδυναμία έπεται. □

Η Πρόταση 1 συνεπάγεται ότι για κάθε λέξη $w \in \{0,1\}^*$, $\mathsf{L}\left(M_{\mathsf{bin}^{-1}(w)}\right) \neq \mathsf{L}(M)$. Έπεται ότι η γλώσσα $\mathsf{L}(M)$ δεν αποφασίζεται από κανένα γραμμικά φραγμένο αυτόματο.

(β) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα του τερματισμού για γραμμικά φραγμένα αυτόματα είναι αλγοριθμικά επιλύσιμο. Δείξτε, δηλαδή, την αναδρομικότητα της γλώσσας

$$L_4 \;=\; \{\langle \rho(M), w\rangle \mid \text{το γραμμικά φραγμένο αυτόματο } M \text{ δέχεται τη λέξη } w\}\ .$$

**Λύση.** Κατασκευάζουμε μία (ολική) μηχανή Turing $M_0$ με το εξής πρόγραμμα:

> "Πάνω στην είσοδο $\langle \rho(M), w\rangle$, προσομοίωσε το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$, πάνω στην είσοδο $w$ για αριθμό βημάτων ίσο με $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$. Αν το αυτόματο $M$ τερματίσει και αποδεχθεί τη λέξη $w$, τότε τερμάτισε και αποδέξου. Αλλοιώς, τερμάτισε και απόρριψε."

Προφανώς, η γλώσσα $\mathsf{L}(M_0)$ είναι αναδρομική (αφού η μηχανή Turing $M$ είναι ολική). Παρατηρούμε ότι:

**Πρόταση 1.** *Για κάθε λέξη $\langle \rho(M), w\rangle$ με $\rho(M), w \in \{0,1\}^*$, $\langle \rho(M), w\rangle \in L_4$ αν και μόνο αν $w \in \mathsf{L}(M_0)$.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε αυθαίρετη λέξη $\langle \rho(M), w\rangle$ με $\rho(M), w \in \{0,1\}^*$. Έστω καταρχήν ότι $w \in \mathsf{L}(M)$. Από τον ορισμό της γλώσσας $L_4$, το γραμμικά φραγμένο αυτόματο

$M$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη $w$. Αφού $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$ είναι ο αριθμός των δυνατών διατάξεων της μηχανής $M$ πάνω στην είσοδο $w$, έπεται ότι το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M$ τερματίζει και απορρίπτει την είσοδο $w$ εντός $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$ βημάτων. Τότε, από το πρόγραμμα της μηχανής Turing $M_0$, έπεται ότι η μηχανή $M_0$ τερματίζει και αποδέχεται την είσοδο $w$. Έτσι, $w \in \mathsf{L}(M_0)$.

Έστω τώρα ότι $\langle \rho(M), w \rangle \notin L_4$. Τότε, υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M$ τερματίζει και απορρίπτει τη λέξη $w$.
  Αφού $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$ είναι ο αριθμός των δυνατών διατάξεων της μηχανής $M$ πάνω στην είσοδο $w$, έπεται ότι το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M$ τερματίζει και απορρίπτει την είσοδο $w$ εντός $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$ βημάτων. Τότε, από το πρόγραμμα της μηχανής Turing $M_0$, έπεται ότι η μηχανή $M_0$ τερματίζει και απορρίπτει την είσοδο $w$.
- Το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M$ δεν τερματίζει πάνω στη λέξη $w$.
  Προφανώς, το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M$ δεν τερματίζει τότε πάνω στην είσοδο $w$ εντός $|Q| \cdot (|w|+2) \cdot |\Sigma|^{|w|}$ βημάτων. Τότε, από το πρόγραμμα της μηχανής Turing $M_0$, έπεται ότι η μηχανή $M$ τερματίζει και απορρίπτει την είσοδο $w$.

Συνολικά έχουμε ότι $w \notin \mathsf{L}(M_0)$.

Η ζητουμένη ισοδυναμία έπεται. □

Αφού η γλώσσα $\mathsf{L}(M_0)$ είναι αναδρομική, η Πρόταση 1 συνεπάγεται ότι η γλώσσα $L_4$ είναι επίσης αναδρομική, όπως χρειάζεται.

(γ) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα της κενότητας για γραμμικά φραγμένα αυτόματα *δεν* είναι αλγοριθμικά επιλύσιμο. Δείξτε, δηλαδή, την μη αναδρομικότητα της γλώσσας

$$L_5 \;=\; \{\rho(M) \mid \text{το γραμμικά φραγμένο αυτόματο } M \text{ έχει } \mathsf{L}(M) = \emptyset\}\ .$$

**Λύση.** Θα δείξουμε ότι η γλώσσα $L_5$ δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη. Από την ιδιότητα της μη-αναδρομικής αριθμησιμότητας προς τα πάνω, αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{K_0} \leq_m L_5$. Από την ιδιότητα συμμετρίας, αυτό ισοδυναμεί με $K_0 \leq_m \overline{L_5}$. Θα δείξουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει αναδρομική συνάρτηση $f : \{\langle \rho(M), x \rangle\}\{\rho(M')\}$ τέτοια ώστε $\langle \rho(M), x \rangle \in K_0$ αν και μόνο αν $\rho(M') \in \overline{L_5}$.

Ορίζουμε την ζητούμενη συνάρτηση αναγωγής ως εξής: Για αυθαίρετη λέξη $\langle \rho(M), x \rangle$, $f(\langle \rho(M), x \rangle) = \rho(M')$, όπου $M'$ ορίζεται ως η μηχανή Turing με το εξής πρόγραμμα:

> "Πάνω στην είσοδο $w$, αν $|w| < |x|$, τότε τότε τερμάτισε και απόορριψε. Αλλοιώς (δηλαδή, όταν $|w| \geq |x|$), προσομοίωσε την $M$ πάνω στην είσοδο $x$. Αν (κατά την προσομοίωση) η κεφαλή ανάγνωσης thw $M'$ φτάσει στον δεξιό οριοθέτη ] (δηλαδή, ξεπεράσει το τμήμα της ταινίας εισόδου όπου είναι αρχικά αποθηκευμένη η είσοδος $w$), τότε τερμάτισε και απόρριψε. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, ακολούθησε την προσομοίωση."

(Προσέξτε ότι από την κατασκευή της, η μηχανή Turing $M'$ είναι ένα γραμμικά φραγμένο αυτόματο.) Προφανώς, η συνάρτηση $f$ είναι αναδρομική. Θα δείξουμε τώρα το ικανό και το αναγκαίο στη δεύτερη συνθήκη του ορισμού της συνάρτησης αναγωγής για την συνάρτηση $f$.

Έστω καταρχήν ότι $\langle \rho(M), x \rangle \in K_0$. Δηλαδή, η μηχανή Turing $M$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη $x$. Τότε, υπάρχει πεπερασμένος αριθμός τετραγώνων ταινίας $\mathsf{T}(\langle M, x \rangle)$ τα οποία χρησιμοποιούνται κατά τον υπολογισμό της μηχανής $M$ πάνω στη λέξη $x$. Προφανώς, $\mathsf{T}(\langle M, x\rangle) \geq |x|$. Θεωρούμε αυθαίρετη λέξη εισόδου $w$ με μήκος $|w| \geq \mathsf{T}(\langle M, x\rangle)$. Έπεται ότι $|w| \geq |x|$. Από το πρόγραμμα της μηχανής $M'$, έπεται ότι η $M'$, πάνω στην είσοδο $w$, προσομοιώνει την μηχανή $M$ πάνω στην είσοδο $x$. Αφού $|w| \geq \mathsf{T}(\langle M, x\rangle)$, η μηχανή $M'$ δεν θα ξεπεράσει το τμήμα της ταινίας εισόδου της όπου είναι αρχικά αποθηκευμένη η λέξη $w$. Έπεται ότι η μηχανή $M'$ θα ακολουθήσει την προσομοίωση της μηχανής $M$ πάνω στην είσοδο $x$. Αφού η $M$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη $x$, έπεται ότι η $M'$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη $w$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathsf{L}(M') \neq \emptyset$. Από τον ορισμό της $L_5$, έπεται ότι $\rho(M') \in \overline{L_5}$, όπως χρειάζεται.

Έστω τώρα ότι $\langle \rho(M), x\rangle \in K_0$. Δηλαδή, η μηχανή Turing $M$ δεν τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη $x$. Θεωρούμε αυθαίρετη είσοδο $w$ για τη μηχανή $M'$. Από το πρόγραμμα της $M'$, έχουμε ότι η μηχανή $M'$ τερματίζει και αποδέχεται την είσοδο $w$ μόνο αν η μηχανή $M$ τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη $x$. Έπεται ότι το γραμμικά φραγμένο αυτόματο $M'$ δεν τερματίζει και αποδέχεται τη λέξη $w$. Αφού η λέξη $w$ επιλέχθηκε αυθαίρετα, έπεται ότι $\mathsf{L}(M') = \emptyset$. Από τον ορισμό της $L_5$, έπεται ότι $\rho(M') \notin \overline{L_5}$, όπως χρειάζεται.

Έχουμε δείξει συνολικά ότι $\langle \rho(M), x\rangle \in K_0$ αν και μόνο αν $\rho(M') \in \overline{L_5}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη ότι η $f$ είναι αυνάρτηση αναγωγής από την $K_0$ στην $\overline{L_5}$. Έτσι, $K_0 \leq_m \overline{L_5}$, και η $L_5$ δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη, άρα ούτε και αναδρομική.