4η Σειρά Ασκήσεων

- Παράδοση: 27 Νοεμβρίου 2008

1. **(10 μονάδες)** Περιγράψτε μία μηχανη Turing η οποία αποφασίζει τη γλώσσα
$$L_1 \;=\; \{a^n \mid \text{ ο } n \text{ είναι δύναμη του } 2\}\,.$$

2. **(15 + 15 = 30 μονάδες)** Κατατάξτε καθεμιά από τις παρακάτω γλώσσες σαν **Α** (αναδρομική), **ΑΑ** (αναδρομικά αριθμήσιμη αλλά όχι αναδρομική), **ΣΑ** (συναναδρομικά αριθμήσιμη αλλά όχι αναδρομική) ή **Τ** (ούτε αναδρομικά αριθμήσιμη, ούτε συναναδρομικά αριθμήσιμη). Οι γλώσσες αυτές αναφέρονται σε ιδιότητες μηχανές Turing M. Υπενθυμίζουμε ότι $\rho(M)$ και $\rho(q)$ συμβολίζουν κωδικοποιήσεις της μηχανής Turing M και της κατάστασης q, αντίστοιχα. Αποδείξτε τις απαντήσεις σας.

   (α)
$$L_2 \;=\; \{\langle \rho(M_1), \rho(M_2)\rangle \mid \mathsf{L}(M_1) = \mathsf{L}(M_2)\}\,.$$

   (β)
$$L_3 \;=\; \{\langle \rho(M), \rho(q)\rangle \mid \text{υπάρχει λέξη που οδηγεί τη μηχανή } M \text{ στην κατάσταση } q\}\;.$$

3. **(20 + 20 + 20 = 60 μονάδες)** Θεωρούμε το υποσύνολο των μηχανών Turing (με μία ταινία εισόδου) για τις οποίες δεν επιτρέπεται να διαβάσουν ή να γράψουν οτιδήποτε στο μέρος της ταινίας πέρα από τη λέξη εισόδου. Υποθέστε, δηλαδή, ότι η λέξη εισόδου βρίσκεται εγκλεισμένη μέσα σε αριστερούς και δεξιούς οριοθέτες [και], και η μηχανή είναι περιορισμένη να μην κινείται ποτέ αριστερότερα από τον αριστερό οριοθέτη [ή δεξιότερα από τον δεξιό οριοθέτη]. Μπορεί, ωστόσο, να διαβάσει και να γράψει οτιδήποτε μεταξύ των δύο οριοθετών. Μια τέτοια μηχανή καλείται **γραμμικά φραγμένο αυτόματο**.

   (α) Αποδείξτε ότι υπάρχει αναδρομική γλώσσα η οποία δεν αποφασίζεται από κανένα γραμμικά φραγμένο αυτόματο.

   (β) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα του τερματισμού για γραμμικά φραγμένα αυτόματα είναι αλγοριθμικά επιλύσιμο. Δείξτε, δηλαδή, την αναδρομικότητα της γλώσσας
$$L_4 \;=\; \{\langle \rho(M), \rho(w)\rangle \mid \text{το γραμμικά φραγμένο αυτόματο } M \text{ δέχεται τη λέξη } w\}\;.$$

   (γ) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα της κενότητας για γραμμικά φραγμένα αυτόματα *δεν* είναι αλγοριθμικά επιλύσιμο. Δείξτε, δηλαδή, την μη αναδρομικότητα της γλώσσας
$$L_5 \;=\; \{\rho(M) \mid \text{το γραμμικά φραγμένο αυτόματο } M \text{ έχει } \mathsf{L}(M) = \emptyset\}\;.$$