Θεωρία Υπολογισμού

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Σχολή Θετικών και Εφαρμοσμένων Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής

Θεωρία Υπολογισμού

ΜΑΡΙΟΣ ΜΑΥΡΟΝΙΚΟΛΑΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Πληροφορικής
Πανεπιστημίου Κύπρου

ΛΕΥΚΩΣΙΑ 2005

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Κεφάλαιο 1

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ανασκοπήσουμε τα βασικά και στοιχειώδη μαθηματικά αντικείμενα πάνω στα οποία είναι θεμελιωμένη η Θεωρία Υπολογισμού. Θα περιπλανηθούμε, επίσης, ανάμεσα σε διάφορες τεχνικές μαθηματικών αποδείξεων. Πιο συγκεκριμένα, στην Παράγραφο 1.1, θα εισαγάγουμε τα σύνολα, τη σημαντικότερη ίσως οντότητα πάνω στην οποία είναι κτισμένο το μαθηματικό σύμπαν. Οι σχέσεις και οι συναρτήσεις αποτελούν το αντικείμενο της Παραγράφου 1.2. Τα άπειρα και τα πεπερασμένα σύνολα διακρίνονται μεταξύ τους στην Παράγραφο 1.3. Οι μαθηματικές αποδείξεις και διάφοροι τύποι τους παρουσιάζονται στην Παράγραφο 1.4. Ειδικότερα, η διαγωνιοποίηση ως τεχνική μαθηματικών αποδείξεων περιγράφεται στην Παράγραφο 1.5. Ως μία δεύτερη τεχνική μαθηματικών αποδείξεων εισάγει η Παράγραφος 1.6 την Αρχή του Περιστερώνα. Τέλος, η Παράγραφος 1.7 ολοκληρώνει το κεφάλαιο παραθέτοντας βιβλιογραφικές και ιστορικές σημειώσεις.

1.1 ΣΥΝΟΛΑ

1.1.1 Βασικοί Ορισμοί

Η έννοια του συνόλου είναι πολύ γενική και θεμελιώδης για να μπορεί να οριστεί από άλλες απλούστερες. Πάντως, ο *Cantor,* δημιουργός της *Θεωρίας Συνόλων* γνωστής επίσης και ως *Συνολοθεωρίας* ή *Καντοροθεωρίας,* γράφει:

> Σύνολο είναι η συγκέντρωση σε μία ολότητα τελείως ορισμένων και τελείως διαχωρισμένων μεταξύ τους αντικειμένων της εμπειρίας ή της σκέψης μας.

Με άλλα λόγια, σύνολο είναι η μαθηματική έκφραση της συνηθισμένες έννοιας της συλλογής. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι σύνολο είναι μια αυθαίρετη συλλογή από αντικείμενα. Για παράδειγμα, η συλλογή των τεσσάρων αριθμών 11, 12, 21 και 22 είναι ένα σύνολο, το οποίο μπορούμε να ονομάσουμε A_1 και να γράψουμε

$$A_1 = \{11, 12, 21, 22\}.$$

Ως άλλα παραδείγματα, ας θεωρήσουμε το σύνολο των κατοίκων της Ελλάδας, το σύνολο των σημείων ενός κύκλου, και το σύνολο των ιδιοτήτων του ορθογωνίου τριγώνου.

Τα σύνολα μπορούν να περιέχουν οποιοδήποτε τύπο αντικειμένων, συμπεριλαμβανομένων αριθμών, συμβόλων ή ακόμη και άλλων συνόλων. Τα αντικείμενα που συμπεριλαμβάνονται σε ένα σύνολο καλούνται τα *στοιχεία* ή *μέλη* του συνόλου. Τα μαθηματικά σύμβολα $\in$ και $\notin$ συμβολίζουν την ιδιότητα μέλους και μη μέλους, αντίστοιχα, σε ένα σύνολο.* ´Ετσι, γράφουμε ότι $3 \in \mathcal{T}$ και $31 \notin \mathcal{T}$. Πάντοτε, τα στοιχεία που αποτελούν ένα σύνολο πρέπει να είναι μεταξύ τους διαφορετικά. Επιπρόσθετα, το σύνολο πρέπει να ορίζεται με τρόπο τελείως σαφή και ακριβή, ώστε για οποιαδήποτε αντικείμενα να είναι δυνατό χωρίς δισταγμό να κρίνουμε αν ανήκει στο σύνολο ή όχι. Γενικά, για αυθαίρετο σύνολο A και αυθαίρετο στοιχείο x, θα συμβαίνει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα δύο: $x \in A$ ή $x \notin A$. Τρίτη περίπτωση δεν υπάρχει.

Το σύνολο είναι κάτι το διαφορετικό από τα στοιχεία του. ´Ετσι, σύνολο με ένα μόνο στοιχείο έχει διαφορετική φύση από το αντικείμενο αυτό. ´Οταν ένα σύνολο έχει ένα μόνο στοιχείο, αυτό θα λέγεται *μονομελές,* αν έχει δύο θα λέγεται *διμελές,* κ.ο.κ.

Τα σύνολα μπορούν να παρασταθούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. ´Ενας τρόπος είναι η συστηματική καταγραφή όλων των στοιχείων του μέσα σε άγκιστρα, όπως είδαμε και πιο πάνω. ´Ετσι, για παράδειγμα, το σύνολο

$$B = \{3, 11, 22, 27, 199, 3112227199\}$$

περιέχει τα στοιχεία 3, 11, 22, 27, 199 και 3112227199. ´Ενας άλλος τρόπος παράστασης συνόλων είναι με χρήση ενός *κατηγορήματος* το οποίο διατυπώνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τα στοιχεία του συνόλου. ´Ετσι, το κατηγόρημα ενός συνόλου κωδικοποιεί μία χαρακτηριστική ιδιότητα η οποία διακρίνει τα στοιχεία του συνόλου από όλα τα άλλα.

*Σε κλασικά συγγράμματα της Ελληνικής Μαθηματικής βιβλιογραφίας, το σύμβολο $\in$ αναφέρεται ως το σύμβολο του *ανήκειν*. Το διεθνές πλέον σύμβολο $\in$ προκύπτει από το πρώτο γράμμα της Ελληνικής λέξης έστιν.

Η παράσταση κατηγορήματος αποτελεί προφανώς ένα έμμεσο τρόπο παράστασης του συνόλου αφού δεν καταγράφει τα στοιχεία του ένα προς ένα, αλλά προσφέρει συνθήκες οι οποίες ικανοποιούνται από όλα τα στοιχεία του και μόνον αυτά. Η παράσταση κατηγορήματος είναι λοιπόν ιδιαίτερα χρήσιμη για την παράσταση συνόλων με πάρα πολλά στοιχεία. Έτσι, έχουμε, για παράδειγμα, το σύνολο

$$A_2 = \{x \mid \text{ο } x \text{ είναι θετικός ακέραιος με δεκαδική παράσταση δύο ψηφίων από τα 1 και 2}\}.$$

Το A_2 είναι ακριβώς το ίδιο σύνολο με το A_1 αφού όλοι (και οι μόνοι) θετικοί ακέραιοι που ικανοποιούν το κατηγόρημά του είναι οι 11, 12, 21 και 22. Μία μέσω κατηγορήματος παράσταση ενός συνόλου καλείται *κατηγορηματική παράσταση* του συνόλου.

1.1.2 Πράξεις Πάνω σε Σύνολα

Πάνω σε ένα σύνολο, μπορούμε να κάνουμε πράξεις. Συγκεκριμένα, μία *πράξη* $\circ$ πάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{U}$ παίρνει σαν *είσοδο* μια ακολουθία από στοιχεία του συνόλου $\mathcal{U}$ και επιστρέφει ως *έξοδο* κάποιο στοιχείο, το οποίο είναι (συνήθως) μονοσήμαντα ορισμένο. *Μονομερής* καλείται η πράξη εκείνη που η είσοδός της περιλαμβάνει ένα μόνο στοιχείο. Αντίστοιχα, *διμερής* καλείται η πράξη που η είσοδός της περιλαμβάνει δύο στοιχεία. Γενικότερα, για οποιοδήποτε ακέραιο $n \geq 1$, *n-μερής* καλείται η πράξη που η είσοδός της περιλαμβάνει n στοιχεία από το σύνολο $\mathcal{U}$. Η έξοδος δυνατό να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο $\mathcal{U}$. Αν η έξοδος της πράξης $\circ$ ανήκει πάντοτε (δηλαδή, για κάθε είσοδο) στο σύνολο $\mathcal{U}$, τότε λέμε ότι το σύνολο $\mathcal{U}$ είναι *κλειστό* κάτω από την πράξη $\circ$. (Θα επιχειρήσουμε μια περισσότερο τυπική προσέγγιση στην έννοια της πράξης όταν θα μιλήσουμε αργότερα για συναρτήσεις και σχέσεις. Αυτό θα γίνει στην Παράγραφο 1.2.) Η Παράγραφος 1.1.4 θα μας ξεναγήσει σύντομα ανάμεσα σε ορισμένες βασικές πράξεις πάνω σε σύνολα.

1.1.3 Υποσύνολα, Κενό Σύνολο, Συμπλήρωμα και Δυναμοσύνολο

Για οποιαδήποτε δύο σύνολα A και B, λέμε ότι το σύνολο A είναι *υποσύνολο* του συνόλου B, και γράφουμε τότε $A \subseteq B$, αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B.[†] Λέμε τότε επίσης ότι το σύνολο A *περιέχεται* ή *εγκλείεται* στο σύνολο B. Ο εγκλεισμός υπακούει στις ακόλουθες τρεις απλές ιδιότητες:

[†]Σε κλασικά συγγράμματα της Ελληνικής Μαθηματικής βιβλιογραφίας, το σύμβολο $\subseteq$ αναφέρεται ως το σύμβολο του *περιέχεσθαι*. Επίσης, το υποσύνολο αναφέρεται συχνά και ως *μερικόν σύνολον*.

1. (*Ανακλαστική ιδιότητα*) Για αυθαίρετο σύνολο A, $A \subseteq A$.

2. (*Αντισυμμετρική ιδιότητα*) Για αυθαίρετα σύνολα A και B, αν είναι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε θα είναι και $A = B$.

3. (*Μεταβατική ιδιότητα*) Για αυθαίρετα σύνολα A, B και C, αν είναι $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$, τότε θα είναι και $A \subseteq C$.

Λέμε ότι το A είναι *γνήσιο υποσύνολο* του B αν το A είναι υποσύνολο του B και διάφορο από το B. Γράφουμε τότε $A \subset B$. Προφανώς, υπάρχει τότε κάποιο στοιχείο $x \in A$ τέτοιο ώστε $x \notin B$. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το σύνολο των παιδιών που μένουν στην Ελλάδα. Αυτό είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των ανθρώπων που μένουν στην Ελλάδα. Ακόμη, το σύνολο των ορθογωνίων τριγώνων είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των τριγώνων.

Τα σύνολα A και B είναι *συγκρίσιμα* αν είτε $A \subseteq B$ είτε $B \subseteq A$. Τα σύνολα A και B είναι ίσα αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα A και B είναι ίσα, μπορούμε να δείξουμε ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Τοτε, κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A, και αντίστροφα. Αυτό συνεπάγεται προφανώς την ισότητα των δύο συνόλων.

Το σύνολο που δεν περιέχει καθόλου στοιχεία καλείται *κενό σύνολο* και συμβολίζεται ως $\emptyset$, ή λιγότερο συχνά ως $\{\}$. Για παράδειγμα, κενό σύνολο είναι (από όσο γνωρίζουμε) το σύνολο των ανθρώπων που έχουν ύψος μεγαλύτερο από 3 μέτρα. Επίσης, κενό σύνολο είναι το σύνολο των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x^2|3 = 0$. Παραδεχόμαστε ότι υπάρχει ένα μόνο κενό σύνολο. Προσέξτε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου. ´Ετσι, κάθε σύνολο που δεν είναι το κενό σύνολο έχει τουλάχιστον δύο υποσύνολα: τον εαυτό του και το κενό σύνολο.

Για ένα οποιοδήποτε σύνολο A, το *συμπλήρωμά* του A είναι το σύνολο $\overline{A}$ το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στο A. Φυσικά, ο ορισμός αυτός έχει νόημα όποτε εννοούμε κάποιο *καθολικό* σύνολο $\mathcal{U}$ το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία που θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε.[‡] Τότε, γράφουμε

$$\overline{A} \;=\; \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}\,.$$

Προφανώς, το σύνολο $\overline{A}$ είναι το συμπλήρωμα του συνόλου A τότε και μόνο τότε όταν το σύνολο A είναι το συμπλήρωμα του συνόλου $\overline{A}$. Τα σύνολα A και $\overline{A}$ καλούνται *συμπληρωματικά σύνολα*. Για παράδειγμα, αν A είναι το σύνολο των γραμμάτων του Ελληνικού αλφαβήτου και B είναι το σύνολο των φωνηέντων, τότε $\overline{B}$ (ως προς το σύνολο A) είναι το σύνολο των συμφώνων.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη *συμπλήρωση* ως μία *μονομερή πράξη* πάνω στο σύνολο όλων των συνόλων, η οποία εκτελούμενη πάνω σε ένα αυθαίρετο σύνολο A δίδει ως αποτέλεσμα το συμπλήρωμά του $\overline{A}$. Μια άμεση ιδιότητα της πράξης της συμπλήρωσης είναι ότι για οποιοδήποτε σύνολο A, $\overline{\overline{A}} = A$. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή και ως *νόμος μηδενοδυναμίας του συμπληρώματος* ή *νόμος μηδενοδυναμίας για τη συμπλήρωση,* ή ακόμη και ως *ενελικτική ιδιότητα*.

Τα στοιχεία ενός συνόλου μπορούν να είναι τα ίδια σύνολα. Για παράδειγμα, για αυθαίρετο σύνολο A, το σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα δυνατά υποσύνολα του A καλείται *δυναμοσύνολο* του συνόλου A και συμβολίζεται ως $\mathcal{P}(A)$, ή ακόμη και ως 2^A. Ο τελευταίος συμβολισμός πηγάζει από το γεγονός ότι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου με $n \geq 0$ στοιχεία περιλαμβάνει 2^n στοιχεία. Για παράδειγμα, $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, ενώ $2^{\{a,b,c\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Μία *διαμέριση* ενός μη κενού συνόλου A είναι ένα υποσύνολο Π του δυναμοσυνόλου 2^A τέτοιο ώστε το κενό σύνολο $\emptyset$ δεν ανήκει στο σύνολο Π, ενώ κάθε στοιχείο του A ανήκει σε ακριβώς ένα στοιχείο του Π. Δηλαδή, το σύνολο $\Pi_A \subset 2^A$ είναι μία διαμέριση του συνόλου A αν ικανοποιούνται οι εξής τρεις συνθήκες:

1. $\emptyset \notin \Pi_A$

2. Τα μέλη του Π_A είναι ξένα μεταξύ τους.

3. Η ένωση των μελών του Π_A είναι το σύνολο A.

[‡]Σε κλασικά συγγράμματα της Ελληνικής Μαθηματικής βιβλιογραφίας, όπως, για παράδειγμα, το ιστορικό βιβλίο Λογισμού των Πιθανοτήτων που έγραψε ο Σπυρίδων Γ. Κανέλλος το 1952, το καθολικό σύνολο ανευρίσκεται ως *μέγιστον σύνολον,* ή *χώρος ερεύνης,* ή *σύνολον αναφοράς,* ή ακόμη και *κυρίαρχον σύνολον*. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα επιπεδομετρίας, σύνολο αναφοράς είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου. Σε ένα πρόβλημα που αναφέρεται σε φοιτητές του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, φυσικό είναι το σύνολο των φοιτητών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου να θεωρείται ως σύνολο αναφοράς.

1.1.4 Βασικές Πράξεις πάνω σε Σύνολα

Για οποιαδήποτε δύο σύνολα A και B, μπορούμε να σχηματίσουμε την *ένωση,* την *τομή* και τη *διαφορά* των συνόλων A και B ως

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \in B\},$$

και

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \notin B\},$$

αντίστοιχα. Παρατηρείστε ότι για οποιαδήποτε δύο σύνολα A και B, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, ενώ $\overline{A} = \mathcal{U} \setminus A$. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
\{1,2,3,4\} \cup \{2,4,6,7\} &= \{1,2,3,4,6,7\}, \\
\{1,2,3,4\} \cap \{2,4,6,7\} &= \{2,4\}, \\
\{1,2,3,4\} \setminus \{2,4,6,7\} &= \{1,3\}.
\end{aligned}$$

Παρατηρείστε επίσης ότι αν τα σύνολα A και B είναι ξένα, τότε $A \setminus B = A$ και φυσικά $B \setminus A = B$.

Για οποιαδήποτε δύο σύνολα A και B, οριζουμε τη *συμμετρική διαφορά* των συνόλων A και B, την οποία συμβολίζουμε ως $A \triangle B$, ως

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Με άλλα λόγια, η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα *ακριβώς* από τα δύο σύνολα. Για παράδειγμα,

$$\{1,2,3,4\} \triangle \{2,4,6,7\} = \{1,3,6,7\}.$$

Παρατηρείστε από τους ορισμούς των προηγουμένων πράξεων ότι για οποιαδήποτε δύο σύνολα A και B,

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

Η συμμετρική διαφορά ανευρίσκεται συχνά και ως *διαζευκτικό άθροισμα*.

Οι *νόμοι αντιμετάθεσης* ή όπως επίσης λέγονται *αντιμεταθετικοί νόμοι,* για την ένωση και την τομή παρατηρούν ότι για οποιαδήποτε σύνολα A και B $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$. Οι *νόμοι μηδενοδυναμίας* για την ένωση και την τομή παρατηρούν ότι για οποιοδήποτε σύνολο A, $A \cup A = A$ και $A \cap A = A$. Οι *προσεταιριστικοί νόμοι* για την ένωση και την τομή παρατηρούν ότι για οποιαδήποτε τρία σύνολα A, B και C, $\cup(B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ και $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, αντίστοιχα. Οι προσεταιριστικοί νόμοι και οι νόμοι αντιμετάθεσης για την ένωση και την τομή επιτρέπουν την επέκταση των πράξεων αυτών σε περισσότερα από δύο σύνολα με τρόπο ώστε το αποτέλεσμα της πράξης να είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Ισχύουν, επίσης, οι εξής νόμοι για την ένωση και την τομή οι οποίοι συσχετίζουν αυθαίρετο σύνολο A και το συμπλήρωμά του $\overline{A}$: $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ και $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Τα σύνολα A και B είναι *ξένα* αν δεν περιέχουν καθόλου κοινά στοιχεία. Με άλλα λόγια, τα σύνολα A και B είναι ξένα αν $A \cap B = \emptyset$.

Σημειώνουμε, τέλος, μερικές ιδιότητες αυθαίρετου συνόλου A σε σχέση με το καθολικό σύνολο $\mathcal{U}$ και το κενό σύνολο $\emptyset$. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ και $A \cap \emptyset = \emptyset$, και, επίσης, ότι $A \cup \emptyset = A$ και $A \cap \mathcal{U} = A$.

- Οι πρώτες δύο ιδιότητες υποδηλώνουν ότι το καθολικό σύνολο αποτελεί *απορροφητικό στοιχείο* για την πράξη της ένωσης, και ότι το κενό σύνολο αποτελεί απορροφητικό στοιχείο για την πράξη της τομής. Γενικά, ένα *απορροφητικό στοιχείο* για μία διμερή πράξη $\circ$ η οποία ορίζεται πάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{U}$ είναι ένα στοιχείο 0 του συνόλου $\mathcal{U}$ τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο $A \in \mathcal{U}$, $A \circ 0 = 0 \circ A = 0$.

- Οι τελευταίες δύο ιδιότητες υποδηλώνουν ότι το κενό σύνολο αποτελεί *ουδέτερο στοιχείο* για την πράξη της ένωσης, και ότι το καθολικό σύνολο αποτελεί *ουδέτερο στοιχείο* για την πράξη της τομής. Γενικά, ένα *ουδέτερο στοιχείο* για μία διμερή πράξη $\circ$ η οποία ορίζεται πάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{U}$ είναι ένα στοιχείο Λ του συνόλου $\mathcal{U}$ τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο $A \in \mathcal{U}$, $A \circ \Lambda = \Lambda \circ A = A$.

Τα *Διαγράμματα Venn* είναι γραφικές παραστάσεις που διευκολύνουν την εξέταση των σχέσεων μεταξύ των υποσυνόλων ενός συνόλου αναφοράς. Το σύνολο αναφοράς $\mathcal{U}$ παριστάνεται συνήθως από τα σημεία που βρίσκονται μέσα σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. ΄Ενα υποσύνολο A παριστάνεται συνήθως από τα σημεία που περικλείονται μέσα σε μία κλειστή καμπύλη γραμμή, συνήθως περιφέρεια, η οποία βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Κάθε υποσύνολο του A θα παριστάνεται πάλι από μία δεύτερη καμπύλη, εσωτερική της πρώτης. Το συμπληρωματικό σύνολο $\overline{A}$ θα παριστάνεται από τα σημεία του $\mathcal{U}$ που είναι έξω από την περικλείουσα γραμμή του A. Αν δύο υποσύνολα A και B του $\mathcal{U}$ είναι ξένα, αυτά θα παριστάνονται από καμπυλόγραμμα χωρία που δεν έχουν κοινά σημεία και θα είναι το ένα εκτός του άλλου. Αν τα υποσύνολα A και B δεν είναι ξένα, τότε τα καμπυλόγραμμα χωρία που τα παριστάνουν θα τέμνονται. Παροτρύνουμε τον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι για τρία υποσύνολα A, B και C του $\mathcal{U}$ που γενικώς δεν είναι ξένα, ορίζονται στο διάγραμμα Venn οκτώ περιοχές. Ποια είναι η ερμηνεία των περιοχών αυτών;

1.1.5 Σύνθετες Πράξεις και οι Νόμοι τους

Προφανώς, οι πράξεις της ένωσης, τομής, διαφοράς και συμπλήρωσης ορίζουν αυθαίρετα περίπλοκες εκφράσεις με σύνολα. ΄Ετσι, θα ήταν χρήσιμο να γνωρίζαμε ορισμένους βασικούς νόμους για την επεξεργασία και την απλοποίηση τέτοιων εκφράσεων. ΄Εχουμε συγκεντρώσει στο Σχήμα 1.1 μερικές συνήθεις συνολοθεωρητικές ταυτότητες για τη δική σας διευκόλυνση. Μερικές από αυτές είναι προφανείς και τις έχουμε ήδη αναφέρει ως νόμους, ενώ άλλες προκύπτουν άμεσα, από προηγούμενους ορισμούς που έχουμε δώσει. Ενθαρρύνουμε τον αναγνώστη να επαληθεύσει την ισχύ των τελευταίων.

1.1.6 Καρτεσιανό Γινόμενο

Σε όλα τα προηγούμενα, όπου έγινε λόγος για σύνολα, δεν παρουσιάστηκε περίπτωση στην οποία να ενδιαφερθούμε για τη σειρά των στοιχείων του. ¶λλωστε, η ισότητα των συνόλων δεν εξαρτάται από τη σειρά κατά την οποία θεωρούμε τα στοιχεία καθενός. ΄Ετσι, για παράδειγμα, το διμελές σύνολο $\{a, b\}$ γράφεται και ως $\{b, a\}$. Ωστόσο, στην Αναλυτική Γεωμετρία, κάθε σημείο του επιπέδου ορίζεται με ένα ζεύγος αριθμών, από τους οποίους ο πρώτος λέγεται *τετμημένη* και ο δεύτερος *τεταγμένη* του σημείου, η δε σειρά τους είναι πάντοτε η ίδια. ΄Ετσι, το ζεύγος $\langle x, y\rangle$ των *συντεταγμένων* σημείου ορίζει ένα σημείο, ενώ το ζεύγος $\langle y, x\rangle$ ορίζει γενικώς ένα άλλο σημείο. Για αυτό ακριγώς το λόγο, το λέμε και διατεταγμένο ζεύγος.

Γενικά, ένα ζεύγος αντικειμένων για τα οποία χωρίς αμφιβολία διακρίνεται ποιό θα είναι πρώτο και ποιό θα είναι δεύτερο θα λέγεται *διατεταγμένο ζεύγος*. Ο ορισμός μπορεί να δοθεί με ακρίβεια αν χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες των συνόλων.

$\cup B = B \cup A$	Αντιμεταθετικός νόμος για την ένωση
$A \cap B = B \cap A$	Αντιμεταθετικός νόμος για την τομή
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Προσεταιριστικός νόμος για την ένωση
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Προσεταιριστικός νόμος για την τομή
$A \cup A = A$	Νόμος αδυναμίας για την ένωση
$A \cap A = A$	Νόμος αδυναμίας για την τομή
$A \cup (A \cap B) = A$	Πρώτος απορροφητικός νόμος
$A \cap (A \cup B) = A$	Δεύτερος απορροφητικός νόμος
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Πρώτος Νόμος του De Morgan
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Δεύτερος Νόμος του De Morgan
$\overline{\overline{A}} = A$	Νόμος μηδενοδυναμίας του συμπληρώματος (ή *ενελικτική ιδιότητα*)
$A \cap \overline{A} = \emptyset$	Προφανής από ορισμό συμπληρώματος
$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	Προφανής από ορισμό συμπληρώματος
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	Προφανής από ορισμούς ένωσης και καθολικού συνόλου
$A \cap \emptyset = \emptyset$	Προφανής από ορισμούς τομής και κενού συνόλου
$A \cup \emptyset = A$	Προφανής από ορισμούς ένωσης και κενού συνόλου
$A \cap \mathcal{U} = A$	Προφανής από ορισμούς τομής και καθολικού συνόλου
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Επιμεριστικός νόμος της ένωσης προς την τομή
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Επιμεριστικός νόμος της τομής προς την ένωση

Σχήμα 1.1: Μερικές ταυτότητες από τη Συνολοθεωρία

Έστω x και y στοιχεία συνόλου. Τότε, θα ονομάζεται *διατεταγμένο ζεύγος* $\langle x, y\rangle$ το σύνολο $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Πραγματικά, έτσι αφενός ορίζεται ποιά θα είναι τα στοιχεία του ζεύγους και αφετέρου ορίζεται από το μονομελές σύνολο $\{x\}$ ποιό θα λάβουμε ως πρώτο στοιχείο του ζεύγους.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο αυθαίρετα σύνολα A και B. Μπορούμε από αυτά να σχηματίσουμε *διατεταγμένα ζεύγη* $\langle a, b\rangle$, όπου $a \in A$ και $b \in B$. Το σύνολο που περιλαμβάνει όλα εκείνα τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη καλείται *Καρτεσιανό Γινόμενο* των A και B, και συμβολίζεται ως $A \times B$. Έτσι,

$$A \times B \;=\; \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \text{ και } b \in B\}\ .$$

Θέλουμε να διευκρινίσουμε εδώ πως διατεταγμένο ζεύγος σημαίνει απλά ότι η σειρά (ή διάταξη) των στοιχείων είναι σημαντικά. Έτσι, το διατεταγμένο ζεύγος $\langle a, b\rangle$ είναι διαφορετικό από το διατεταγμένο ζεύγος $\langle b, a\rangle$ (εκτός βέβαια εάν $a = b$), ενώ βέβαια δεν είναι απαραίτητο ότι αμφότερα τα ζεύγη είναι στοιχεία του Καρτεσιανού Γινομένου. Προφανώς, αν το σύνολο A έχει n στοιχεία και το σύνολο B έχει m στοιχεία, τότε το Καρτεσιανό Γινόμενο $A \times B$ έχει nm στοιχεία. Για παράδειγμα,

$$\{a, b\} \times \{b, c, d\} \;=\; \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle\}\ .$$

Γενικότερα, το Καρτεσιανό Γινόμενο των n συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$, συμβολιζόμενο ως $\times_{1 \leq i \leq n} A_i$, ορίζεται ως το σύνολο όλων των διατεταγμένων *πλειάδων* $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$, όπου για κάθε δείκτη i, $1 \leq i \leq n$, $a_i \in A_i$. Η διατεταγμένη πλειάδα $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ αναφέρεται συχνά και ως διατεταγμένη n-άδα. Ειδικότερα, ένα διατεταγμένο ζεύγος είναι μία διατεταγμένη 2-άδα. Στην περίπτωση όπου $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, το Καρτεσιανό Γινόμενο $\times_{1 \leq i \leq n} A_i$ συμβολίζεται και ως A^n. Για παράδειγμα, γράφουμε $\mathbf{N}^2$ για να συμβολίσουμε το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών φυσικών αριθμών.

1.1.7 Αριθμοί και Σύνολα Αριθμών

Θα υιοθετήσουμε τα σύμβολα $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ και $\Re$ για να παραστήσουμε τα σύνολα των *ακεραίων αριθμών, φυσικών αριθμών, ρητών αριθμών* και *πραγματικών αριθμών,* αντίστοιχα. Το σύνολο $\mathbf{Z}$ περιλαμβάνει τους θετικούς ακέραιους, τους αρνητικούς ακέραιους και το μηδέν. Τα σύνολα $\mathbf{Z}_+$ και $\mathbf{Z}_-$ περιλαμβάνουν τους θετικούς και αρνητικούς ακέραιους, αντίστοιχα. Έτσι, $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_+ \cup \mathbf{Z}_- \cup \{0\}$. Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N}$ περιλαμβάνει μόνο τους θετικούς ακέραιους και το μηδέν. Έτσι, $\mathbf{N} = \mathbf{Z}_+ \cup \{0\}$. Υπενθυμίζουμε ότι ένας αριθμός x είναι *ρητός* όταν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί m και n τέτοιοι ώστε $x = \frac{m}{n}$. Κάθε μη ρητός αριθμός καλείται *άρρητος*.

Η πράξη της διαίρεσης είναι μία σημαντική πράξη πάνω στο σύνολο των (θετικών) ακεραίων. Μία τέτοια διαίρεση μπορεί να είναι *τελεία,* όταν το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 0, ή *ατελής* στην αντίθετη περίπτωση. Λέμε ότι ο ακέραιος a *διαιρεί* τον ακέραιο b (ή ότι ο ακέραιος b *διαιρείται* από τον ακέραιο a) όταν η διαίρεση του b διά του a είναι τελεία. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ακόμη ότι α ακέραιος a είναι *διαιρέτης* του ακεραίου b (ή ότι ο ακέραιος b είναι *διαιρετέος* (ή *διαιρετός*) από τον ακέραιο a). Όποτε κάποιος αριθμός διαιρεί άλλους, θα διαιρεί και το άθροισμά τους. Ένας *κοινός διαιρέτης* δύο φυσικών αριθμών είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός ο οποίος διαιρεί και τους δύο. Ένα *κοινό πολλαπλάσιο* δύο φυσικών αριθμών είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός ο οποίος διαιρείται και από τους δύο.

Ο *Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης* δύο (ή περισσοτέρων) φυσικών αριθμών είναι ο μέγιστος φυσικός μεταξύ των κοινών διαιρετών τους. Συχνά συμβολίζουμε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη των ακεραίων a και b ως ΜΚΔ(a, b). Το *Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο* δύο (ή περισσοτέρων) φυσικών αριθμών είναι ο ελάχιστος φυσικός μεταξύ των κοινών πολλαπλασίων τους. Συχνά συμβολίζουμε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των ακεραίων a και b ως ΕΚΠ(a, b).

´Ενας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 καλείται *πρώτος* αν οι μοναδικοί του διαιρέτες είναι το 1 και ο εαυτός του. Δύο ακέραιοι αριθμοί καλούνται *αμοιβαίως πρώτοι* (ή *πρώτοι προς αλλήλους*) αν ο μοναδικός κοινός διαιρέτης τους είναι το 1. ´Ενας μη πρώτος ακέραιος καλείται και *σύνθετος* ακέραιος. ´Ενας φυσικός αριθμός διαιρετός διά του 2 καλείται *άρτιος*. Αντίστοιχα, κάθε φυσικός αριθμός μη διαιρετός διά του 2 καλείται *περιττός*. Κάθε άρτιος αριθμός a μπορεί να γραφεί ως $a = 2n$ για κάποιο φυσικό αριθμό n. Αντίστοιχα επίσης, κάθε περιττός αριθμός b μπορεί να γραφεί ως $b = 2n+1$ για κάποιο φυσικό αριθμό b. Είναι προφανές ότι μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών, ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.

Μέχρι στιγμής, έχουμε προσδιορίσει σύνολα μέσω μιας συστηματικής καταγραφής των στοιχείων τους, έχοντας τοποθετήσει αυτά μέσα σε αγκύλες και διαχωρίσει αυτά μεταξύ τους με κόμματα. Ωστόσο, μερικά σύνολα δεν μπορούν να καταγραφούν με αυτό τον τρόπο επειδή είναι *άπειρα*. Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbf{N}$ των φυσικών αριθμών είναι άπειρο. Ωστόσο, μπορούμε να περιγράψουμε τα στοιχεία του γράφοντας $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και χρησιμοποιώντας τρεις τελείες (και τη διαίσθησή μας) για να αντικαταστήσουμε μια ατέλειωτη λίστα από φυσικούς αριθμούς.

Ασκήσεις και Προβλήματα

¶σκηση 1.1.1 Εξετάστε καθεμιά από τις ακόλουθες τυπικές περιγραφές συνόλων ώστε να κατανοήσετε ποια ακριβώς στοιχεία περιέχει. Γράψτε τότε μια σύντομη περιγραφή του συνόλου στα Ελληνικά.

1. $\mathcal{S}_1 = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
2. $\mathcal{S}_2 = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
3. $\mathcal{S}_3 = \{n \mid n = 2k \text{ για κάποιο } k \in \mathbf{N}\}$

4. $\mathcal{S}_4 = \{n \mid \ n = 2k$ για κάποιο $k \in \mathbf{N}$ και $n = 3l$ για κάποιο $l \in \mathbf{N}\}$

5. $\mathcal{S}_5 = \{n \ n \in \mathbf{N}$ και $n = n + 1\}$

¶σκηση 1.1.2 Αποδείξτε τους εξής νόμους για σύνθετες πράξεις πάνω σε αυθαίρετα σύνολα A, B, C και D:

1. Αν είναι $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \cup B \subseteq C$.
2. Αν είναι $A \cap B = A \cap C$ και $A \cup B = A \cup C$, τότε $B = C$.
3. $(A \cup \overline{C}) \cap (B \cup C) = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)$.
4. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \emptyset$.
5. (Γενίκευση του Πρώτου Νόμου του De Morgan) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
6. (Γενίκευση του Δευτέρου Νόμου του De Morgan) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.
7. Αν είναι $B \subseteq A$ και $B \subseteq \overline{A}$, τότε $B = \emptyset$.
8. Αν είναι $A \subseteq B$ και $\overline{A} \subseteq B$, τότε $B = \mathcal{U}$.
9. Αν είναι $A \triangle C = B \triangle C$, τότε $A = B$.
10. $A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A$.
11. $A \triangle A = \emptyset$.
12. $\overline{A \triangle B} = \overline{A} \triangle B = A \triangle \overline{B}$.
13. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
14. $A \triangle (A \cup B) = B \triangle (A \cap B) = B \setminus (A \cup B)$.
15. $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$.
16. $(A \setminus B) \triangle B = A \cup B$.
17. $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.
18. $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$.

19. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

20. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.

21. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

22. $A \setminus (B \setminus A) = A$.

23. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

24. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cap D)$.

¶σκηση 1.1.3 Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ισχυρίζεται την κλειστότητα ενός συνόλου κάτω από μια πράξη (πάνω σε στοιχεία του συνόλου). αποφασίστε αν αυτή είναι αληθής ή ψευδής.

- Αν η πρόταση είναι αληθής, αποδείξτε την με απλό και σύντομο τρόπο. Δείξτε, δηλαδή, την ισχύ της ισχυριζόμενης κλειστότητας.
- Αν η πρόταση είναι ψευδής, παρουσιάστε ένα απλό αντιπαράδειγμα προς αυτή. (Ένα αντιπαράδειγμα θα είναι, προφανώς, κάποιο ή κάποια στοιχεία του συνόλου που άγονται διά της πράξης εκτός του συνόλου.) Στην περίπτωση αυτή, προσδιορίστε, επίσης, τη θήκη του συνόλου κάτω από την πράξη.

1. Το σύνολο των περιττών ακεραίων είναι κλειστό κάτω από τον πολλαπλασιασμό.
2. Το σύνολο των περιττών ακεραίων είναι κλειστό κάτω από τη διαίρεση.
3. Το σύνολο των αρτίων ακεραίων είναι κλειστό κάτω από τον πολλαπλασιασμό.
4. Το σύνολο των αρτίων ακεραίων είναι κλειστό κάτω από τη διαίρεση.
5. Το σύνολο των θετικών ακεραίων είναι κλειστό κάτω από τη διαίρεση.
6. Το σύνολο των αρνητικών ακεραίων είναι κλειστό κάτω από την αφαίρεση.
7. Το σύνολο των αρνητικών ακεραίων είναι κλειστό κάτω από τον πολλαπλασιασμό.

¶σκηση 1.1.4 Δώστε ένα αναδρομικό ορισμό για καθένα από τα ακόλουθα σύνολα:

1. Το σύνολο $\mathbf{N}$ των φυσικών αριθμών.

2. Το σύνολο όλων των ακεραίων (θετικών και αρνητικών) οι οποίοι διαιρούνται από το 7.

3. Το σύνολο ολων των θετικών ακεραίων οι οποίοι διαιρούνται από το 2 ή από το 7.

¶σκηση 1.1.5 Θεωρούμε αυθαίρετο σύνολο S με n στοιχεία, και αυθαίρετη συλλογή $\mathcal{S}$ υποσυνόλων του S τέτοια ώστε για οποιοδήποτε ζεύγος συνόλων $S_i, S_j \in \mathcal{S}$, $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

1. Αποδείξτε ότι $|\mathcal{S}| \leq 2^{n-1}$. Παρουσιάστε, επίσης, κατάλληλη συλλογή $\mathcal{S}$ έτσι ώστε $|\mathcal{S}| = 2^{n-1}$.

2. Αποδείξτε ότι αν $|\mathcal{S}| < 2^{n-1}$, τότε η συλλογή $\mathcal{S}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια κατάλληλη συλλογή $\mathcal{S}'$ 2^{n-1} υποσυνόλων.

¶σκηση 1.1.6 Θεωρούμε αυθαίρετα υποσύνολα S και T του (καθολικού) συνόλου U τέτοια ώστε $S \nsubseteq T$ και $T \nsubseteq S$. Αποδείξτε ότι

$$|S| \cdot |\overline{S}| + |T| \cdot |\overline{T}| \quad > \quad |S \cap T| \cdot |\overline{S \cap T}| + |S \cup T| \cdot |\overline{S \cup T}| \,.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε τα μεγέθη $\alpha := |S \cap T|$, $\beta := |S \setminus T|$, $\gamma := |T \setminus S|$ και $\delta := |\overline{S \cup T}|$. Αφού $S \nsubseteq T$, έπεται ότι $\gamma > 0$. Όμοια, αφού $T \nsubseteq S$, έπεται ότι $\beta > 0$. Ετσι, $\beta\gamma > 0$.

Αφενός, $|S| = |S \cap T| + |S \setminus T| = \alpha + \beta$ και $|\overline{S}| = |T \setminus S| + |\overline{S \cup T}| = \gamma + \delta$. Όμοια λαμβάνουμε ότι $|T| = |T \cap S| + |T \setminus S| = \alpha + \gamma$ και $|\overline{T}| = |S \setminus T| + |\overline{S \cup T}| = \beta + \delta$. Έτσι,

$$\begin{aligned} |S| \cdot |\overline{S}| + |T| \cdot |\overline{T}| &= (\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) + (\alpha + \gamma) \cdot (\beta + \delta) \\ &= 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + \alpha\gamma + \beta\delta + \alpha\beta + \gamma\delta \,. \end{aligned}$$

Αφετέρου, $\overline{S \cap T} = |S \setminus T| + |T \setminus S| + |\overline{S \cup T}| = \beta + \gamma + \delta$ και $|S \cup T| = |S \cap T| + |S \setminus T| + |T \setminus S| = \alpha + \beta + \gamma$. Έτσι,

$$\begin{aligned} |S \cap T| \cdot |\overline{S \cap T}| + |S \cup T| \cdot |\overline{S \cup T}| &= \alpha \cdot (\beta + \gamma + \delta) + (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \delta \\ &= 2\alpha\delta + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\delta + \gamma\delta \,. \end{aligned}$$

Συνολικά λοιπόν, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |S| \cdot |\overline{S}| + |T| \cdot |\overline{T}| - \big(|S \cap T| \cdot |\overline{S \cap T}| + |S \cup T| \cdot |\overline{S \cup T}|\big) &= 2\beta\gamma \\ &> 0 \,, \end{aligned}$$

όπως χρειάζεται. ∎

1.2 ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Καταρχήν υπάρχουν οι σχέσεις (Παράγραφος 1.2.1). Οι δυαδικές σχέσεις (Παράγραφος 1.2.2) αποτελούν μία ειδική κατηγορία σχέσεων. Με τη σειρά τους, μία ειδική κατηγορία δυαδικών σχέσεων αποτελούν οι συναρτήσεις (Παράγραφος 1.2.3).

1.2.1 Σχέσεις

Τα Μαθηματικά ασχολούνται με τις ιδιότητες διαφόρων αντικειμένων, όπως, για παράδειγμα, οι αριθμοί, κσι τις μεταξύ τους σχέσεις. ΄Ετσι, είναι συνηθισμένο να λέμε ότι η "*μεγαλύτερο από*" είναι μία σχέση πάνω στο σύνολο των αριθμών η οποία ισχύει, για παράδειγμα, μεταξύ των αριθμών 9 και 3, αλλά δεν ισχύει μεταξύ των αριθμών 2 και 7. Πώς όμως θα μπορούσαμε να εκφράσουμε σχέσεις μεταξύ αντικειμένων στη μοναδική μαθηματική γλώσσα που έχουμε διαθέσιμη αυτή τη στιγμή, δηλαδή τη γλώσσα των συνόλων; Θεωρούμε απλά ότι και η σχέση μεταξύ αντικειμένων ενός συνόλου είναι και αυτή με τη σειρά της ένα σύνολο. Τα αντικείμενα που ανήκουν στη σχέση είναι με απλά λόγια συνδυασμοί αντικειμένων για τους οποίους η σχέση ισχύει. ΄Ετσι, για παράδειγμα, η σχέση "*μεγαλύτερο από*" είναι το σύνολο όλων των *ζευγών* από αριθμούς για τα οποία ο πρώτος αριθμός είναι μεγαλύτερος από το δεύτερο αριθμό. Με τη διαισθητική αυτή εισαγωγή, είμαστε τώρα έτοιμοι να προχωρήσουμε στο μαθηματικό ορισμό της σχέσης.

Ορισμός 1.1 (Σχέση) *Θεωρούμε αυθαίρετο σύνολο S. Για οποιοδήποτε ακέραιο $n \geq 2$, μια n-*αδική σχέση *R πάνω στο σύνολο S είναι ένα υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $\underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n \text{ φορές}}$.*

Με άλλα λόγια, η n-αδική σχέση R είναι ένα σύνολο από διατεταγμένες n-άδες στοιχείων του συνόλου S. Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση αποτελούν οι 2-*αδικές σχέσεις* ή, όπως συχνότερα καλούνται, *δυαδικές σχέσεις*. Για μια δυαδική σχέση $R \subseteq S \times S$, γράφουμε aRb για να υποδηλώσουμε ότι $\langle a, b \rangle \in R$. Γενικότερα, για αυθαίρετα σύνολα S_1 και S_2, μια δυαδική σχέση R είναι ένα υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $S_1 \times S_2$. Ειδικότερα ακόμη, οι 1-αδικές και 3-αδικές σχέσεις καλούνται μοναδιαίες σχέσεις και τριαδικές σχέσεις, αντίστοιχα.

1.2.2 Δυαδικές Σχέσεις

Οι δυαδικές σχέσεις αποτελούν αναμφίβολα τις σχέσεις εκείνες που συχνότερα θα μας απασχολήσουν στο βιβλίο αυτο. Για το λόγο αυτό, είναι χρήσιμο να συζητήσουμε κατάλληλες ιδιότητές τους οι οποίες θα μας επιτρέψουν να τις κατηγοριοποιήσουμε κατά ωφέλιμο τρόπο. Οι ιδιότητες αυτές συλλαμβάνουν την εσωτερική δομή των σχέσεων, καθώς και διάφορες συμμετρίες τους οι οποίες εμφανίζονται όταν οι σχέσεις προέρχονται από συγκεκριμένες "εφαρμογές" με εγγενείς συμμετρίες.

Μια δυαδική σχέση $R \subseteq A \times A$ είναι *ανακλαστική* (ή *αυτοπαθής*) αν $\langle a, a\rangle \in R$ για κάθε στοιχείο $a \in R$. Με άλλα λόγια, κάθε στοιχείο σχετίζεται με τον εαυτό του σε μία ανακλαστική σχέση.

Μία δυαδική σχέση $R \subseteq A \times A$ είναι *συμμετρική* αν $\langle b, a\rangle \in \mathcal{R}$ οποτεδήποτε $\langle a, b\rangle \in \mathcal{R}$. Για παράδειγμα, η σχέση της φιλίας πάνω σε ένα σύνολο ατόμων είναι συμμετρική σχέση καθώς (στις φυσιολογικές περιπτώσεις) οποτεδήποτε ο Γιάννης είναι φίλος με το Στέλιο, τότε και ο Στέλιος είναι φίλος με το Γιάννη. Παρεπιπτόντως, η σχέση της φιλίας δεν είναι ανακλαστική σχέση, καθώς δεν θεωρούμε ότι ένα άτομο είναι φίλος/φίλη του εαυτού του/της.

Μία σχέση $\mathcal{R}$ είναι *αντισυμμετρική* αν οποτεδήποτε $\langle a, b\rangle \in \mathcal{R}$ και τα στοιχεία a και b είναι διάφορα μεταξύ τους, τότε απαραίτητα $\langle b, a\rangle \notin \mathcal{R}$. Μπορούμε να ορίσουμε ισοδύναμα μία αντισυμμετρική σχέση ως μία σχέση $\mathcal{R}$ για την οποία οποτεδήποτε ισχύουν ταυτόχρονα ότι $\langle a, b\rangle \in \mathcal{R}$ και $\langle b, a\rangle \in \mathcal{R}$, τότε απαραίτητα $a \neq b$. Για παράδειγμα, η σχέση της *πατρότητας* είναι προφανώς αντισυμμετρική σχέση. Υπάρχουν (φυσικές) δυαδικές σχέσεις οι οποίες δεν είναι αντισυμμετρικές, αλλά ούτε και συμμετρικές. Ο αναγνώστης ενθαρρύνεται να προσδιορίσει μερικές τέτοιες σχέσεις.

Μία δυαδική σχέση $\mathcal{R}$ είναι *μεταβατική* αν οποτεδήποτε $\langle a, b\rangle \in \mathcal{R}$ και $\langle b, c\rangle \in \mathcal{R}$, τότε απαραίτητα $\langle a, c\rangle \in \mathcal{R}$. Για παράδειγμα, η (δυαδική) σχέση "*μεγαλύτερο-από*" είναι πράγματι μεταβατική σχέση.

Μία σχέση που είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική καλείται *σχέση ισοδυναμίας*. Σε μία σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, μπορούμε να ορίσουμε *κλάσεις ισοδυναμίας* ως εξής: Για κάθε στοιχείο $a \in A$, η κλάση ισοδυναμίας που αντιστοιχεί στο στοιχείο a, την οποία συμβολίζουμε ως $[a]_{|calR}$, ορίζεται ως

$$[a]_{\mathcal{R}} \;=\; \{b \mid \langle a, b\rangle \in \mathcal{R}\}\,.$$

Καθώς μιλάμε για σχέσεις ισοδυναμίας, οι οποίες είναι συμμετρικές, μπορούμε να ορίσουμε εναλλακτικά την κλάση ισοδυναμίας $[a]_{\mathcal{R}}$ ως

$$[a]_{\mathcal{R}} \;\; = \;\; \{b \mid \langle b, a\rangle \in \mathcal{R}\}\,.$$

Συμβολίζουμε ως $\Pi_{\mathcal{R}}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζονται σε σχέση με τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$. ´Ετσι,

$$\Pi_{\mathcal{R}} \;\; = \;\; \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}\,.$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε μία σημαντική ιδιότητα των κλάσεων ισοδυναμίας.

Πρόταση 1.1 *Θεωρούμε σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ πάνω σε αυθαίρετο σύνολο $A \neq \emptyset$. Τότε, οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\mathcal{R}$ διαμερίζουν το σύνολο A.*

Απόδειξη: Χρειάζεται να δείξουμε ότι όλα τα στοιχεία (κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\mathcal{R}$) στο σύνολο $\Pi_{\mathcal{R}}$ είναι μη κενά, μεταξύ τους ξένα, και ότι αυτά καλύπτουν όλο το σύνολο A.

- Θεωρούμε αυθαίρετο στοιχείο $a \in A$. Αφού η σχέση $\mathcal{R}$ είναι ανακλαστική, έπεται ότι $\langle a, a\rangle \in \mathcal{R}$. Επεται αμέσως από τον ορισμό του συνόλου $[a]_{\mathcal{R}}$ ότι αυτό περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο, όπως χρειάζεται.

- Θεωρούμε αυθαίρετο ζεύγος από (διάφορα μεταξύ τους) στοιχεία $a, b \in A$ τέτοια ώστε οι κλάσεις ισοδυναμίας $[a]_{\mathcal{R}}$ και $[b]_{\mathcal{R}}$ είναι μεταξύ τους διάφορες. Θα αποδείξουμε ότι $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset$. Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. Τότε, υπάρχει στοιχείο $c \in A$ τέτοιο ώστε $c \in [a]_{\mathcal{R}}$ και $c \in [a]_{\mathcal{R}}$. ´Ετσι, $\langle a, c\rangle \in \mathcal{R}$ και $\langle c, b\rangle \in \mathcal{R}$. Αφού η $\mathcal{R}$ είναι μεταβατική σχέση, έπεται ότι $\langle a, b\rangle \in \mathcal{R}$. Αφού η $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική σχέση, έπεται ότι $\langle b, a\rangle \in \mathcal{R}$.

  Ας θεωρήσουμε τώρα αυθαίρετο στοιχείο $d \in [a]_{\mathcal{R}}$. Τότε, $\langle d, a\rangle \in \mathcal{R}$. Αφού και $\langle a, b\rangle \in \mathcal{R}$, έπεται ότι $\langle d, b\rangle \in \mathcal{R}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $d \in [b]_{\mathcal{R}}$. Αφού το στοιχείο επιλέχθηκε αυθαίρετα, έπεται ότι $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$. ομοια, μπορούμε να δείξουμε ότι $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$. ´Επεται ότι $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$. Αντίφαση.

- Για να δείξουμε ότι $\bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}} = A$, παρατηρούμε ότι $\bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}} \subseteq A$. Ετσι, απομένει να δείξουμε ότι $A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}}$. Προς τούτο, θεωρούμε αυθαίρετο στοιχείο $b \in A$.

Αφού η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική, $\langle b, b\rangle \in \mathcal{R}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $b \in [b]_{\mathcal{R}}$. Επομένως, $b \in \bigcup_{a\in A}[a]_{\mathcal{R}}$. Αφού το στοιχείο b επιλέχθηκε αυθαίρετα, έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{a\in A}[a]_{\mathcal{R}}$, όπως χρειάζεται.

Η απόδειξή μας είναι τώρα ολοκληρωμένη. ■

Η Πρόταση 1.1 (και η απόδειξή της) δείχνει ότι μπορούμε πάντοτε, με δεδομένη μία σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ πάνω σε κάποιο σύνολο A, να κατασκευάσουμε μία διαμέριση $\Pi_{\mathcal{R}}$ του συνόλου A η οποία επάγεται από τη σχέση $\mathcal{R}$. Αντίστροφα, μία διαμέριση ενός συνόλου προσδιορίζει κατά τον προφανή τρόπο μία αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο. Έτσι, έχουμε συνολικά μία αμφιμονοσήμαντη συσχέτιση μεταξύ των σχέσεων ισοδυναμίας πάνω σε κάποιο σύνολο και των διαμερίσεών του. (Δείτε την Ενότητα 1.2.3 για ένα ακριβέστερο ορισμό της έννοιας της αμφιμονοσήμαντης συσχέτισης.)

Κάθε δυαδική σχέση που είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική καλείται *μερική διάταξη*. Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση της μερικής διάταξης αποτελεί η ολική διάταξη. Μία *ολική διάταξη* είναι μία μερική διάταξη $\mathcal{R}$ πάνω στο σύνολο A τέτοια ώστε για οποιοδήποτε ζεύγος στοιχείων $a, b \in A$, είτε $\langle a, b\rangle \in \mathcal{R}$ είτε $\langle b, a\rangle \in \mathcal{R}$.

1.2.3 Συναρτήσεις

Αναμφίβολα, κάποιος που θα ισχυριζόταν ότι η έννοια της συνάρτησης αποτελεί μία από τις (ίσως τρεις) σημαντικότερες έννοιες στα Μαθηματικά δεν θα ήταν παρά πειστικός. Διαισθητικά, μία συνάρτηση συσχετίζει στοιχεία ενός συνόλου με στοιχεία ενός άλλου (ενδεχομένως και του ιδίου) συνόλου κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου συσχετίζεται με ένα ακριβώς στοιχείο του δευτέρου συνόλου. Η διαισθητική αυτή περιγραφή της έννοιας της συνάρτησης μπορεί να μετατραπεί σε ένα ακριβή ορισμό με χρήση της έννοιας της δυαδικής σχέσης.

Ορισμός 1.2 (Συνάρτηση) *Μία* συνάρτηση *από το σύνολο A στο σύνολο B είναι μία δυαδική σχέση $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ τέτοια ώστε για κάθε στοιχείο $a \in A$, υπάρχει* ακριβώς ένα *στοιχείο $b \in B$ τέτοιο ώστε $\langle a, b\rangle \in \mathcal{R}$.*

Γενικά, χρησιμοποιούμε γράμματα όπως τα f, g και h για να συμβολίσουμε συναρτήσεις. Γράφουμε $f : A \to B$ για να δηλώσουμε ότι η f είναι μία συνάρτηση από το σύνολο A

στο σύνολο B. Το σύνολο A καλείται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης f. Για οποιοδήποτε στοιχείο $a \in A$ από το πεδίο ορισμού της f, γράφουμε $f(a)$ για να δηλώσουμε το *μοναδικό* εκείνο στοιχείο $b \in B$ τέτοιο ώστε $\langle a, b \rangle \in f$. Κατά το φυσικό τρόπο, το μοναδικό αυτό στοιχείο $f(a)$ καλείται η *εικόνα* του στοιχείου a κάτω από τη συνάρτηση f. Για οποιοδήποτε υποσύνολο A' του πεδίου ορισμού A, ορίζουμε το σύνολο τιμών

$$f(A') \;=\; \{f(a) \mid a \in A'\}\,.$$

΄Οπως ίσως θα αναμένατε, το σύνολο $f(A')$ καλείται η *εικόνα* του συνόλου A' κάτω από τη συνάρτηση f. Στην ειδική περίπτωση όπου $A' = A$, το σύνολο τιμών $f(A)$ καλείται *πεδίο τιμών* της συνάρτησης f. ΄Ετσι, το πεδίο τιμών μίας συνάρτησης είναι η εικόνα του πεδίου ορισμού της (κάτω από τη συνάρτηση).

Το πεδίο ορισμού πολλών συναρτήσεων τυγχάνει να είναι το Καρτεσιανό γινόμενο ενός αριθμού από σύνολα. Σε τέτοια περίπτωση, κάθε στοιχείο στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι μία διατεταγμένη πλειάδα από στοιχεία.

Ορισμένοι τύποι συναρτήσεων παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ορισμός 1.3 (΄Ενα-προς-ένα Συνάρτηση) *Μία συνάρτηση $f : A \to B$ είναι* ένα-προς-ένα *αν για οποιαδήποτε δύο διακεκριμένα dστοιχεία $a, b \in A$, $f(a) \neq f(b)$.*

Μία συνάρτηση $f : A \to B$ είναι *επί* αν για κάθε στοιχείο στο πεδίο τιμών της B, υπάρχει κάποιο στοιχείο στο πεδίο ορισμού της το οποίο απεικονίζεται σε αυτό (μέσω της συνάρτησης f). Τυπικά, για κάθε στοιχείο $b \in B$, υπάρχει στοιχείο $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = b$. Τέλος, μία συνάρτηση $f : A \to B$ καλείται *αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία* μεταξύ των A και B αν η f είναι ένα-προς-ένα και επί.

Με δεδομένες δύο συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to C$, η *σύνθεση* $f \circ g$ των συναρτήσεων f και g είναι η σύνάρτηση $f \circ g : A \to C$ η οποία ορίζεται ως $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Ασκήσεις και Προβλήματα

¶σκηση 1.2.1 Αποδείξτε ή διαψεύστε καθένα από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

1. Η μεταβατική θήκη μιας συμμετρικής θήκης είναι σχέση συμμετρική.

2. Η συμμετρική θήκη μιας μεταβατικής σχέσης είναι σχέση μεταβατική.

3. Η μεταβατική θήκη μιας ανακλαστικής σχέσης είναι σχέση ανακλαστική.

4. Η ανακλαστική θήκη μιας μεταβατικής σχέσης είναι σχέση μεταβατική.

¶σκηση 1.2.2 Ορίζουμε τη σχέση $\mathtt{Succ}$ πάνω στο σύνολο των φυσικών αριθμών ως εξής:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών a και b, aRb αν και μόνο αν $a = b + 1$.

Προσδιορίστε τη μεταβατική θήκη της σχέσης R.

¶σκηση 1.2.3 Αποδείξτε ότι η συμμετρική θήκη της μεταβατικής θήκης μίας δυαδικής σχέσης περιέχεται απαραίτητα στη μεταβατική θήκη της συμμετρικής θήκης της σχέσης.

¶σκηση 1.2.4 Θεωρούμε αυθαίρετες σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{R}'$ πάνω στο σύνολο S. Δείξτε τότε ότι οι ακόλουθες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Η σύνθεση $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

2. $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}' = \mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$.

¶σκηση 1.2.5 Θεωρούμε αυθαίρετες μερικές διατάξεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{R}'$ πάνω στο σύνολο S. Δείξτε τότε ότι η σχέση $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ είναι επίσης μερική διάταξη.

¶σκηση 1.2.6 Θεωρούμε σύνολα A και B, και συνάρτηση $f : A \to B$. Η συνάρτηση f επάγει μία αντίστοιχη συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbf{2}^A \setminus \emptyset \to \mathbf{2}^B \setminus \emptyset$ κατά το φυσικό τρόπο. Θεωρούμε επίσης αυθαίρετα υποσύνολα S και T του συνόλου A.

1. Ισχύει *πάντοτε* ότι $\widehat{f}(S \cup T) \subseteq \widehat{f}(S) \cup \widehat{f}(T)$; Αν ναι, αποδείξτε το. Αλλοιώς, παρουσιάστε κατάλληλο αντιπαράδειγμα. (Δηλαδή, καθορίστε κατάλληλα τα σύνολα A, B, S και T και τη συνάρτηση f έτσι ώστε $\widehat{f}(S \cup T) \not\subseteq \widehat{f}(S) \cup \widehat{f}(T)$.)

2. Ισχύει *πάντοτε* ότι $\widehat{f}(S) \cup \widehat{f}(T) \subseteq \widehat{f}(S \cup T)$; Αν ναι, αποδείξτε το. Αλλοιώς, παρουσιάστε κατάλληλο αντιπαράδειγμα. (Δηλαδή, καθορίστε κατάλληλα τα σύνολα A, B, S και T και τη συνάρτηση f έτσι ώστε $\widehat{f}(S \cup T) \not\subseteq \widehat{f}(S) \cup \widehat{f}(T)$.)

3. Ισχύει *πάντοτε* ότι $\widehat{f}(S \cap T) \subseteq \widehat{f}(S) \cap \widehat{f}(T)$; Αν ναι, αποδείξτε το. Αλλοιώς, παρουσιάστε κατάλληλο αντιπαράδειγμα. (Δηλαδή, καθορίστε κατάλληλα τα σύνολα A, B, S και T και τη συνάρτηση f έτσι ώστε $\widehat{f}(S \cap T) \not\subseteq \widehat{f}(S) \cap \widehat{f}(T)$.)

4. Ισχύει *πάντοτε* ότι $\widehat{f}(S) \cap \widehat{f}(T) \subseteq \widehat{f}(S \cap T)$; Αν ναι, αποδείξτε το. Αλλοιώς, παρουσιάστε κατάλληλο αντιπαράδειγμα. (Δηλαδή, καθορίστε κατάλληλα τα σύνολα A, B, S και T και τη συνάρτηση f έτσι ώστε $\widehat{f}(S \cap T) \not\subseteq \widehat{f}(S) \cap \widehat{f}(T)$.)

5. Θεωρείστε ξανά καθένα από τα προηγούμενα ερωτήματα για τα οποία η απάντησή σας ήταν αρνητική. Σε κάθε τέτοια περίπτωση, βρείτε (αν αυτό είναι δυνατό) κατάλληλη υπόθεση για τη συνάρτηση f η οποία θα μετέτρεπε την απάντησή σας από αρνητική σε θετική. Αποδείξτε αναλυτικά τους ισχυρισμούς σας.

1.3 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΑΠΕΙΡΑ ΣΥΝΟΛΑ

Υπάρχουν περισσότεροι άρτιοι αριθμοί παρά περιττοί; Υπάρχουν περισσότεροι φυσικοί αριθμοί παρά άρτιοι; Υπάρχουν περισσότεροι άρτιοι αριθμοί παρά αριθμοί διαιρετοί διά του 3; Τέτοια ερωτήματα είναι απόλυτα φυσιολογικά και εύλογα. Η απάντηση εξαρτάται από το τι εννοούμε όταν λέμε περισσότεροι. Για να ορισουμε την έννοια αυτή, θα καταφύγουμε σε ορισμένους χρήσιμους ορισμούς.

Ορισμός 1.4 (Ισοπλήθη σύνολα) *Δύο σύνολα A και B καλούνται* ισοπλήθη, *η καλούνται να έχουν την ίδια πληθικότητα, αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ τους.*

Για παράδειγμα, το σύνολο των αρτίων ακεραίων $\{2, 4, 6, \ldots\}$ και το σύνολο των περιττών ακεραίων $\{1, 3, 5, \ldots\}$ είναι ισοπλήθη καθώς η συνάρτηση $f(x) = x - 1$ που απεικονίζει το πρώτο σύνολο στο δεύτερο αποτελεί, προφανώς, αμφιμονοσήμαντο αντιστοιχία. Ως ένα δεύτερο παράδειγμα, θεωρούμε το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και το σύνολο των αρτίων φυσικών αριθμών $\{0, 2, 4, \ldots\}$ είναι ισοπλήθη καθώς η συνάρτηση $g(x) = 2x$ που απεικονίζει το πρώτο στο δεύτερο αποτελεί, προφανώς, αμφιμονοσήμαντο αντιστοιχία. Ακόμη, το δεύτερο από τα δύο αυτά σύνολα είναι ισοπληθές με το σύνολο των αρτίων θετικών ακεραίων $\{2, 4, 6, \ldots\}$ εξ αιτίας της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας $h(x) = x+2$ η οποία το απεικονίζει στο τελευταίο. Επειδή η συνθεση δύο αμφιμονοσημάντων αντιστοιχιών είναι αμφιμονοσήμαντος αντιστοιχία, αυτό συνεπάγεται ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ είναι ισοπληθές με το σύνολο των αρτίων θετικών ακεραίων $\{2, 4, 6, \ldots\}$ -- η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία που απεικονίζει το πρώτο στο δεύτερο είναι η $(g \circ h)(x) = 2x + 2$. Τόλος, το σύνολο των *τελείων τετραγώνων,* δηλαδή των φυσικών αριθμών οι οποίοι προκύπτουν ως το τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, είναι ισοπληθές με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N}$, εξ αιτίας της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας $\mathsf{Sqrt}(x) = \sqrt{x}$ η οποία απεικονίζει το πρώτο στο δεύτερο.

Παρόλο που ο Ορισμός 1.4 προορίζεται για τη σύγκριση απείρων συνόλων μεταξύ τους, αυτός χρησιμεύει εξίσου καλά και για τη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων, όπου η πληθικότητα είναι κάποιος φυσικός αριθμός.

Ορισμός 1.5 (Πεπερασμένο Σύνολο) *΄Ενα σύνολο A καλείται* πεπερασμένο *αν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός $n \geq 0$ τέτοιος ώστε το σύνολο A είναι ισοπληθές με το σύνολο $\{1, \ldots n\}$.*

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε ένα σημαντικότατο ορισμό.

Ορισμός 1.6 (Απείρως Αριθμήσιμο Σύνολο) *΄Ενα σύνολο είναι* απείρως αριθμήσιμο *αν αυτό είναι ισοπληθές με το σύνολο των φυσικών αριθμών.*

Χρησιμοποιούμε τέλος τον ορισμό του απείρως αριθμησίμου συνόλου για να καταλήξουμε σε ένα σχετικο αλλά γενικότερο ορισμό.

Ορισμός 1.7 (Αριθμήσιμο Σύνολο) *΄Ενα σύνολο είναι* αριθμήσιμο *αν αυτό είναι απείρως αριθμήσιμο ή πεπερασμένο.*

Ο τελευταίος μας ορισμός είναι ίσως και ο περισσότερο διαισθητικός.

Ορισμός 1.8 (¶πειρο Σύνολο) *΄Ενα σύνολο A καλείται* άπειρο *αν αυτό δεν είναι πεπερασμένο.*

Είναι προφανές ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι άπειρο. Είναι επίσης αληθές (αλλά λιγότερο προφανές) ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο σύνολο.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δείξουμε:

Πρόταση 1.2 *Θεωρούμε αυθαίρετη συλλογή $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots$ από αριθμήσιμα σύνολα. Τότε, η ένωση $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}_i$ είναι επίσης αριθμήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη: Θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι κανένα από τα σύνολα S_i, $i \geq 0$, δεν είναι κενό. Αν η ένωση $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots$ είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε αυτή είναι και αριθμήσιμο σύνολο. Υποθέτουμε, επομένως, ότι η ένωση $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots$ είναι άπειρο σύνολο.

Θεωρούμε διδιάστατη διάταξη των στοιχείων των συνόλων έτσι ώστε η i-ιοστή γραμμή της διάταξης περιέχει τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{S}_i$, $i \geq 0$. (Αφού καθένα από τα σύνολα $\mathcal{S}_i$ είναι πεπερασμένο ή άπειρο, διαφορετικές γραμμές της διάταξης δυνατό να έχουν διαφορετικά μήκη.) Ας θεωρήσουμε ότι διασχίζουμε τη διάταξη κατά το μονοπάτι π που φαίνεται στο Σχήμα. Είναι άμεσα προφανές ότι το μονοπάτι αυτό θα "περάσει" από κάθε στοιχείο της ένωσης $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}_i$ τουλάχιστον μία φορά. (Μάλιστα, θα "περάσει" από κάποιο στοιχείο περισσότερες από μία φορές αν το στοιχείο ανήκει σε περισσότερα από ένα σύνολα της συλλογής.)

Χρησιμοποιούμε τώρα το μονοπάτι π για να ορίσουμε αναδρομικά τη συνάρτηση f ως εξής:

$$f(i) = \begin{cases} a_{00}, & \text{αν } i = 0 \\ \text{το πρώτο στοιχείο στο μονοπάτι } \pi \text{ που είναι διάφορο} & \\ \text{από όλα τα στοιχεία } f(0), f(1), \ldots, f(i-1), & \text{αν } i > 0 \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση f αποτελεί αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το σύνολο των φυσικών αριθμών στην ένωση $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots$. Έτσι, η ένωση $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, όπως χρειάζεται. ∎

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. Αποδείξτε ότι η διαφορά μεταξύ ενός μη αριθμησίμου συνόλου και ενός αριθμησίμου συνόλου είναι απαραίτητα σύνολο μη αριθμήσιμο.

2. Χρησιμοποιείστε κατάλληλα παραδείγματα για να δείξετε ότι η τομή δύο απείρως αριθμησίμων συνόλων μπορεί να είναι πεπερασμένο σύνολο ή απείρως αριθμήσιμο σύνολο.

3. Χρησιμοποιείστε κατάλληλα παραδείγματα για να δείξετε ότι η τομή δύο μη αριθμησίμων συνόλων μπορεί να είναι πεπερασμένο σύνολο ή απείρως αριθμήσιμο σύνολο ή μη αριθμήσιμο σύνολο.

1.4 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Τα θεωρήματα και οι αποδείξεις αποτελούν κατά πολλούς την καρδιά και τη ψυχή των Μαθηματικών, αντίστοιχα. Από την άλλη, οι ορισμοί συλλαμβάνουν το πνεύμα των Μαθηματικών. Οι τρεις αυτές οντότητες -- θεωρήματα, αποδείξεις και ορισμοί -- είναι κεντρικές για οποιονδήποτε κλάδο θεμελιωμένο στα Μαθηματικά, συμπεριλαμβανομένης φυσικά και της Θεωρίας Υπολογισμού.

Ένα μαθηματικό *θεώωρημα* αποτελείται από την *υπόθεση* και το *συμπέρασμα*. Η *απόδειξη* του θεωρήματος δεν είναι παρά μία ορθή επιχειρηματολογία η οποία καταδεικνύει την ισχύ του συμπεράσματος.

1.4.1 Ευθείς Αποδείξεις

Μία *ευθεία* απόδειξη υποθέτει την ισχύ της υπόθεσης και χρησιμοποιεί την υπόθεση για να δείξει *κατ' ευθείαν* την ισχύ του συμπεράσματος. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1 *Αποδείξτε ότι για οποιουσδήποτε περιττούς ακεραίους a και b, ο ακέραιος ab είναι επίσης περιττός.*

Αφού οι ακέραιοι a και b είναι περιττοί, υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $a = 2x+1$ και $b = 2y + 1$. Έτσι,

$$\begin{aligned} ab &= (2x+1)(2y+1) \\ &= 4xy + 2x + 2y + 1 \\ &= 2(2xy + x + y) + 1\,. \end{aligned}$$

Αφού, λοιπόν, υπάρχει ακέραιος $z = 2xy + x + y$ τέτοιος ώστε $ab = 2z + 1$, έπεται ότι ο ακέραιος ab είναι περιττός, όπως χρειάζεται. □

Η απόδειξή μας στο Παράδειγμα 1.1 είναι κατά κάποιο τρόπο *κατασκευαστική* -- η απόδειξη κατασκεύασε συγκεκριμένο ακέραιο z έτσι ώστε $ab = 2z + 1$. Είναι ασφαλώς θεμιτή και η *μη κατασκευαστική* απόδειξη -- θα μπορούσαμε να είχαμε αποδείξει την ύπαρξη του ακεραίου z χωρίς να δώσουμε οποιαδήποτε πληροφορία για την τιμή του. Μια τέτοια απόδειξη δεν θα εξηγούσε, αλλά μόνο θα έπειθε. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες αυτό είναι το καλύτερο δυνατό που μπορούμε να κάνουμε. Ωστόσο, μία κατασκευαστική απόδειξη είναι εν γένει προτιμότερη ως απόδειξη εκεί όπου αυτό είναι δυνατό. Σε πολλές περιπτώσεις, η κατασκευαστική απόδειξη είναι ενδιαφέρουσα για τους δικούς της λόγους. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η απόδειξη είναι ακόμη περισσότερο χρήσιμη αφού παρέχει όχι μόνο εξήγηση αλλά και *αλγόριθμο* -- δείτε την Παράγραφο 1.4.2 που ακολουθεί. Τέτοιου είδους αποδείξεις ύπαρξης, κατασκευαστικές ή μη, αποτελούν το αντικείμενο της επόμενης παραγράφου.

1.4.2 Αποδείξεις Ύπαρξης

Πολλά θεωρήματα ισχυρίζονται ότι υπάρχει κάποιο αντικείμενο με συγκεκριμένες ιδιότητες. Κάποιος μπορεί να αποδείξει ένα τέτοιο θεώρημα προσδιορίζοντας ένα *τρόπο κατασκευής* του αντικειμένου. Ωστόσο, είναι εν γένει επίσης δυνατό να αποδείξουμε την ύπαρξη του αντικειμένου χωρίς να το κατασκευάσουμε. Οι δύο αυτές διαφορετικές φιλοσοφίες οδηγούν στους δύο κυριότερους τύπους αποδείξεων ύπαρξης.

- **Κατασκευαστικές αποδείξεις:** αυτές προσδιορίζουν μία ακολουθία από βήματα η οποία κατασκευάζει εκτελούμενη το ζητούμενο αντικείμενο.

- **Μη Κατασκευαστικές αποδείξεις:** τέτοιες αποδείξεις πείθουν για την ύπαρξη του αντικειμένου με τις ζητούμενες ιδιότητες χωρίς ωστόσο να το κατονομάζουν ή να το προσδιορίζουν.

Δεν υπάρχει καλύτερος τρόπος περιγραφής των κατασκευαστικών αποδείξεων από την παρουσίαση ενός συγκεκριμένου παραδείγματος.

Παράδειγμα 1.2 *3-Κανονικοί Γράφοι: Αποδείξτε ότι για κάθε άρτιο ακέραιο $n > 2$, υπάρχει 3-κανονικός γράφος με n κορυφές.*

Ας θεωρήσουμε αυθαίρετο ακέραιο $n > 2$. Κατασκευάζουμε ένα γράφο $G = \langle V, E\rangle$ με n κορυφές ως εξής:

$$V = \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

και

$$\begin{aligned} E = & \{\{i, i+1\} \mid 0 \le i \le n-2\} \\ & \bigcup \{\{n-1, 0\}\} \\ & \bigcup \left\{\{i, i+\frac{n}{2}\} \mid 0 \le i \le \frac{n}{2} - 1\right\}. \end{aligned}$$

Ας φανταστούμε ότι οι κορυφές του γράφου που κατασκευάσαμε βρίσκονται τοποθετημένες κατά διαδοχικό τρόπο πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου, έτσι ώστε όλες οι αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών κορυφών να είναι ίσες. Τότε, προφανώς, κάθε κορυφή είναι συνδεδεμένη με τις δύο γειτονικές της κορυφές καθώς και με την αντιδιαμετρική της. Έτσι, η αυθαίρετη κορυφή του γράφου έχει βαθμό 3 και ο γράφος είναι 3-κανονικός, όπως χρειάζεται. □

Παράδειγμα 1.3 *Ύψωση αρρήτου σε άρρητο.*

Ας θεωρήσουμε την πράξη της ύψωσης σε δύναμη πάνω στο Καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου των πραγματικών αριθμών με τον εαυτό του. Η πράξη αυτή είναι διμερής, καθώς για να οριστεί χρειάζεται να πούμε ποια είναι η δύναμη και ποιος είναι ο αριθμός που θα υψωθεί στη δύναμη. Ποιες είναι οι ενδιαφέρουσες ιδιότητες θήκης που μπορούμε να δείξουμε γι' αυτή την πράξη; Τέτοιες ιδιότητες παύουν να είναι προφανείς όταν εγκαταλείψουμε το σύνολο των ακεραίων. Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι εκείνη της ύψωσης αρρήτου αριθμού σε άρρητο άριθμο. Καθώς προκύπτει, η πράξη της ύψωσης σε δύναμη δεν κλείνει το Καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου των αρρήτων αριθμών με τον εαυτό του. Για να το αποδείξουμε, χρειάζεται να δείξουμε ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε ο αριθμός δεν είναι άρρητος (δηλαδή, είναι ρητός). Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με τέτοιο τρόπο ώστε όταν η απόδειξη ολοκληρωθεί να μην γνωρίζετε ποιοι είναι οι ακέραιοι x και y, ενώ θα είστε απόλυτα πεπεισμένοι για την ύπαρξή τους. Πράγματι, άς θεωρήσουμε τα ζεύγη $\langle x_1, y_1\rangle = \langle\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$ και $\langle x_2, y_2\rangle = \langle\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\rangle$. Ως γνωστό, ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Στην περίπτωση όπου ο αριθμός $x_1^{y_1} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι ρητός, το ζητούμενο έχει δειχθεί. Έτσι, ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = x_2$ *δεν* είναι ρητός. Παρατηρούμε ότι $x_2^{y_2} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$, ο οποίος είναι ρητός! Δεν γνωρίζουμε ποίος εκ των δύο αριθμών $x_1^{y_1}$ και $x_2^{y_2}$ είναι ρητός. Ωστόσο, έχουμε δείξει ότι ακριβώς ένας από τους δύο είναι πράγματι ρητός, και ότι αυτός προκύπτει ως το αποτέλεσμα της ύψωσης αρρήτου σε άρρητο. Η απόδειξη ύπαρξης είναι τώρα ολοκληρωμένη. □

1.4.3 Αποδείξεις με Αντίφαση

Οι αποδείξεις με αντίφαση αποτελούν ένα πολύ εύχρηστο και κομψό τύπο μαθηματικών αποδείξεων. Σε τέτοιες αποδείξεις, αποδεικνύουμε ένα θεώρημα υποθέτοντας καταρχήν ότι το θεώρημα *δεν* ισχύει και δείχνοντας στη συνέχεια ότι η υπόθεση που κάναμε οδηγεί σε μία προφανώς λανθασμένη συνέπεια. Αντίστοιχα, δεν υπάρχει καλύτερος τρόπος περιγραφής των αποδείξεων με αντίφαση από την παρουσίαση ενός συγκεκριμένου παραδείγματος.

Παράδειγμα 1.4 *Δύο Αμοιβαίως Πρώτοι Αριθμοί.*

Ας θεωρήσουμε τους ακεραίους $a = 2^\nu + 3^\nu$ και $b = 2^{\nu+1} + 3^{\nu+1}$. Θα αποδείξουμε ότι οι a και b είναι σχετικά πρώτοι. Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι οι a και b δεν είναι σχετικά πρώτοι. Έστω τότε $\delta > 1$ ένας κοινός διαιρέτης των a και b.

- Προφανώς, ο δ είναι και διαιρέτης του $2a$, άρα και της διαφοράς $b - 2a = (2^{\nu+1} + 3^{\nu+1}) - 2(2^\nu + 3^\nu) = 3^\nu$. Έτσι, $\delta = 3^\mu$, όπου $1 \leq \mu \leq \nu$.

- Αφού ο δ διαιρεί τον a και τον ακέραιο 3^ν, αυτός θα διαιρεί και τη διαφορά $a - 3^\nu = (2^\nu + 3^\nu) - 3^\nu = 2^\nu$. Έπεται ότι ο αριθμός 3^μ διαιρεί τον αριθμό 2^ν, όπου $1 \leq \mu \leq \nu$. Ωστόσο, οι αριθμοί 3^μ και 2^ν δεν έχουν κοινούς παράγοντες. Αντίφαση.

$\square$

Οι αποδείξεις με αντίφαση είναι συνηθέστατες όταν θέλουμε να αποδείξουμε ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Ας δούμε ένα δεύτερο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.5 *Ένα Ανάγωγο Κλάσμα.*

Θεωρούμε ότι οι αριθμοί a και b είναι αμοιβαίως πρώτοι. Θα αποδείξουμε πως τότε το κλάσμα $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b}$ είναι ανάγωγο.

Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι το κλάσμα

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{a(a-b)}{b^2} \end{aligned}$$

δεν είναι ανάγωγο. Έτσι, υπάρχει κοινός διαιρέτης δ των όρων $a(a-b)$ και b^2 πρώτος και διάφορος της μονάδας. Αφού ο δ διαιρεί τον b^2, αυτός θα διαιρεί και τον b. Αφού οι a και b είναι αμοιβαίως πρώτοι, έπεται ότι ο δ δεν διαιρεί τον a. Αφού ο δ διαιρεί τον $a(a-b)$, αυτό συνεπάγεται ότι ο δ διαιρεί τον $a - b$. Αφού όμως ο δ διαιρεί και τον a, έπεται ότι ο δ διαιρεί και το άθροισμα $(a - b) + b = a$. Αντίφαση. $\square$

1.4.4 Επαγωγικές Αποδείξεις

Οι επαγωγικές αποδείξεις αποτελούν μία ειδική κατηγορία αποδείξεων η οποία είναι ουσιώδης όταν κανείς ασχολείται με αντικείμενα τα οποία ορίζονται αναδρομικά, κάτι συνηθέστατο στην Επιστήμη Υπολογιστών. Πολλές από τις πλέον οικείες επαγωγικές αποδείξεις ασχολούνται με τους ακεραίους και τις ιδιότητές τους, και προχωρούν με επαγωγή στους ακεραίους. Ωστόσο, στη Θεωρία Υπολογισμού, χρειαζόμαστε συχνά επαγωγικές αποδείξεις για αναδρομικά ορισμένες δομές διαφόρων τύπων, όπως, για παράδειγμα, τα δένδρα, οι γλώσσες (δείτε Παράγραφο 3.1), οι κανονικές εκφράσεις (δείτε Κεφάλαιο 7.2), κ.ο.κ. Στην παράγραφο αυτή, θα ασχοληθούμε πρώτα με επαγωγή στους ακεραίους. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη δομική επαγωγή.

Επαγωγή στους Ακεραίους

Η *Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής* διατυπώνεται σε δύο δυνατές μορφές, οι οποίες είναι γνωστές ως η *ασθενής μορφή* και η *ισχυρή μορφή* αντίστοιχα. Η διατύπωση της ασθενούς μορφής έχει ως εξής:

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής (Ασθενής Μορφή): Έστω μαθηματική πρόταση $\Pi(n)$ με μια θετική ακέραιη παράμετρο n, η οποία ικανοποιεί τις εξής δύο συνθήκες:

- Η $\Pi(1)$ είναι αληθής.
- Για οποιοδήποτε ακέραιο $n \geq 1$, αν η $\Pi(n)$ είναι αληθής, τότε και η $\Pi(n+1)$ είναι αληθής.

Τότε, η πρόταση $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο n.

Πολύ συχνά, η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής καλείται και *Τελεία Επαγωγή* ή *Πλήρης Επαγωγή*.[§] Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής είναι η ίδια ένα μαθηματικό θεώρημα. Θα δώσουμε δύο διαφορετικές αποδείξεις της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής. Η πρώτη απόδειξη βασίζεται στο Αξίωμα των Φυσικών Αριθμών. Η δεύτερη απόδειξη χρησιμοποιεί το Αξίωμα του Ελαχίστου Φυσικού Αριθμού.

Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής εφαρμόζεται επί θεωρημάτων τα οποία πρόκειται να αποδειχθούν αληθή για όλες τις διαδοχικές περιπτώσεις οι οποίες αντιστοιχούν κατά

[§]Δείτε, για παράδειγμα, το Κεφάλαιο II στο ιστορικό πλέον, λυκειακό σύγγραμμα ¶λγεβρας που έγραψε ο Χρίστος Μπαρμπαστάθης το 1948.

σειρά στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Μία απόδειξη που χρησιμοποιεί την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής διαχωρίζεται κατά κανόνα σε τρία μέρη:

- *Βάση:* Εκεί εξετάζεται (και αποδεικνύεται) η πρόταση $\Pi(1)$.
- *Επαγωγική υπόθεση:* Υποθέτουμε ότι η πρόταση $\Pi(n)$ είναι αληθής για αυθαίρετο θετικό ακέραιο n.
- *Επαγωγικό βήμα:* Στηριζόμενοι στην επαγωγική υπόθεση, αποδεικνύουμε ότι η πρόταση $\Pi(n+1)$ είναι αληθής.

Σημειώνουμε τέλος οτι στη βάση της επαγωγής μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος a αντί της μονάδας. Στην περίπτωση αυτή, θα έχουμε αποδείξει ότι η μαθηματική πρόταση $\Pi(n)$ είναι αληθής για όλους τους φυσικούς αριθμούς από a και άνω. Είμαστε τώρα έτοιμοι να δούμε ένα πρώτο παράδειγμα εφαρμογής της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής.

Παράδειγμα 1.6 *Πρώτη Επαγωγική Απόδειξη.*

Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής (ασθενής μορφή) για να αποδείξουμε τη μαθηματική πρόταση $P(n)$:

> $P(n)$: Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, ο αριθμός $\phi(n) = 4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ είναι διαιρετός διά του 7.

Βάση: ΄Εχουμε ότι $\phi(1) = 4^3 + 3^3 = 64 + 27 = 91 = 7 \cdot 13$, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 7. ¶ρα, η πρόταση $P(1)$ είναι αληθής.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάποιο ακέραιο $n \geq 1$, η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι ο αριθμός $\phi(n)$ είναι διαιρετός διά του 7.

Επαγωγικό βήμα: Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση $P(n+1)$ είναι αληθής. Θα αποδείξουμε, δηλαδή, ότι ο αριθμός $\phi(n+1)$ είναι διαιρετός διά του 7. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\phi(n+1) &= 4^{2(n+1)+1} + 3^{2(n+1)+1} \\
&= 4^{(2n+1)+2} + 3^{(2n+1)+2} \\
&= 4^2 \cdot 4^{2n+1} + 3^2 \cdot 3^{2n+1} \\
&= (7+3^2) \cdot 4^{2n+1} + 3^2 \cdot 3^{2n+1} \\
&= 7 \cdot 4^{2n+1} + 3^2 \cdot (4^{2n+1} + 3^{2n+1}) \\
&= 7 \cdot 4^{2n+1} + 3^2 \cdot \phi(n) \, .
\end{aligned}$$

Αφού ο αριθμός $\phi(n)$ είναι διαιρετός διά του 7, έπεται ότι και ο αριθμός $7 \cdot 4^{2n+1} + 3^2 \phi(n) = \phi(n+1)$ είναι διαιρετός διά του 7.

Έπεται τώρα από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής (ασθενής μορφή) ότι η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για κάθε ακέραιο $n \geq 1$. $\square$

Συνεχίζουμε με ένα δεύτερο παράδειγμα εφαρμογής της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής.

Παράδειγμα 1.7 *Δεύτερη Επαγωγική Απόδειξη.*

Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής (ασθενής μορφή) για να αποδείξουμε τη μαθηματική πρόταση $\Pi(\rho)$:

> $\Pi(\rho)$: Για κάθε ακέραιο $\rho \geq 1$, το γινόμενο ρ διαδοχικών ακεραίων είναι διαιρετό διά του $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \rho = \rho!$ (ρ *παραγοντικό*).

Έστω $\Gamma_{\nu,\rho}$ το γινόμενο ρ διαδοχικών ακεραίων ο μικρότερος των οποίων είναι ο ακέραιος ν. Με χρήση του συμβολισμού $\Gamma_{\nu,\rho}$, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τη μαθηματική πρόταση $\Pi(\rho)$ ως μία (ισοδύναμη) μαθηματική πρόταση η οποία εμπεριέχει δύο θετικούς ακέραιους, τους ν και ρ, ως παραμέτρους.

> $\Pi(\nu, \rho)$: Για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων $\nu \geq 1$ και $\rho \geq 1$, η ποσότητα $\Gamma_{\nu,\rho}$ διαιρείται από το ρ παραγοντικό.

Η προφανής παρατήρηση είναι πως έχουμε τώρα να δείξουμε μία μαθηματική πρόταση με δύο παραμέτρους, ενώ η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής εφαρμόζεται σε μαθηματικές προτάσεις με μία παράμετρο. Πως θα αποδείξουμε λοιπόν την πρόταση $\Pi_{\nu,\rho}$; Θα επιχειρήσουμε *διπλή επαγωγή* -- δηλαδή, θα έχουμε μία επαγωγή "φωλιασμένη" μέσα σε μία άλλη επαγωγή. Συχνά αναφερόμαστε στις δύο επαγωγές ως *εσωτερική επαγωγή* και *εξωτερική επαγωγή,* κατά τον αυτονόητο τρόπο.

Πριν ξεκινήσουμε τη διπλή επαγωγή, θα επιχειρήσουμε ορισμένες παρατηρήσεις οι οποίες θα διευκολύνουν την επαγωγική μας απόδειξη στη συνέχεια. Έχουμε ότι

$$\Gamma_{\nu,\rho+1} \;=\; \nu \cdot (\nu+1) \cdot \ldots \cdot (\nu+\rho)$$

και

$$\Gamma_{\nu+1,\rho+1} \;=\; (\nu+1) \cdot (\nu+2) \cdot \ldots \cdot (\nu+1+\rho)\,.$$

Ώστε,

$$\begin{aligned}\nu\Gamma_{\nu+1,\rho+1} &= (\nu+1+\rho)\Gamma_{\nu,\rho+1}\\ &= \nu\Gamma_{\nu,\rho+1} + (\rho+1)\Gamma_{\nu,\rho+1}\,.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu+1,\rho+1} &= \Gamma_{\nu,\rho+1} + (\rho+1) \cdot \frac{\Gamma_{\nu,\rho+1}}{\nu}\\ &= \Gamma_{\nu,\rho+1} + (\rho+1) \cdot \Gamma_{\nu+1,\rho}\,.\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να επιχειρήσουμε τη διπλή επαγωγή. Η εξωτερική επαγωγή θα είναι επαγωγή πάνω στο ν, ενώ η εσωτερική επαγωγή θα είναι επαγωγή πάνω στο ρ.

Με επαγωγή πάνω στο ν.

Βάση: Στη βάση της επαγωγής όπου $\nu = 1$, θα δείξουμε ότι η πρόταση $\Pi(1,\rho)$ είναι αληθής για κάθε ακέραιο $\rho \geq 1$. Έχουμε ότι $\Gamma_{1,\rho} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \rho$, το οποίο διαιρείται τετριμμένα από το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \rho$ για κάθε ακέραιο $\rho \geq 1$.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάποιο ακέραιο $\nu \geq 1$, η πρόταση $\Pi(\nu,\rho)$ είναι αληθής για κάθε ακέραιο $\rho \geq 1$. Υποθέτουμε δηλαδή ότι για κάθε ακέραιο $\rho \geq 1$, η ποσότητα $\Gamma(\nu,\rho)$ είναι διαιρετή διά του γινομένου $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \rho$.

Επαγωγικό βήμα: Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση $\Pi(\nu+1,\rho)$ είναι αληθής για κάθε ακέραιο $\rho \geq 1$. Με επαγωγή πάνω στο ρ.

Βάση: Στη βάση της επαγωγής όπου $\rho = 1$, έχουμε ότι $\Gamma_{\nu+1,1} = \nu + 1$, το οποίο διαιρείται τετριμμένα από το $\rho! = 1$.
Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάποιο ακέραιο $\rho \geq 1$, η πρόταση $\Pi(\nu + 1, \rho)$ είναι αληθής. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η ποσότητα $\Gamma_{\nu+1,\rho}$ διαιρείται από το $\rho!$.
Επαγωγικό βήμα: Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση $\Pi(\nu + 1, \rho + 1)$ είναι αληθής. Θα αποδείξουμε δηλαδή ότι η ποσότητα $\Gamma_{\nu+1,\rho+1}$ είναι διαιρετή από το $(\rho + 1)!$ ($\rho + 1$ παραγοντικό). Ας θυμηθούμε ότι

$$\Gamma_{\nu+1,\rho+1} = \Gamma_{\nu,\rho+1} + (\rho + 1) \cdot \Gamma_{\nu+1,\rho}\,.$$

Η επαγωγική υπόθεση της εξωτερικής επαγωγής εξασφαλίζει ότι η ποσότητα $\Gamma_{\nu,\rho+1}$ διαιρείται από το $(\rho + 1)!$. Η επαγωγική υπόθεση της εσωτερικής επαγωγής εξασφαλίζει ότι η ποσότητα $\Gamma_{\nu+1,\rho}$ διαιρείται από το $\rho!$. Έτσι, η ποσότητα $(\rho + 1) \cdot \Gamma_{\nu+1,\rho}$ διαιρείται από το $(\rho + 1) \cdot \rho! = (\rho + 1)!$. Έχουμε λοιπόν συνολικά ότι το άθροισμα $\Gamma_{\nu,\rho+1} + (\rho + 1) \cdot \Gamma_{\nu+1,\rho}$ διαιρείται από το $(\rho + 1)!$.
Έπεται τώρα από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ότι η πρόταση $\Pi(\nu + 1, \rho)$ είναι αληθής για κάθε ακέραιο $\rho \geq 1$.

Έπεται τώρα από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ότι η πρόταση $\Pi(\nu, \rho)$ είναι αληθής για κάθε ακέραιο $\nu \geq 1$ και για κάθε ακέραιο $\rho \geq 1$. □

Η διατύπωση της ισχυρής μορφής έχει ως εξής:

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής (Ισχυρή Μορφή): Έστω μαθηματική πρόταση $\Pi(n)$ με μια θετική ακέραιη παράμετρο n, η οποία ικανοποιεί τις εξής δύο συνθήκες:

- Η $\Pi(1)$ είναι αληθής.
- Για κάθε ακέραιο $n > 1$, αν η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε ακέραιο k, όπου $1 \leq k < n$, τότε η $\Pi(n)$ είναι αληθής.

Τότε, η πρόταση $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο n.

Οι αποδείξεις τόσο της ασθενούς όσο και της ισχυρής μορφής της μαθηματικής επαγωγής χρησιμοποιούν την *αρχή της καλής διάταξης* για το σύνολο των ακεραίων, η οποία βεβαιώνει πως κάθε μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.

Δομική Επαγωγή

Στη Θεωρία Υπολογισμού, αφθονούν μαθηματικές δομές οι οποίες ορίζονται επαγωγικά. Ως εκ του ορισμού τους, οι ιδιότητες των επαγωγικών αυτών δομών προσκαλούν κατά το φυσικό τρόπο επαγωγικές αποδείξεις. Η προφανής δυσκολία για τέτοιου είδους αποδείξεις είναι ότι οι επαγωγικές αποδείξεις που ήδη γνωρίζουμε χρησιμοποιούν επαγωγή στους ακεραίους, ενώ ο ορισμός τέτοιων δομών χρησιμοποιεί *δομική επαγωγή,* δηλαδή επαγωγή πάνω στην ίδια τη δομή. Έτσι, χρειαζόμαστε να επεκτείνουμε τις επαγωγικές τεχνικές που ήδη γνωρίζουμε ώστε να μπορούν να καλύψουν και τέτοιες περιπτώσεις. Αυτό και θα κάνουμε στο υπόλοιπο της παραγράφου.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. Αποδείξτε ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

   Λύση: Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι πεπερασμένο. Έστω ότι αυτό είναι

   $$\mathsf{Primes} \;=\; \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\,,$$

   για κάποιο φυσικό αριθμό $n > 1$. Σχηματίζουμε τον αριθμό

   $$a \;=\; a_1 a_2 \ldots a_n + 1\,,$$

   ο οποίος είναι προφανώς διάφορος από τους αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

   Αν ο αριθμός a είναι πρώτος, τότε το ζητούμενο δείχθηκε αφού βρέθηκε πέραν των αριθμών $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και άλλος πρώτος διάφορος από αυτούς. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο αριθμός a είναι σύνθετος. Έστω $\delta > 1$ ένας διαιρέτης του αριθμού a. Θα δείξουμε ότι ο δ είναι διάφορος από τους αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_n$, οπότε το ζητούμενο θα έχει πάλι δειχθεί. Υποθέτουμε λοιπόν, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι ο δ είναι ένας από τους αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Έπεται ότι ο δ διαιρεί το γινόμενο $a_1 a_2 \ldots a_n$. Αφού ο δ διαιρεί και τον a, έπεται ότι αυτός θα διαιρεί και τη διαφορά $a - a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Έτσι, $\delta \leq 1$. Αντίφαση. ♠

2. Θεωρούμε αυθαίρετο ζεύγος μη αριθμησίμου συνόλου S και αριθμησίμου συνόλου T. Αποδείξτε τότε ότι η διαφορά $S \setminus T$ είναι μη αριθμήσιμο σύνολο.

3. Αποδείξτε με επαγωγή ότι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου με n στοιχεία έχει ακριβώς 2^n στοιχεία.

4. Αποδείξτε με επαγωγή την παρακάτω πρόταση: Έστω ακέραιος $n \geq 10$. Τότε, $2^n > n^3$.

5. Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 1$, ισχύει ότι

   $$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \;=\; \tfrac{n}{n+1}\,.$$

6. Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, ο φυσικός αριθμός $\phi(n) = 7^{2n} + 16n - 1$ είναι διαιρετός διά του 64.

7. Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, το γινόμενο $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n$ είναι διαιρετό διά του 2^n.

8. Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, ο φυσικός αριθμός $\phi(n) = x^{2n-1} + y^{2n-1}$, όπου οι x και y είναι φυσικοί αριθμοί, είναι διαιρετός διά του $x + y$.

9. Αποδείξτε με επαγωγή ότι κάθε θετικός ακέραιος n μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα καταλλήλων δυνάμεων του 2.

10. Αποδείξτε με επαγωγή την παρακάτω πρόταση: Έστω ακέραιος $n \geq 2$ και πραγματικοί αριθμοί $0 < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n < 1$. Τότε, $(1 - \alpha_1)\,(1 - \alpha_2)\ \ldots, (1 - \alpha_n) > 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n$.

11. Αποδείξτε με επαγωγή την *ανισότητα του Weierstrass*:

    Έστω ακέραιος $n \geq 2$ και πραγματικοί αριθμοί $0 < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n < 1$. Τότε,

    $$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n) \quad > \quad 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\,.$$

    Σαν εφαρμογές της ανισότητας του Weierstrass, αποδείξτε τις ακόλουθες προτάσεις:

    (a) Έστω ακέραιος $n \geq 2$ και πραγματικός αριθμός a, όπου $0 < a < 1$. Τότε, $(1+a)^n > 1+na$. (Η ανισότητα αυτή είναι γνωστή ως *ανισότητα του Bernoulli*.)

    Σαν εφαρμογή της ανισότητας του Bernoulli, αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει ότι

    $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad > \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\,.$$

    (b) Υπάρχει πραγματικός αριθμός $n \geq 2$ τέτοιος ώστε $(1.001)^n > 100$.

12. Αποδείξτε με επαγωγή την παρακάτω γεωμετρική ιδιότητα που έχει κάθε διάταξη ευθειών στο επίπεδο:

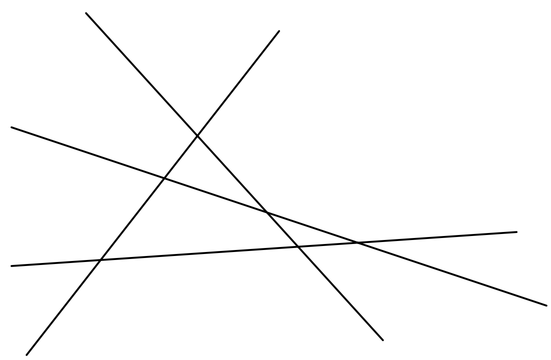
Για αυθαίρετο σύνολο από n ευθείες στο επίπεδο, όπου $n \geq 1$ ακέραιος, είναι δυνατό να χρωματίσουμε με δύο μόνο χρώματα (για παράδειγμα, μαύρο και άσπρο) τις περιοχές που αυτές προσδιορίζουν έτσι ώστε γειτονικές περιοχές να λάβουν διαφορετικά χρώματα.

Λύση: Χρησιμοποιούμε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής (ασθενής μορφή). Με επαγωγή πάνω στο n.

Βάση: Έστω ότι $n = 1$. Τότε, έχουμε μόνο μία ευθεία η οποία διαχωρίζει το επίπεδο σε δύο (γειτονικές) περιοχές. Χρησιμοποιούμε τα δύο χρώματα για να χρωματίσουμε τις δύο περιοχές με διαφορετικό χρώμα την κάθε μία.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάποιο συγκεκριμένο n ο ισχυρισμός ισχύει.

Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε αυθαίρετο σύνολο από $n+1$ ευθείες στο επίπεδο. Δείτε Σχήμα. Θα αποδείξουμε ότι είναι δυνατό να χρωματίσουμε με μαύρο και άσπρο τις περιοχές που

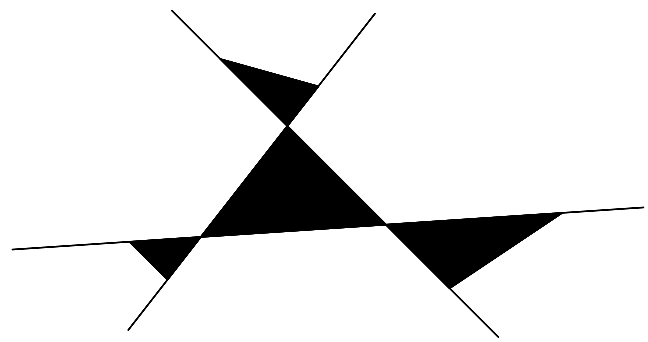


Σχήμα 1.2: Οι $n+1$ ευθείες στο επίπεδο και οι περιοχές που αυτές ορίζουν.

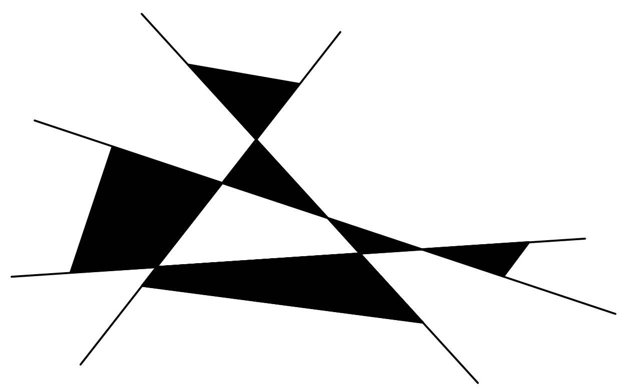
αυτές προσδιορίζουν έτσι ώστε γειτονικές περιοχές να λάβουν διαφορετικά χρώματα.

Αφαιρούμε τη μία από αυτές τις ευθείες, έστω την ευθεία 1, έτσι ώστε να παραμείνουν μόνο n ευθείες. Η επαγωγική υπόθεση συνεπάγεται ότι είναι δυνατό να χρωματίσουμε τις περιοχές που ορίζουν οι n αυτές ευθείες (με μαύρο και άσπρο) έτσι ώστε γειτονικές περιοχές να έχουν διαφορετικό χρώμα. Δείτε Σχήμα.

Επαναφέρουμε τώρα την ευθεία 1. Η ευθεία 1 ορίζει δύο περιοχές την *αριστερή* και τη *δεξιά*. Αλλάζουμε τα χρώματα στην αριστερή πλευρά (δηλαδή, αντικαθιστούμε το μαύρο με άσπρο και το μαύρο με άσπρο παντού στην αριστερή πλευρά). Δείτε Σχήμα.



Σχήμα 1.3: ΄Ενας χρωματισμός με δύο χρώματα για τις περιοχές που ορίζουν οι n ευθείες.



Σχήμα 1.4: Η επέκταση του χρωματισμού για τις n ευθείες όταν επαναφέρουμε την ευθεία 1

Τώρα όλες οι περιοχές που ορίζουν οι $n+1$ ευθείες είναι χρωματισμένες (με μαύρο ή άσπρο). Ισχυριζόμαστε ότι οποιεσδήποτε δύο γειτονικές περιοχές είναι χρωματισμένες με διαφορετικό χρώμα. Πράγματι:

- ΄Εστω ότι οι δύο περιοχές βρίσκονται στη δεξιά πλευρά της ευθείας 1. Τότε, η επαγωγική υπόθεση συνεπάγεται ότι χρωματίστηκαν αρχικά με διαφορετικό χρώμα. Αφού τα χρώματά τους δεν άλλαξαν με την επαναφορά της ευθείας 1, έπεται ότι παρέμειναν τελικά χρωματισμένες με διαφορετικό χρώμα.
- ΄Εστω ότι οι δύο περιοχές βρίσκονται στην αριστερή πλευρά της ευθείας 1. Τότε, η

επαγωγική υπόθεση συνεπάγεται ότι χρωματίστηκαν αρχικά με διαφορετικό χρώμα. Αφού τα χρώματά τους άλλαξαν και τα δύο με την επαναφορά της ευθείας 1, έπεται ότι παρέμειναν τελικά χρωματισμένες με διαφορετικό χρώμα.

- Έστω ότι οι δύο περιοχές βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές της ευθείας 1. Τότε, το κοινό τους σύνορο είναι τμήμα της ευθείας 1. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο περιοχές αποτελούσαν μία κοινή περιοχή πριν επαναφέρουμε την ευθεία 1. Έτσι, οι δύο περιοχές είχαν το ίδιο χρώμα πριν την επαναφορά της ευθείας 1. Μετά την επαναφορά της ευθείας 1, η μία από αυτές (αυτή που βρίσκεται στη δεξιά πλευρά) διατήρησε το αρχικό της χρώμα, ενώ η άλλη (αυτή που βρίσκεται στην αριστερή πλευρά) άλλαξε χρώμα. Έπεται ότι οι δύο περιοχές είναι τελικά χρωματισμένες με διαφορετικό χρώμα.

Έχουμε αποδείξει λοιπόν ότι σε κάθε περίπτωση γειτονικές περιοχές είναι χρωματισμένες με διαφορετικά χρώματα. Αυτό συμπληρωνει την απόδειξη του επαγωγικού βήματος.

Η πρόταση έπεται τώρα από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής (ασθενής μορφή). ♠

13. Θεωρούμε γεωμετρική πρόοδο $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ με θετικούς όρους. Κατασκευάζουμε αριθμητική πρόοδο $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ έτσι ώστε $\alpha_1 = \gamma_1$ και $\alpha_2 = \gamma_2$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \geq 3$, $\alpha_n < \gamma_n$.

    Υπόδειξη: Αποδείξτε και χρησιμοποιείστε κατάλληλα την εξής βοηθητική πρόταση:

    > Αν σε μία *αναλογία,*[¶] κάποιος όρος είναι μεγαλύτερος των τριών άλλων, τότε το άθροισμα του μεγίστου αυτού όρου και του ελαχίστου όρου είναι μεγαλύτερο του αθροίσματος των δύο άλλων.

    Πότε ισχύει η ισότητα;

14. Θεωρούμε ακολουθία αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ τέτοια ώστε $\alpha_2 - \alpha_1 \leq \alpha_3 - \alpha_2 \leq \ldots$. Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 1$,

$$(n+1)(\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n}) \quad \leq \quad n\,(\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1})\,.$$

15. Ένα *πρόγραμμα ευθείας γραμμής* είναι μια πεπερασμένη ακολουθία εντολών

$$\Pi \quad = \quad \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\kappa\,,$$

όπου κάθε *εντολή* π_i, $1 \leq i \leq \kappa$, έχει τη μορφή

$$\pi_i \quad : \quad x_{i_{out}} \longleftarrow x_{i_{in1}} \circ x_{i_{in2}}\,,$$

όπου:

[¶]*Αναλογία* είναι μία ισότητα μεταξύ ακεραίων της μορφής $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

- Τα $x_{i_{out}}$, $x_{i_{in1}}$ και $x_{i_{in2}}$ προέρχονται από μια πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{X}$ από *καταχωρητές,* κάθε ένας από τους οποίους φέρει αρχικά (δηλαδή, πριν από την εκτέλεση του προγράμματος) μια αυθαίρετη ακέραια τιμή. Το $x_{i_{out}}$ είναι ο *καταχωρητής εξόδου* της εντολής π_i, ενώ τα $x_{i_{in1}}$ και $x_{i_{in2}}$ είναι οι *καταχωρητές εισόδου* της ίδιας εντολής.
- $\circ \in \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\}$, όπου $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$ είναι οι δυαδικοί τελεστές της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, αντίστοιχα.

Κάθε εντολή $\pi_i : x_{i_{out}} \longleftarrow x_{i_{in1}} \circ x_{i_{in2}}$, όπου $1 \leq i \leq \kappa$, έχει ως αποτέλεσμα την *ανάθεση* της τιμής $x_{i_{in1}} \circ x_{i_{in2}}$ στον καταχωρητή εξόδου $x_{i_{out}}$. ($x_{i_{in1}}$ και $x_{i_{in2}}$ είναι οι τιμές των αντιστοίχων καταχωρητών εισόδου κατά την εκτέλεση της εντολής π_i.)

Το πρόγραμμα Π *υπολογίζει* την τιμή που ανατίθεται στον καταχωρητή εξόδου $x_{\kappa_{out}}$ κατά την εκτέλεση της εντολής π_κ. Η τιμή, λοιπόν, που υπολογίζεται από το πρόγραμμα Π είναι η έξοδος της τελικής εντολής του.

Αποδείξτε με επαγωγή ότι η τιμή που υπολογίζεται από το πρόγραμμα Π είναι ένας ρητός αριθμός.

Λύση: Με επαγωγή πάνω στο κ, το *μήκος* του προγράμματος Π.

Βάση: Θεωρούμε την περίπτωση όπου $\kappa = 1$, δηλαδή το πρόγραμμα Π περιέχει μόνο μία εντολή, την π_1. Αρχικά, όλοι οι καταχωρητές φέρουν τις αρχικές τιμές τους, οι οποίες είναι ακέραιοι. ´Ετσι, η τιμή που υπολογίζεται από το πρόγραμμα Π στην περίπτωση αυτή, δηλαδή η έξοδος της εντολής π_1, είναι το άθροισμα, διαφορά, γινόμενο ή πηλίκο δύο ακεραίων, η οποία είναι ρητός αριθμός.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε ακέραιο $m \leq \kappa$, η τιμή που υπολογίζεται από κάθε πρόγραμμα ευθείας γραμμής Π μήκους m είναι ρητός αριθμός.

Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε αυθαίρετο πρόγραμμα ευθείας γραμμής Π μήκους $\kappa+1$. ´Εστω ότι η τελευταία εντολή του προγράμματος Π έχει τη μορφή

$$\pi_{\kappa+1} \quad : \quad x_{(\kappa+1)_{out}} \longleftarrow x_{(\kappa+1)_{in1}} \circ x_{(\kappa+1)_{in2}} \, .$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για την τιμή που φέρει καταχωρητή εισοδου $x_{(\kappa+1)_{in1}}$ κατά την εκτέλεση της εντολής $s_{\kappa+1}$:

- Η τιμή αυτή είναι η αρχική τιμή του καταχωρητή -- δηλαδή, ο καταχωρητής $x_{(\kappa+1)_{in1}}$ δεν υπήρξε καταχωρητής εξόδου κάποιας ενωρίτερης εντολής. Τότε, η τιμή αυτή είναι κάποιος ακέραιος.

- Η τιμή αυτή *δεν* είναι η αρχική τιμή του καταχωρητή -- δηλαδή, ο καταχωρητής $x_{(\kappa+1)_{out}}$ υπήρξε καταχωρητής εξόδου κάποιας ενωρίτερης εντολής του προγράμματος Π και έτσι η τιμή που φέρει έχει μεταβληθεί και είναι διάφορη της αρχικής τιμής. Έστω s_m η τελευταία εντολή με καταχωρητή εξόδου τον καταχωρητή $x_{(\kappa+1)_{out}}$.

  Θεωρούμε το πρόγραμμα $s_1, \ldots, s_m$. Αφού $m< \kappa$, η επαγωγική υπόθεση συνεπάγεται ότι η τιμή που φέρει ο καταχωρητής $x_{(\kappa+1)_{in1}}$ ως αποτέλεσμα εκτέλεσης της εντολής s_m είναι ρητός αριθμός. Ο ορισμός της εντολής s_m συνεπάγεται ότι αυτή είναι και η τιμή που φέρει ο καταχωρητής $x_{(\kappa+1)_{in1}}$ κατά την εκτέλεση της εντολής $s_{\kappa+1}$.

Έχουμε λοιπόν ότι σε κάθε περίπτωση, η τιμή που φέρει ο καταχωρητής εισόδου $x_{(\kappa+1)_{in1}}$ κατά την εκτέλεση της εντολής $s_{\kappa+1}$ είναι ρητός αριθμός. Όμοια δείχνουμε ότι σε κάθε περίπτωση, η τιμή που φέρει ο καταχωρητής εισόδου $x_{(\kappa+1)_{in2}}$ κατά την εκτέλεση της εντολής $s_{\kappa+1}$ είναι ρητός αριθμός. Έτσι, η τιμή που φέρει ο καταχωρητής εξόδου $x_{(\kappa+1)_{out}}$ ως αποτέλεσμα εκτέλεσης της εντολής $s_{\kappa+1}$ είναι το άθροισμα, διαφορά, γινόμενο η πηλίκο δύο ρητών σριθμών, το οποίο είναι κσι πάλι ρητός αριθμός. ♠

1.5 ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ

Η κύρια χρήση της τεχνικής της Διαγωνιοποίησης στη Θεωρία Υπολογισμού είναι σε αποδείξεις ότι δύο σύνολα δεν είναι ισοπλήθη. Τέτοιες αποδείξεις εγκαθιδρύουν τελικά την *ανυπαρξία* ενός μαθηματικού αντικειμένου με κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα.

Σε αδρές γραμμές, η τεχνική της διαγωνιοποίησης έχει ως εξής. Έστω ότι δίδεται σε μας μία άπειρη συλλογή από μαθηματικά αντικείμενα (για παράδειγμα, σύνολα, συναρτήσεις, κ.ο.κ.) $A_0, A_1, \ldots$, και ότι μας ζητείται να κατασκευάσουμε ένα νέο αντικείμενο B το οποίο είναι διαφορετικό από κάθε ένα από τα δοθέντα αντικείμενα. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το αντικείμενο B αποτελείται από ένα άπειρο αριθμό από μέρη, όπως και κάθε αντικείμενο A_i στην άπειρη συλλογή. Η τεχνική της διαγωνιοποίησης κατασκευάζει το αντικείμενο B μέρος προς μέρος. Η κατασκευή είναι προσεκτική ώστε το μέρος i του αντικειμένου B να είναι διαφορετικό από το αντίστοιχο μέρος (δηλαδή, το μέρος i) του αντικειμένου A_i, όπου $i \geq 0$. Όταν η άπειρη αυτή κατασκευή έχει ολοκληρωθεί, θα έχουμε λάβει ένα αντικείμενο B το οποίο είναι διαφορετικό από κάθε αντικείμενο A_i, $i \geq 0$. Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα.

Θεώρημα 1.1 *Το σύνολο $\mathcal{G}$ των συναρτήσεων $g : \mathbf{N} \rightarrow \{0, 1\}$ είναι μη αριθμήσιμο.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι το σύνολο $\mathcal{G}$ είναι αριθμήσιμο. Τότε, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{G}$. Η αμφιμονοσήμαντη αυτή αντιστοιχία προσδιορίζει την απαρίθμηση $g_0, g_1, \ldots$ των συναρτήσεων που περιέχονται στο σύνολο $\mathcal{G}$.

Ορίζουμε μία νέα συνάρτηση $g : \mathbf{N} \rightarrow \{0,1\}$ ως εξής:

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 0$, $g(n) = 1 - g_n(n)$.

Προφανώς, $g \in \mathcal{G}$. Αφού η συνάρτηση $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{G}$ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, έπεται ότι υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $g = g_n$. Αυτό συνεπάγεται ότι $g(n) = g_n(n)$. Από την κατασκευή της συνάρτησης g έχουμε ότι $g(n) \neq g_n(n)$. Αντίφαση. ∎

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.1, το σύνολο των μαθηματικών αντικειμένων ήταν το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N}$ στο σύνολο $\{0,1\}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση αποτελείται από πολλά μέρη, όπου κάθε μέρος είναι η τιμή της συνάρτησης σε κάποιο συγκεκριμένο φυσικό αριθμό. Ας πούμε ότι το n-ιοστό μέρος μίας τέτοιας συνάρτησης είναι η τιμή της στο φυσικό αριθμό $n \geq 0$. Το μαθηματικό αντικείμενο που κατασκευάσαμε ώστε να είναι διαφορετικό από κάθε τέτοια συνάρτηση ήταν η συνάρτηση g. Αυτή ή συνάρτηση ήταν διαφορετική από κάθε συνάρτηση g_n κατά το n-ιοστό μέρος.

Εύλογα θα διερωτηθείτε γιατί η τεχνική φέρει το συγκεκριμένο όνομα -- *διαγωνιοποίηση*. Η αιτιολόγηση του ονόματος δεν απαιτεί ιδιαίτερη φαντασία. Ας θεωρήσουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, όπου ο οριζόντιος άξονας θέρει τους φυσικούς αριθμούς, ενώ ο κατακόρυφος άξονας φέρει τις συναρτήσεις από το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N}$ στο σύνολο $\{0,1\}$. Έτσι, κάθε γραμμή του σχηματιζόμενου πίνακα αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση από το σύνολο $\mathcal{G}$. Κάθε τετράγωνο του σχηματιζόμενου πίνακα αναγράφει την τιμή της αντίστοιχης συνάρτησης στον αντίστοιχο φυσικό αριθμό. Έτσι, η *διαγώνιος* του πίνακα φέρει στο αυθαίρετο (n, g_n) τετράγωνό της την τιμή $g_n(n)$. Η κατασκευή μας τότε μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαγώνιος κατασκευή αφού χρησιμοποίησε τα τετράγωνα της διαγωνίου για να κατασκευάσει τη συνάρτηση g -- συγκεκριμένα, η τιμή της συνάρτησης g στον αυθαίρετο φυσικό αριθμό $i \geq 0$ ήταν ακριβώς $1 - g_i(i) \neq g_i(i)$. Χρησιμοποιήσαμε επομένως μία διαγώνια κατασκευή για να κατασκευάσουμε μία συνάρτηση g διφορετική από κάθε συνάρτηση σε οποιαδήποτε γραμμή του πίνακά μας.

Συνεχίζομε με ένα δεύτερο παράδειγμα εφαρμογής της τεχνικής της Διαγωνιοποίησης. Αυτό αφορά ένα μνημειώδες αποτέλεσμα στα Μαθηματικά -- ότι, δηλαδή, υπάρχουν περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί από ότι φυσικοί αριθμοί! Ας συμβολίσουμε ως $[0, 1]$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών που περιέχονται μεταξύ 0 και 1 (συμπεριλαμβανομένων). Ο συμβολισμός αυτός, ένας από τους βασικότερους στα Συνεχή Μαθηματικά, ακούει πολλές φορές το όνομα *κλειστό διάστημα*. Θα δείξουμε ότι:

Θεώρημα 1.2 *Το κλειστό διάστημα* $[0, 1]$ *είναι μη αριθμήσιμο.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι το *κλειστό διάστημα* $[0, 1]$, είναι αριθμήσιμο. Τότε, υπάρχει αμφιμονοσήμαντος αντιστοιχία $f : \mathbf{N} \rightarrow [0, 1]$. Η αμφιμονοσήμαντη αυτή αντιστοιχία προσδιορίζει την απαρίθμηση

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0.\psi_{00}\psi_{01}\psi_{02}\ldots \\ f(1) & = & 0.\psi_{10}\psi_{11}\psi_{12}\ldots \\ f(2) & = & 0.\psi_{20}\psi_{21}\psi_{22}\ldots \\ \vdots & & \end{array}$$

των πραγματικών αριθμών που περιέχονται μεταξύ 0 και 1, όπου $\psi_{kl} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για κάθε ζεύγος από δείκτες $k, l \geq 0$. (Έχουμε, δηλαδή, παραστήσει τους αριθμούς αυτούς στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.)

Κατασκευάζουμε τώρα τον αριθμο $\psi = 0.\psi_0\psi_1\psi_2$ (ακριβέστερα, μία παράστασή του στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης) έτσι ώστε για κάθε δείκτη $k \geq 0$, $\psi_k \neq \psi_{kk}$. Δηλαδή, για κάθε δείκτη $k \geq 0$, το k-οστό δεκαδικό ψηφίο στην παράσταση του αριθμού ψ στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι διαφορετικό από το k-οστό δεκαδικό ψηφίο του πραγματικού εκείνου αριθμού στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ ο οποίος απαριθμείται κατά την αμφιμονοσήμαντο αντιστοιχία f ως ο k-οστός τέτοιος αριθμός.

> Πιο συγκεκριμένα, για κάθε δείκτη $k \geq 0$, το k-ιοστό δεκαδικό ψηφίο στην παράσταση του αριθμού ψ στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι 6 αν το k-ιοστό δεκαδικό ψηφίο του πραγματικού εκείνου αριθμού στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ ο οποίος απαριθμείται κατά την αμφιμονοσήμαντο αντιστοιχία f ως ο k-οστός τέτοιος αριθμός, και 6 αλλοιώς.

Προφανώς, ο (πραγματικός) αριθμός ψ ανήκει στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$. Αφού η $f : \mathbf{N} \rightarrow [0, 1]$ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, έπεται ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $\nu \geq 0$ τέτοιος ώστε $f(\nu) = \sigma$. Αφού $f(\nu) = 0.\psi_{\nu 1}\psi_{\nu 2}\ldots$, αυτό συνεπάγεται ότι $\psi_{\nu\nu} = \psi_\nu$. Αντίφαση. ■

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2, παρατηρούμε ότι η κατασκευή του πραγματικού αριθμού ψ εξασφαλίζει ότι

Προχωράμε ώστε να δείξουμε:

Θεώρημα 1.3 (Θεώρημα του Cantor) *Το σύνολο $2^{\mathbf{N}}$ είναι μη αριθμήσιμο.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος του Cantor χρησιμοποιεί κατά κομψό τρόπο την τεχνική της εις άτοπο απαγωγής.

Απόδειξη: Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι το σύνολο $2^{\mathbf{N}}$ είναι αριθμήσιμο. Αφού αυτό είναι άπειρο, υποθέτουμε για την ακρίβεια ότι αυτό είναι απείρως αριθμήσιμο. Έτσι, υπάρχει μία συνάρτηση ένα-προς-ένα και επί

$$f \;:\; \mathbf{N} \to 2^{\mathbf{N}}\,.$$

Έστω, επομένως,

$$2^{\mathbf{N}} \;=\; \{\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots\}$$

η επαγόμενη από τη συνάρτηση f απαρίθμηση του συνόλου $2^{\mathbf{N}}$. Δηλαδή, για κάθε φυσικό αριθμό $i \geq 0$, $\mathcal{S}_i = f(i)$.

Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση f για να ορίσουμε τον (απείρου μεγέθους) πίνακα $\mathbf{F}$ ως εξής: Για οποιοδήποτε ζεύγος φυσικών αριθμών i και j,

$$\mathbf{F}[ij] \;=\; \begin{cases} \surd\,, & \text{αν } i \in \mathcal{S}_i (= f(i)) \\ \neg\,, & \text{αν } i \notin \mathcal{S}_i (= f(i)) \end{cases}\,.$$

Θεωρούμε τώρα το σύνολο

$$\mathcal{D} \;=\; \{i \in \mathbf{N} \;\mid\; i \notin \mathcal{S}_i\}\,.$$

Θα καλούμε το σύνολο $\mathcal{D}$ *διαγώνιο σύνολο* καθώς, προφανώς, αυτό σχηματίζεται αποκλειστικά με βάση τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα $\mathbf{F}$. Προφανώς, το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών. Έτσι, αυτό οφείλει να ταυτίζεται με κάποιο σύνολο $\mathcal{S}_k$, για κάποιο φυσικό αριθμό k. (Αυτό ισχύει καθώς η συνάρτηση f είναι επί.) Είμαστε τώρα έτοιμοι να θέσουμε την ερώτηση:

Διαγωνιοποιούσα Ερώτηση: Ισχύει ότι $k \in \mathcal{S}_k$;

Θα δείξουμε ότι αμφότερες οι δυνατές απαντήσεις στη Διαγωνιοποιούσα Ερώτηση οδηγούν σε αντίφαση:

- Έστω ότι $k \in \mathcal{S}_k$. Από τον ορισμό του $\mathcal{D}$, αυτό συνεπάγεται ότι $k \notin \mathcal{D}$. Αφού $\mathcal{D} = \mathcal{S}_k$, έπεται ότι $k \notin \mathcal{S}_k$. Αντίφαση.
- Έστω τώρα ότι $k \notin \mathcal{S}_k$. Από τον ορισμό του $\mathcal{D}$, αυτό συνεπάγεται ότι $k \in \mathcal{D}$. Αφού $\mathcal{D} = \mathcal{S}_k$, έπεται ότι $k \in \mathcal{S}_k$. Αντίφαση.

Αφού αμφότερες οι δυνατές απαντήσεις έχουν οδηγήσει σε αντίφαση, η απόδειξή μας είναι τώρα ολοκληρωμένη. ■

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. Αποδείξτε ότι το σύνολο όλων των ένα-προς-ένα και μονοτονικά αυξουσών συναρτήσεων $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ είναι μη αριθμήσιμο.

1.6 Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΣΤΕΡΩΝΑ

Μια άλλη τεχνική αποδείξεων βασίζεται στην Αρχή του Περιστερώνα, η οποία είναι ένα πολύ ισχυρό μαθηματικό εργαλείο, το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως και αποτελεσματικά σε πολλές περιοχές των Διακριτών Μαθηματικών.[‖] Η Θεωρία Υπολογισμού δεν αποτελεί εξαίρεση.

Η Αρχή του Περιστερώνα διακρίνεται αφενός για τη χαρακτηριστική της -- ίσως ανεπανάληπτη -- απλότητα, και αφετέρου για τη δυνατότητα που παρέχει για κομψές αποδείξεις, καθώς και για την απαλοιφή μακροσκελών αναλύσεων με εξέταση διαφόρων περιπτώσεων σε πολλές αποδείξεις. Ας συνεχίσουμε με τη διατύπωση και απόδειξη της Αρχής του Περιστερώνα.

[‖] Τα Διακριτά Μαθηματικά είναι ο κλάδος εκείνος των Μαθηματικών ο οποίος ασχολείται με προβλήματα που αφορούν τη διάταξη, απαρίθμηση ή μέτρηση διακριτών μεταξύ τους αντικειμένων, όπως, για παράδειγμα, γράφων ή αλγεβρικών δομών. Σε αντίθεση με την Κλασική Ανάλυση, οι έννοιες της εγγύτητας και συνέχειας δεν αποτελούν απαραίτητα εργαλεία για τα Διακριτά Μαθηματικά. Για μια εξαιρετική εισαγωγή στα Διακριτά Μαθηματικά δείτε το πρόσφατο βιβλίο των Matousek και Nesetril [?].

Θεώρημα 1.4 (Αρχή του Περιστερώνα) *Θεωρούμε σύνολο από n αντικείμενα το οποίο διαμερίζουμε σε m κλάσεις, όπου $n, m > 0$. Τότε, κάποια από τις m κλάσεις περιέχει τουλάχιστον $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ αντικείμενα.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι καθεμιά από τις n κλάσεις λιγότερα από $\frac{n}{m}$ αντικείμενα. Τότε, ο συνολικός αριθμός των αντικειμένων είναι μικρότερος από $m\frac{n}{m} \leq m\frac{n}{m} = n$. Αντίφαση. ∎

Πολλές φορές, τα αντικείμενα αναφέρονται ως *περιστέρια* και οι κλάσεις ως *φωλιές*. Τότε, η Αρχή του Περιστερώνα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

> Με οποιοδήποτε τρόπο και να τοποθετήσουμε n περιστέρια σε m φωλιές, υπάρχει πάντα μία τουλάχιστον φωλιά με τουλάχιστον $\frac{n}{m}$ περιστέρια.

Η Αρχή του Περιστερώνα συνεπάγεται ότι αν έχουμε $n+1$ φυσικούς αριθμούς που ανηκουν στο σύνολο $\{1, \ldots, n\}$, τότε δύο τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσοι μεταξύ τους. Με όμοιο τρόπο, σε κάθε ομάδα από δεκατρία άτομα, υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα. Ακόμη, σε κάθε ομάδα από εκατό άτομα, υπάχουν τουλάχιστον $\lceil \frac{100}{12} \rceil = 9$ άτομα που γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα. ΄Ολα αυτά τα παραδείγματα εφαρμογής της Αρχής του Περιστερώνα είναι πολύ απλά και αναμενόμενα. Ωστόσο, υπάρχουν και περιπτώσεις όπου η Αρχή του Περιστερώνα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει αναπάντεχα αποτελέσματα. Ας δούμε μερικά.

Παράδειγμα 1.8 *Πρώτη αναπάντεχη συνέπεια. Αποδείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός έχει ένα ακέραιο πολλαπλάσιο με δεκαδική παράσταση* $11\ldots100\ldots0$.

΄Εστω ο φυσικός αριθμός n. Ας θεωρήσουμε τους $n+1$ φυσικούς αριθμούς $1, 11, \ldots, 11\ldots1$ και τα $n+1$ υπόλοιπά τους mod$n$. Επειδή τα $n+1$ αυτά υπόλοιπα ανήκουν στο σύνολο $\{0, \ldots, n-1\}$, δύο από τα υπόλοιπα αυτά είναι ίσα. ΄Ετσι, δύο από τους $n+1$ αυτούς φυσικούς αριθμούς αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενοι δια του n. Προφανώς, τότε, η διαφορά των δύο αυτών φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του n. Προσέξτε ακόμη ότι ή διαφορά οποιωνδήποτε δύο από τους φυσικούς αριθμούς που θεωρήσαμε έχει δεκαδική παράσταση της μορφής $11\ldots100\ldots0$. Α απόδειξή μας είναι τώρα ολοκληρωμένη. □

Ασκήσεις και Προβλήματα

¶σκηση 1.6.1 Μία δυνατή διατύπωση της Αρχής του Περιστερώνα έχει ως εξής:

> Έστω πεπερασμένα σύνολα A και B τέτοια ώστε $|A| > |B|$ και συνάρτηση $f : A \to B$. Τότε, η συνάρτηση f δεν είναι ένα-προς-ένα.

Αποδείξτε με κατάλληλη επαγωγή τη διατύπωση αυτή της Αρχής του Περιστερώνα.

1.7 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Η έννοια του συνόλου είναι, καθώς ελέχθει, βασική και φυσικοτάτη. Έτσι, ανευρίσκεται σε μαθηματικά κείμενο ήδη από των αρχαιοτάτων χρόνων. Ωστόσο, η μελέτη των αφαιρετικών συνόλων, ως μαθηματικών αντικειμένων με το δικό τους, ιδιαίτερο μαθηματικό ενδιαφέρον, άρχισε πολύ αργότερα -- μόλις το 1874, από το Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor (1845--1918). Ο Cantor θεωρείται ως ο πατέρας της σύγχρονης *Συνολοθεωρίας*, και οι αντίστοιχες θεμελιώδεις εργασίες του χρονολογούνται στην περίοδο από το 1874 μέχρι και το 1897.

Ένα από τα μεγαλύτερα ανοικτά προβλήματα στη Συνολοθεωρία του Εικοστού Αιώνα αφορά την *Υπόθεση του Συνεχούς*. Σε αδρές γραμμές, η Υπόθεση του Συνεχούς είναι μια μαθηματική εικασία η οποία έχει ως εξής:

> Δεν υπάρχει κανένα σύνολο "μεγαλύτερο" από το σύνολο των φυσικών αριθμών και "μικρότερο" από το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Διασθητικά, ένα σύνολο A είναι "μεγαλύτερο" από το σύνολο B αν το περιέχει υποσύνολο ισοπληθές με το , αλλά το ίδιο είναι μη ισοπληθές προς το B. Λέμε επίσης τότε ότι το B είναι μικρότερο από το A. Η Υπόθεση του Συνεχούς συνεπάγεται ότι κάθε μη αριθμήσιμο σύνολο περιέχει ένα υποσύνολο ισοπληθές με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ο Kurt Gödel έδειξε το 1939 [8] ότι η Υπόθεση του Συνεχούς είναι συνεπής προς τα αξιώματα της Συνολοθεωρίας. Αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει απόδειξη (βασισμένη στα αξιώματα της Συνολοθεωρίας) ότι η Υπόθεση του Συνεχούς είναι αληθής. Αφετέρου, ο P. M. Cohen έδειξε το 1963 [5] ότι η άρνηση της Υπόθεσης του Συνεχούς είναι επίσης συνεπής προς τα αξιώματα της Συνολοθεωρίας. Αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει απόδειξη (βασισμένη στα αξιώματα της Συνολοθεωρίας) ότι η Υπόθεση του Συνεχούς δεν είναι αληθής. Συνολικά, λοιπόν, είναι αποδεδειγμένο ότι η Υπόθεση του Συνεχούς δεν μπορεί να αποδειχθεί με τα αξιώματα της Συνολοθεωρίας.

Για μιά συνοπτική εισαγωγή στη Θεωρία Γράφων, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Ελληνικό βιβλίο (κατάλληλο για την εξ αποστάσεως εκπαίδευση) που έγραψε πρόσφατα ο *Μάριος Μαυρονικόλας* [13].

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Γενική ¶σκηση 1.1 Θεωρούμε αυθαίρετο πεπερασμενο σύνολο S. Η σχέση $\mathcal{R}$ ορίζεται πάνω στο δυναμοσύνολο $\mathbf{2}^S$ ως εξής:

> $\langle S_1, S_2 \rangle \in \mathcal{R}$ αν και μόνο αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων S_1 και S_2.

1. Αποδείξτε ότι η σχέση $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
2. Προσδιορίστε κατάλληλη σχέση $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ η οποία είναι ανακλαστική και συμμετρική αλλά όχι μεταβατική.
3. Προσδιορίστε κατάλληλη σχέση $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}$ η οποία είναι ανακλαστική και μεταβατική αλλά όχι συμμετρική.
4. Προσδιορίστε κατάλληλη σχέση $\mathcal{R}_3 \subseteq \mathcal{R}$ η οποία είναι συμμετρική και μεταβατική αλλά όχι ανακλαστική.

Γενική ¶σκηση 1.2 Θεωρούμε αυθαίρετη άπειρη ακολουθία $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots$ συνόλων από φυσικούς αριθμούς, Αποδείξτε ή διαψεύστε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

> Αν για κάθε ζεύγος συνόλων $\mathcal{S}_i$ και $\mathcal{S}_j$ ισχύει ότι $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j \neq \emptyset$, τότε $\bigcap_{i \geq 1} \mathcal{S}_i \neq \emptyset$.

Γενική ¶σκηση 1.3 Θεωρείστε τους ακόλουθους δύο ορισμούς ενός πεπερασμένου γράφου:

- Ορισμός 1: ΄Ενας *πεπερασμένος γράφος* είναι ένα ζεύγος $\langle V, E \rangle$, όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ακεραίων, καλούμενο το *σύνολο κορυφών,* και E είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη κορυφών στο σύνολο V.

- <u>Ορισμός 2</u>: Ένας *πεπερασμένος γράφος* ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

  <u>*Βάση:*</u> Το ζεύγος $\langle 0, 0\rangle$ είναι ένας πεπερασμένος γράφος.

  <u>*Επαγωγικό Βήμα 1:*</u> Αν $\langle V, E\rangle$ είναι ένας πεπερασμένος γράφος και n είναι ένας ακέραιος, τότε $\langle V \cup \{n\}, E\rangle$ είναι ένας πεπερασμένος γράφος.

  <u>*Επαγωγικό Βήμα 2:*</u> Αν $\langle V, E\rangle$ είναι ένας πεπερασμένος γράφος και $m, n \in V$, τότε $\langle V, E \cup \{(m, n)\}\rangle$ είναι ένας πεπερασμένος γράφος.

1. Αποδείξτε επαγωγικά ότι κάθε διατεταγμένο ζεύγος $\langle V, E\rangle$ που είναι πεπερασμένος γράφος δια του Ορισμού 1 είναι επίσης πεπερασμένος γράφος διά του Ορισμού 2.

   <u>*Υπόδειξη:*</u> Χρησιμοποιείστε επαγωγή πάνω στην ποσότητα $|V| + |E|$.

2. Αποδείξτε επαγωγικά ότι κάθε διατεταγμένο ζεύγος $\langle V, E\rangle$ που είναι πεπερασμένος γράφος δια του Ορισμού 2 είναι επίσης πεπερασμένος γράφος διά του Ορισμού 1.

   <u>*Υπόδειξη:*</u> Χρησιμοποιείστε κατάλληλα την επαγωγή στον Ορισμό 2.)

3. Δείξτε ότι το σύνολο όλων των πεπερασμένων γράφων είναι απαριθμήσιμο.

4. Ορίζουμε ένα *γράφο* χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 1 πιο πάνω, όπου όμως έχουμε απαλείψει τη λέξη "πεπερασμένος," όπου αυτή εχρησιμοποιείτο. Δείξτε ότι το σύνολο των γράφων που ορίζονται τότε δεν είναι απαριθμήσιμο.

   <u>*Υπόδειξη:*</u> Χρησιμοποιείστε διαγωνιοποίηση.

5. Ορίζουμε ένα *γράφο* χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2 πιο πάνω, όπου όμως έχουμε απαλείψει τη λέξη "πεπερασμένος," όπου αυτή εχρησιμοποιείτο. Δείξτε ότι το σύνολο των γράφων που ορίζονται τότε είναι ακριβώς το σύνολο των πεπερασμένων γράφων.

6. Ένα *Χαμιλτωνιανό μονοπάτι* σε ένα πεπερασμένο γράφο είναι ένα μονοπάτι το οποίο επισκέπτεται κάθε κορυφή του γράφου ακριβώς μια φορά. Ένας γράφος $\langle V, E\rangle$ είναι *ημιπλήρης* αν για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V$, είτε $(u, v) \in E$ είτε $(v, u) \in E$. Δείξτε ότι κάθε ημιπλήρης πεπερασμένος γράφος έχει ένα Χαμιλτωνιανό μονοπάτι.

   <u>*Υπόδειξη:*</u> Χρησιμοποιείστε επαγωγή πάνω στην ποσότητα $|V|$.