
Άλγεβρες Διεργασιών και Τροπικές Λογικές

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής θέματα:

Οι λογικές HML και WHML

Ο λογικός χαρακτηρισμός των $\sim$ και $\approx$

Η λογική CTL-

Ισοδυναμία και διατήρηση ιδιοτήτων

- Όταν δύο διεργασίες δεν είναι ισοδύναμες υπάρχουν κάποιες ιδιότητες που ικανοποιούνται από μόνο μια από αυτές.
- Αντίστοιχα, όταν δύο διεργασίες είναι ισοδύναμες θα αναμέναμε να ικανοποιούν τις ίδιες ιδιότητες.
- Ποια κατηγορία ιδιοτήτων χαρακτηρίζει διαφορετικές ισοδυναμίες;
- Θα απαντήσουμε αυτό το ερώτημα για τις σχέσεις $\sim$ και $\approx$.

Η χρονική λογική HML

- Η λογική *HML* (Hennessy Milner Logic) είναι μια χρονική λογική που επιτρέπει τη διατύπωση τροπικών ιδιοτήτων κατάλληλη για έλεγχο αλγεβρών διεργασιών.
- Έχει δειχθεί από τους Hennessy και Milner να χαρακτηρίζει τη σχέση $\sim$. Δηλαδή:

Δύο διεργασίες είναι ισοδύναμες ως προς τη σχέση ισχυρής διπροσομοίωσης αν και μόνο αν ικανοποιούν ακριβώς τις ίδιες HML ιδιότητες.

- Επομένως αν $P \not\sim Q$ τότε υπάρχει HML ιδιότητα που ικανοποιείται από τη μια και όχι από την άλλη.

Η σύνταξη της HML

- Η HML ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο ιδιοτήτων που παράγονται ως εξής, όπου $K \subseteq \text{Act}$:

$$\begin{array}{lcl} \Phi & :: & = \text{true} \\ & | & \neg \Phi \\ & | & \Phi \vee \Psi \\ & | & \langle K \rangle \Phi \end{array}$$

- Η ιδιότητα $\langle K \rangle \Phi$ εκφράζει τη δυνατότητα εκτέλεσης κάποιας ενέργειας από το σύνολο K και στη συνέχεια ικανοποίηση της ιδιότητας Φ .

Σημασιολογία της HML

- Ορίζουμε τη σχέση $\models$ όπου

$P \models \Phi$ αν και μόνο αν η ιδιότητα Φ ικανοποιείται από την διεργασία P , ως εξής:

$P \models tt$	για κάθε P	
$P \models \neg\Phi$	αν και μόνο αν	δεν ισχύει ότι $P \models \Phi$
$P \models \Phi \vee \Psi$	αν και μόνο αν	$(P \models \Phi)$ ή $(P \models \Psi)$
$P \models \langle K \rangle \Phi$	αν και μόνο αν	$P \xrightarrow{a} P', a \in K$ και $P' \models \Phi$

Άλλοι τελεστές

$$\Phi \wedge \Psi \equiv \neg (\neg \Phi \vee \neg \Psi)$$

$$\text{ff} \equiv \neg \text{tt}$$

$$[\textcolor{red}{K}] \Phi \equiv \neg (\langle \textcolor{red}{K} \rangle (\neg \Phi))$$

- Η ιδιότητα $[\textcolor{red}{a}] \Phi$ εκφράζει αναγκαιότητα εμφάνισης του Φ μετά από *κάθε* α . Δεν απαιτεί όμως εμφάνιση του α σε αντίθεση με την ιδιότητα $\langle \alpha \rangle \Phi$.

- Συντομογραφίες:

$\langle - \rangle$	για	$\langle \text{Act} \rangle$
$\langle -K \rangle$	για	$\langle \text{Act} - K \rangle$

Παραδείγματα

- $E| = \langle tick \rangle tt$

Η διεργασία E μπορεί να κάνει *tick*

- $E| = \langle tick \rangle \langle tock \rangle tt$

Η διεργασία E μπορεί να κάνει *tick* και μετά *tock*

- $E| = \langle \{tick, tock\} \rangle tt$

Η διεργασία E μπορεί να κάνει *tick* ή *tock*

- $E| = [tick] ff$

Η διεργασία E δεν μπορεί να κάνει *tick*

- $E| = \langle tick \rangle ff$

Αυτό είναι ισοδύναμο με *ff* !!

- $E| = [tick] tt$

Αυτό είναι ισοδύναμο με *tt* !!

Παραδείγματα

- Ποιες από τις πιο κάτω ιδιότητες ικανοποιούνται;

$$a.0 \models \langle a \rangle \text{ tt}$$

$$a.(b.0 + c.0) \models \langle a \rangle \langle b \rangle \text{ tt}$$

$$a.b.0 + a.c.0 \models \langle a \rangle (\langle b \rangle \text{ tt} \wedge \langle c \rangle \text{ tt})$$

$$a.(b.0 + c.0) \models [a] \langle b \rangle \text{ tt}$$

$$a.b.0 + a.c.0 \models [a] \langle b \rangle \text{ tt}$$

$$0 \models [a] \text{ ff}$$

HML και $\sim$

- Παρόλο που η HML δεν είναι ιδιαίτερα εκφραστική λογική, έχει την εξής ιδιότητα:

Ορίζουμε τη σχέση $P =_{\text{HML}} Q$ αν και μόνο αν για κάθε ιδιότητα Φ , $P \models \Phi$ αν και μόνο αν $Q \models \Phi$

Θεώρημα: $P =_{\text{HML}} Q$ αν και μόνο αν $P \sim Q$.

- Με άλλα λόγια $P \sim Q$ αν και μόνο αν οι P και Q ικανοποιούν τις ίδιες HML ιδιότητες.

HML και $\sim$

- Ποιες HML ιδιότητες ξεχωρίζουν τις πιο κάτω μη-ισοδύναμες διεργασίες.
 - $a.b.0$ και $a.c.0$
 - $a.(b.0 + c.0)$ και $a.c.0$
 - $a.(b.0 + c.0)$ και $a.b.0 + a.c.0$

Χαρακτηρισμός της σχέσης $\approx$

- Τα πιο πάνω αποτελέσματα μεταφέρονται και στη σχέση $\approx$ με χρήση του πιο κάτω λήμματος:

Λήμμα: Η σχέση $\approx$ είναι η μεγαλύτερη σχέση που για κάθε $a \in Act$ ικανοποιεί τα πιο κάτω:

1. Αν $P \xRightarrow[\bar{a}]{\hat{a}} P'$ τότε $Q \xRightarrow[\bar{a}]{\hat{a}} Q'$ και $P' \approx Q'$
2. Αν $Q \xRightarrow[\bar{a}]{\hat{a}} Q'$ τότε $P \xRightarrow[\bar{a}]{\hat{a}} P'$ και $P' \approx Q'$

WHML

- Ορίζουμε την **WHML** (Weak HML) ως το μικρότερο σύνολο ιδιοτήτων που παράγονται ως εξής, όπου $a \in \text{Act}$:

$$\Phi :: = \text{true} \quad | \quad \neg\Phi \quad | \quad \Phi \vee \Psi \quad | \quad \langle\langle a \rangle\rangle \Phi$$

όπου η ιδιότητα $\langle\langle a \rangle\rangle \Phi$ εκφράζει τη δυνατότητα εκτέλεσης της ενέργειας $\xRightarrow{\hat{a}}$ με ερμηνεία:

$$P \models \langle\langle a \rangle\rangle \Phi \quad \text{αν και μόνο αν} \quad P \xRightarrow{\hat{a}} P' \quad \text{και} \quad P' \models \Phi$$

Παραγόμενος τελεστής $[[a]] \Phi \equiv \neg \langle\langle a \rangle\rangle \neg \Phi$.

Θεώρημα: Ορίζοντας τη σχέση $=_{\text{WHML}}$ ανάλογα με τη $=_{\text{HML}}$ έχουμε ότι

$$P =_{\text{WHML}} Q \quad \text{αν και μόνο αν} \quad P \approx Q.$$