Φροντιστήριο 2

Βασικές Έννοιες

PLTL

Η Προτασιακή Γραμμική Χρονική Λογική (PLTL) ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο ιδιοτήτων που παράγονται ως εξής:

$$\Phi ::= p \mid \neg\Phi \mid \Phi \vee \Phi \mid \mathbf{X}\, F \mid \Phi\, \mathbf{U}\, \Phi$$

Παραγόμενοι τελεστές περιλαμβάνουν τους F, G , true, false, $\wedge$, …

Kripke structure

Μια δομή Kripke ορίζεται ως μια πλειάδα M = (S, R, I, Label) όπου

- S είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο από καταστάσεις
- $I \subseteq S$ είναι το σύνολο των αρχικών καταστάσεων
- $R \subseteq S \times S$ είναι μία σχέση μεταβάσεων, όπου $(s, s') \in R$ αν υπάρχει μετάβαση από την κατάσταση s στην κατάσταση s'
- Label : $S \rightarrow 2^{AP}$ είναι μια συνάρτηση ερμηνείας στο σύνολο καταστάσεων

Σημασιολογία της PLTL

Έστω μονοπάτι s και ιδιότητα Φ. Ορίζουμε τη σχέση ⊨ όπου

$s \models \Phi$ αν και μόνο αν η ιδιότητα Φ ικανοποιείται στο μονοπάτι s

ως εξής:

$s \models p$	αν και μόνο αν	$p \in Label(s[0])$
$s \models \neg\Phi$	αν και μόνο αν	δεν ισχύει ότι $s \models \Phi$
$s \models \Phi \vee \Psi$	αν και μόνο αν	$(s \models \Phi)$ ή $(s \models \Psi)$
$s \models X\,\Phi$	αν και μόνο αν	$s^1 \models \Phi$
$s \models \Phi\,U\,\Psi$	αν και μόνο αν	υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models \Psi$
		και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models \Phi$

όπου αν $s = s_0\, s_1\, s_2\ldots$, s^i είναι το μονοπάτι $s_i\, s_{i+1}\, s_{i+2}\ldots$.

Μια ιδιότητα ικανοποιείται από μια δομή Kripke αν και μόνο αν ικανοποιείται σε κάθε μονοπάτι της δομής.

Στόχοι Φροντιστηρίου

1. Διατύπωση PLTL ιδιοτήτων.
2. Έλεγχος ικανοποίησης PLTL ιδιοτήτων από δομές Kripke.

Άσκηση 1

Έστω οι πιο κάτω προτάσεις για ένα ανελκυστήρα:

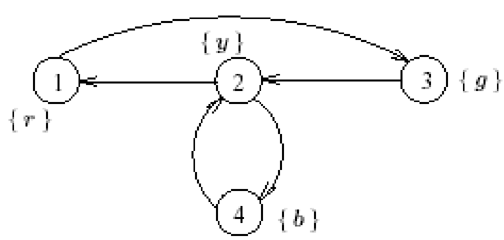
at_i	The elevator is at the *i*th floor
go_up	The elevator is going up
go_down	The elevator is going down
$between_i$	The elevator is between floor *i* and *i*+1
stop	The elevator is not moving
open	The elevator door is open
$press\_up_i$	Someone is pressing the *up* button on the *i*th floor
$memory\_up_i$	The elevator remembers that the *up* button was pressed on the *i*th floor
$press\_down_i$	Someone is pressing the *down* button on the *i*th floor
$memory\_down_i$	The elevator remembers that the *down* button was pressed on *i*th floor
$press_i$	Someone is pressing the button for the *i*th floor inside the elevator
$memory\_press_i$	The elevator remembers that someone inside pressed to go to ith floor
alarm	The alarm in sounding

Να διατυπώσετε τις πιο κάτω ιδιότητες στον χρονικό λογισμό PLTL.

a. Αν πατηθεί κάποιο κουμπί στον τρίτο όροφο, τότε ο ανελκυστήρας θα μετακινηθεί σε αυτόν τον όροφο.
b. Ο ανελκυστήρας δεν μπορεί να βρίσκεται ταυτόχρονα στον πρώτο και στον δεύτερο όροφο.
c. Αν ο ανελκυστήρας βρίσκεται σε κίνηση, τότε η πόρτα του πρέπει να είναι κλειστή.
d. Αν κανένα κουμπί δεν είναι πατημένο και ο ανελκυστήρας βρίσκεται στον τέταρτο όροφο, τότε θα παραμείνει στον όροφο αυτό μέχρις ότου να πατηθεί κάποιο κουμπί.
e. Κάθε φορά που ο ανελκυστήρας εγκλωβίζεται ανάμεσα σε δύο ορόφους, ο συναγερμός θα ηχεί μέχρις ότου ο ανελκυστήρας να βρεθεί ξανά σε κίνηση.

Άσκηση 2

Θεωρήστε την πιο κάτω δομή Kripke:



Να αποφασίσετε σε ποιες από τις καταστάσεις της δομής ικανοποιείται κάθε μια από τις πιο κάτω ιδιότητες.

1. $\mathbf{F}\, y$
2. $\mathbf{G}\, y$
3. $\mathbf{G}\,\mathbf{F}\, y$
4. $\mathbf{F}\, g$
5. $\mathbf{G}\, g$
6. $\mathbf{G} \neg b$
7. $b\ \mathbf{U} \neg b$
8. $\neg b\ \mathbf{U}\ \mathbf{F}\, b$
9. $g\ \mathbf{U}\ (y\ \mathbf{U}\ r)$
10. $g\ \mathbf{U} \neg y$
11. $\mathbf{G}\ (g\ \mathbf{U}\ (y \wedge \mathbf{F}\, b \wedge \mathbf{F}\, r))$
12. $\mathbf{G}\ (g \rightarrow \mathbf{X}\, y)$

Άσκηση 3

Θεωρήστε τις πιο κάτω ισοδυναμίες ανάμεσα σε PLTL ιδιότητες. Να αποφασίσετε ποιες από αυτές είναι ορθές και ποιες όχι. Αν είναι ορθές να το αποδείξετε. Διαφορετικά, να αποφασίσετε ποια (ποιες) από τις δυο κατευθύνσεις της επαγωγής δεν ισχύουν δίνοντας μια δομή Kripke που αποτελεί αντιπαράδειγμα.

1. $\mathbf{G}\, p \leftrightarrow \neg \mathbf{F} \neg p$
2. $\mathbf{X}\,\mathbf{F}\, p \leftrightarrow \mathbf{F}\,\mathbf{X}\, p$
3. $(\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, p) \wedge (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, q) \leftrightarrow \mathbf{F}\,(\mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q)$
4. $(p\, \mathbf{U}\, q)\, \mathbf{U}\, q \leftrightarrow p\, \mathbf{U}\, q$
5. $(p\, \mathbf{U}\, q) \wedge (q\, \mathbf{U}\, r) \leftrightarrow (p\, \mathbf{U}\, r)$
6. $\mathbf{G}\, p \vee \mathbf{F}\, q \leftrightarrow (\mathbf{G}\, p) \vee (p\, \mathbf{U}\, q)$