Ασκήσεις Επανάληψης – Λύσεις

Άσκηση 1

(α) Κανένα πιρούνι δεν χρησιμοποιείται ποτέ από περισσότερους από ένα φιλόσοφους.

$$AG\ [\neg (l_0 \wedge r_2) \wedge \neg (l_1 \wedge r_0) \wedge \neg (l_2 \wedge r_1)$$

(β) Ο φιλόσοφος i θα φάει τουλάχιστον μια φορά.

$$AF\ (l_i \wedge r_i)$$

(γ) Το σύστημα των φιλοσόφων δεν θα φτάσει ποτέ σε αδιέξοδο (deadlock).

Δείχνουμε ότι οποιαδήποτε ανάθεση πιρουνιών και αν υπάρχει στο μέλλον θα αλλάξει. Οι τρεις τελείες αναφέρονται στις διατάξεις που δεν παραθέτονται στη λύση.

$$AG\ (l_0 \wedge l_1 \wedge l_2 \rightarrow AF \neg (l_0 \wedge l_1 \wedge l_2)$$

$$\wedge\ l_0 \wedge r_0 \wedge r_1 \rightarrow AF \neg (l_0 \wedge r_0 \wedge r_1)$$

$$\wedge \ldots)$$

(δ) Ο φιλόσοφος 1 θα φάει ακριβώς μια φορά.

$$E\ [\neg (l_0 \wedge r_0) \quad U \quad [(l_0 \wedge r_0) \quad \wedge \quad E\ ((l_0 \wedge r_0)\ U\ (\neg (l_0 \wedge r_0) \wedge EG \neg (l_0 \wedge r_0)))\ ]$$

Άσκηση 2

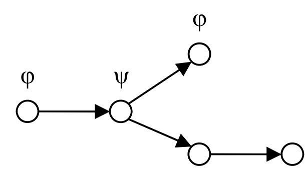
(α) (i) Η ιδιότητα φ **TX** ψ ορίζεται ως η ιδιότητα που εκφράζει ότι «την επόμενη φορά που ισχύει η ιδιότητα ψ ισχύει ταυτόχρονα και η ιδιότητα φ». Επομένως μια δομή M και κατάσταση s ικανοποιούν M,s |= φ **TX** ψ αν για κάθε μονοπάτι w που ξεκινά από την s υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε για κάθε $1 < i < j$, $w[i] \models \neg\varphi$ και $w[j] \models \varphi \wedge \psi$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$AX\ [\ A(\neg\psi\ \ U\ \phi\wedge\psi)]$$

(ii) Η ιδιότητα φ **Π** ψ ορίζεται ως την ιδιότητα που εκφράζει ότι «αν υπάρχει κάποια μελλοντική στιγμή κατά την οποία ισχύει η ιδιότητα φ τότε προηγείται κάποια κατάσταση όπου αληθεύει η ιδιότητα ψ». Επομένως μια δομή M και κατάσταση s ικανοποιούν M,s |= φ **Π** ψ αν δεν υπάρχει μονοπάτι w που ξεκινά από την s για το οποίο υπάρχει i τέτοιο ώστε $w[i] \models \varphi$ και για κάθε $0 \leq k < j$, $w^k \models \neg\psi$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$\neg\ E\ (\neg\psi\ U\ \varphi)$$

(β) (i) $EG\ (\phi \vee \psi)$ και $EG\ \phi \vee EG\ \psi$
Οι ιδιότητες δεν είναι ισοδύναμες όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα



Η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα $EG\ (\phi \vee \psi)$ αλλά όχι την $EG\ \phi \vee EG\ \psi$.

(ii) AG φ ∧ AG ψ   και   AG (φ ∧ ψ)

Θα αποδείξουμε ότι οι ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

Έστω δομή Kripke M και κατάσταση s. Τότε, αν M,s |=AG φ ∧ AG ψ, ισχύει ότι M, s |=   AG φ και M, s |=   AG ψ. Επομένως για κάθε μονοπάτι w που ξεκινά από την s και κάθε j ≥ 0, M,w[j] |≡ φ και M,w[j] |≡ ψ. Αυτό συνεπάγεται ότι M,w[j] |≡ φ∧ψ και επομένως M,s |= AG (φ∧ψ). Παρόμοια, αν M,s |= AG (φ∧ψ) ισχύει και ότι M,s |= AG φ ∧ AG ψ και το ζητούμενο έπεται.

<u>Άσκηση 3</u>

(α) Οι διεργασίες a.τ.Nil και τ.a.Nil είναι ασθενώς ισοδύναμες. Ασθενής ισοδυναμία που τις συνδέει είναι η

R = {(a.τ.Nil, τ.a.Nil), (τ.Nil, Nil), (a.τ.Nil, a.Nil), (Nil, Nil)}

(β) Οι διεργασίες τ.a.A + b.B και τ.(a.A + b.B) δεν είναι ισοδύναμες. Συγκεκριμένα η πρώτη διεργασία έχει την μετάβαση

$$\tau.\mathrm{a.A} + \mathrm{b.B} \xrightarrow{\tau} \mathrm{a.A}$$

την οποία η δεύτερη διεργασία δεν μπορεί να μιμηθεί.

(γ) τ.Nil + (a.Nil | $\bar{a}$.Nil)\{a,b}   και   τ.Nil

Οι διεργασίες είναι ισχυρά (και επομένως και ασθενώς) ισοδύναμες. Ισοδυναμία που τις συνδέει είναι η

R = {(τ.Nil + (a.Nil | a.Nil)\{a,b}, τ.Nil), (Nil, Nil), (Nil | Nil)\{a,b}, Nil)}

(δ) a.(τ.Nil + b.B)   και   a.Nil + a.b.Nil

Οι διεργασίες δεν είναι ισοδύναμες. Συγκεκριμένα η πρώτη διεργασία έχει την μετάβαση

$$\mathrm{a.}(\tau.\mathrm{Nil} + \mathrm{b.B}) \xrightarrow{\mathrm{a}} \tau.\mathrm{Nil} + \mathrm{b.B}$$

την οποία η δεύτερη διεργασία δεν μπορεί να μιμηθεί αφού οι δύο μεταβάσεις της με ενέργεια a οδηγούν στις καταστάσεις Nil και b.Nil και καμιά από τις δύο δεν είναι ισοδύναμη με την τ.Nil + b.B.

<u>Άσκηση 4</u>

(α) Το αυτόματο A_1 περιέχει το πιο κάτω μονοπάτι το οποίο παρουσιάζει συμπεριφορά Zeno.

$$\langle l_0, v_0 \rangle \stackrel{1}{\rightarrow} \langle l_0, v_1 \rangle \stackrel{*}{\rightarrow} \langle l_2, v_2 \rangle \stackrel{*}{\rightarrow} \langle l_2, v_3 \rangle \stackrel{*}{\rightarrow} \langle l_2, v_3 \rangle \stackrel{*}{\rightarrow} \langle l_2, v_2 \rangle \stackrel{*}{\rightarrow} \ldots$$

όπου

$$v_0(x_1) = 0 \qquad v_1(x_1) = 1 \qquad v_2(x_1) = 1 \qquad v_3(x_1) = 0$$
$$v_0(x_2) = 0 \qquad v_1(x_2) = 1 \qquad v_2(x_2) = 0 \qquad v_{3\sigma\sigma}(x_2) = 0$$

Προφανώς το πιο πάνω μονοπάτι αν και μη πεπερασμένο έχει πεπερασμένη διάρκεια χρόνου.

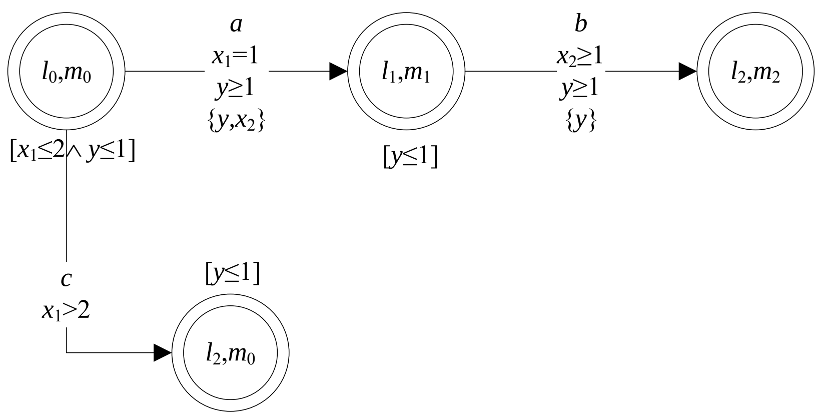
(β) Ναι, το αυτόματο περιέχει μονοπάτι που οδηγεί σε χρονικό αδιέξοδο όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$\langle l_0, v_0 \rangle \xrightarrow{2} \langle l_0, v_1 \rangle \nrightarrow$$

όπου

$$v_0(x_1) = 0 \qquad v_1(x_1) = 2$$
$$v_0(x_2) = 0 \qquad v_1(x_2) = 2$$

(γ) Ακολουθεί η παράλληλη σύνθεση $A_1 \,||\, A_2$.



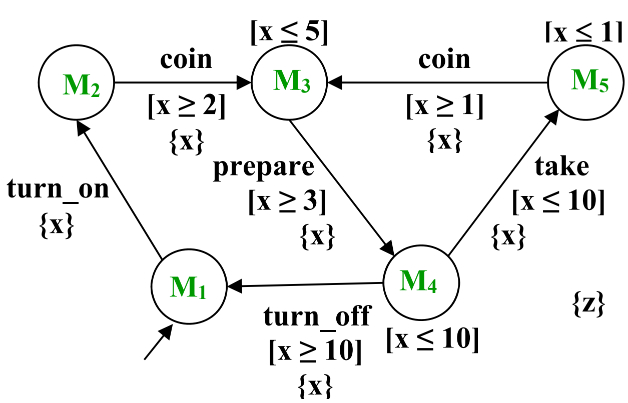
Άσκηση 5

Παραλείπεται.

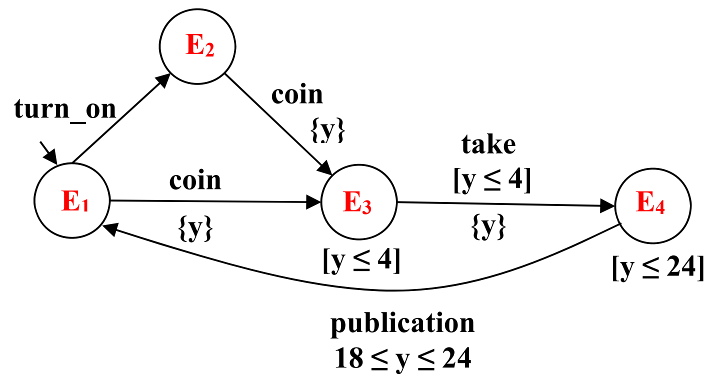
Άσκηση 6

Ακολουθούν οι περιγραφές των οντοτήτων του συστήματος ως χρονικά αυτόματα.

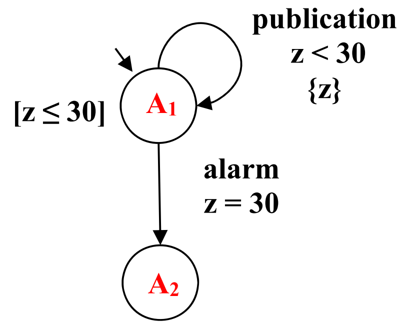
Μηχανη Καφε



ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ



ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΗΣ



Υποθέτουμε ότι οι καταστάσεις των χρονικών αυτομάτων συνδέονται με ατομικές προτάσεις όπως φαίνεται πιο κάτω.

Label(E_1) = {pub}

Label(E_3) = {coin}

Label(E_4) = {take}

Label(M_1) = {off}

Label(M_2) = {on}

(i) Η απόσταση χρόνου ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δημοσιεύσεις δυνατόν να είναι μεγαλύτερη από 30 δευτερόλεπτα.

$EF\ [\neg pub \wedge AG^{<30} \neg pub]$

(ii) Αν ο ερευνητής τοποθετήσει ένα νόμισμα στη μηχανή καφέ τότε θα λάβει τον καφέ του μέσα σε ακριβώς 6 μονάδες χρόνου.

$AG\ (coin \rightarrow AF^{=6}\ take)$

(iii) Η μηχανή καφέ δεν μπορεί να είναι απενεργοποιημένη για περισσότερο από 40 μονάδες χρόνου.

$AG\ (off \rightarrow AF^{\leq 40}\ on)$

(iv) Η πάροδος χρόνου από τη στιγμή της τοποθεσίας νομίσματος και της παραλαβής καφέ δεν πρέπει να ξεπερνά τις 7 μονάδες χρόνου.

$$AG\ (\text{coin} \rightarrow AF^{\leq 7}\ \text{take})$$

Άσκηση 7

Παραλείπεται.