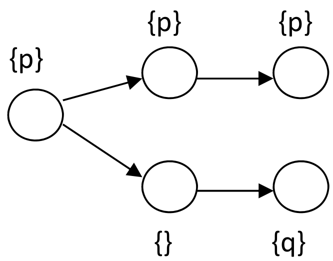
Σειρά Προβλημάτων 3 – Λύσεις

Άσκηση 1

i. Οι ιδιότητες δεν είναι ισοδύναμες και αυτό φαίνεται από το πιο κάτω αντιπαράδειγμα. Σε αυτό ικανοποιείται το αριστερό μέλος αλλά όχι και το δεξί.



ii. Η ισοδυναμία ισχύει. Ακολουθεί η απόδειξη.

Έστω δομή M με αρχική κατάσταση s, τότε

M, s $\models$ **AG** p $\wedge$ **AF** q αν και μόνο αν M, s $\models$ **AG** p και M, s $\models$ **AF** q

αν και μόνο αν σε κάθε μονοπάτι w που ξεκινά από την s ισχύει ότι M, w $\models$ **G** p και M, w $\models$ **F** q

αν και μόνο αν σε κάθε μονοπάτι w που ξεκινά από την s, για κάθε $i \geq 0$, M,w[i] $\models$ p και υπάρχει $j \geq 0$ τ.ω. M, w[j] $\models$ q

αν και μόνο αν σε κάθε μονοπάτι w που ξεκινά από την s, για κάθε $i \geq 0$, M,w[i] $\models$ p και για κάθε $i \geq 0$ M, w[i] $\models$ p και υπάρχει $j \geq 0$ τ.ω. M, w[j] $\models$ q

αν και μόνο αν σε κάθε μονοπάτι w που ξεκινά από την s, για κάθε $i \geq 0$, M,w[i] $\models$ p και υπάρχει $j \geq 0$ M, w[j] $\models$ q και για κάθε $0 < i \leq j$ M, w[i] $\models$ p

αν και μόνο αν σε κάθε μονοπάτι w που ξεκινά από την s, M, w $\models$ **G** p και M, w $\models$ p U q

αν και μόνο αν M, s $\models$ **AG** p και M, s $\models$ **A (**p U q)

αν και μόνο αν M, s $\models$ **AG** p $\wedge$ **A (**p U q)

iii. Η ισοδυναμία ισχύει. Ακολουθεί η απόδειξη.

Έστω δομή M με αρχική κατάσταση s, τότε

Αν M, s $\models$ A (p **U** q) αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, M,w $\models$ p **U** q

αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $\exists j \geq 0$ τέτοιο ώστε M,w[i] $\models$ q και $\forall i$, $0 \leq i < j$, M,w[i] $\models$ p

αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, είτε M,w[0] $\models$ q, είτε M,w[0] $\models$ p και $\exists j \geq 1$ τέτοιο ώστε M,w[i] $\models$ q και $\forall i$, $1 \leq i < j$, M,w[i] $\models$ p

αν και μόνο αν είτε M,s $\models$ q, είτε s $\models$ p και για κάθε μονοπάτι w, $\exists j \geq 1$ τέτοιο ώστε M,w[i] $\models$ q και $\forall i$, $1 \leq i < j$, M,w[i] $\models$ p

αν και μόνο αν είτε M,s $\models$ q, είτε

	M,s ⊨ p και για κάθε μονοπάτι w,
	$M,w^1 \models p \, U \, q$
αν και μόνο αν	είτε M,s ⊨ q, είτε
	M,s ⊨ p και για κάθε μονοπάτι w,
	M,w[1] ⊨ A(p U q)
αν και μόνο αν	είτε s ⊨ q, είτε
	M,s ⊨ p και για κάθε μονοπάτι w,
	M,w ⊨ AX A(p U q)
αν και μόνο αν	M,s ⊨ q ∨ [p ^ AXA(p **U** q)]

Άσκηση 2

Αρχικά μετασχηματίζουμε την ιδιότητα σε μια ισοδύναμη όπου εμφανίζονται μόνο οι τελεστές του αλγόριθμου μοντελοελέγχου και στη συνέχεια δημιουργούμε το δέντρο που αντιστοιχεί στην ιδιότητα. Τέλος, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μοντελοελέγχου της CTL υπολογίζουμε τις καταστάσεις στις οποίες ικανοποιείται η ιδιότητα ξεκινώντας από τα φύλλα του δέντρου και προχωρώντας προς τα πάνω.

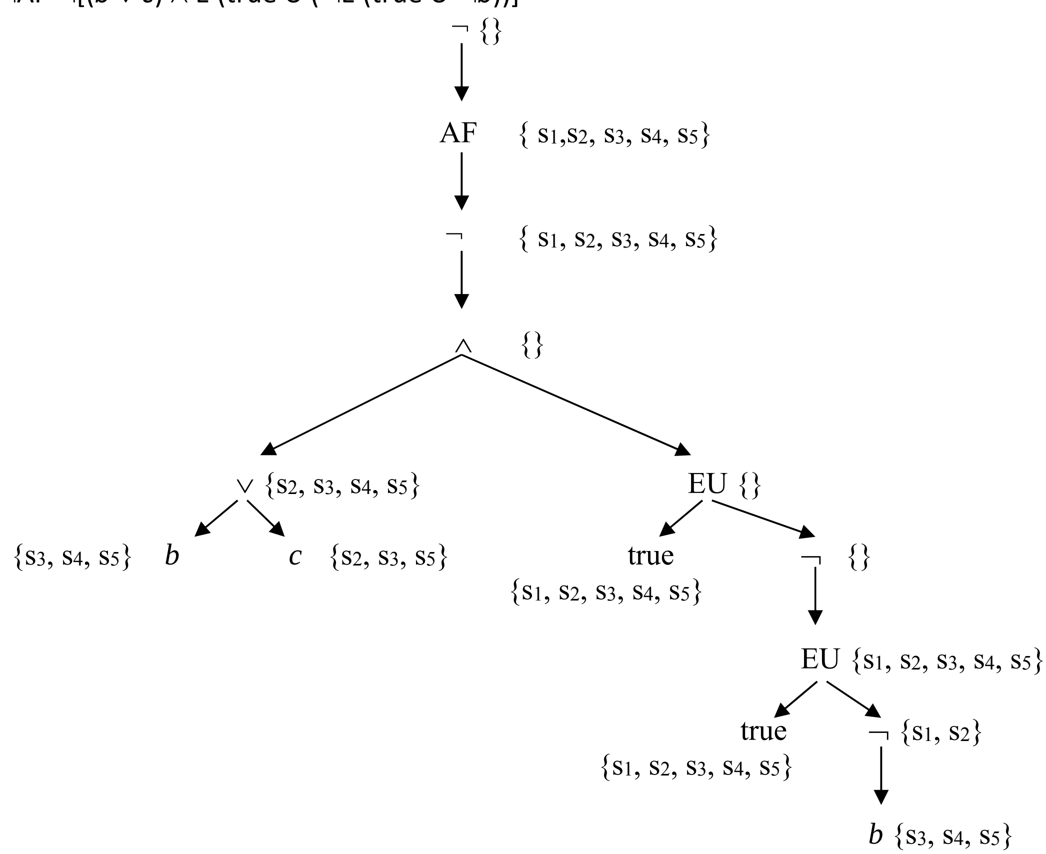
i.

$\quad EG\,[(b \vee c) \wedge EF\; AG\; b]$

$\equiv EG\,[(b \vee c) \wedge EF\,(\neg EF \neg b)]$

$\equiv EG\,[(b \vee c) \wedge E\,(\text{true } U\,(\neg E\,(\text{true } U \neg b)))]$

$\equiv \neg AF \neg[(b \vee c) \wedge E\,(\text{true } U\,(\neg E\,(\text{true } U \neg b)))]$



Η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα αφού οι αρχικές της καταστάσεις δεν την ικανοποιούν.

ii. $[a \rightarrow \mathrm{EG\ EX\ A}\ (b\ \mathrm{U}\ c)] \vee [\alpha \wedge \mathrm{AX\ A(aUb)}]$

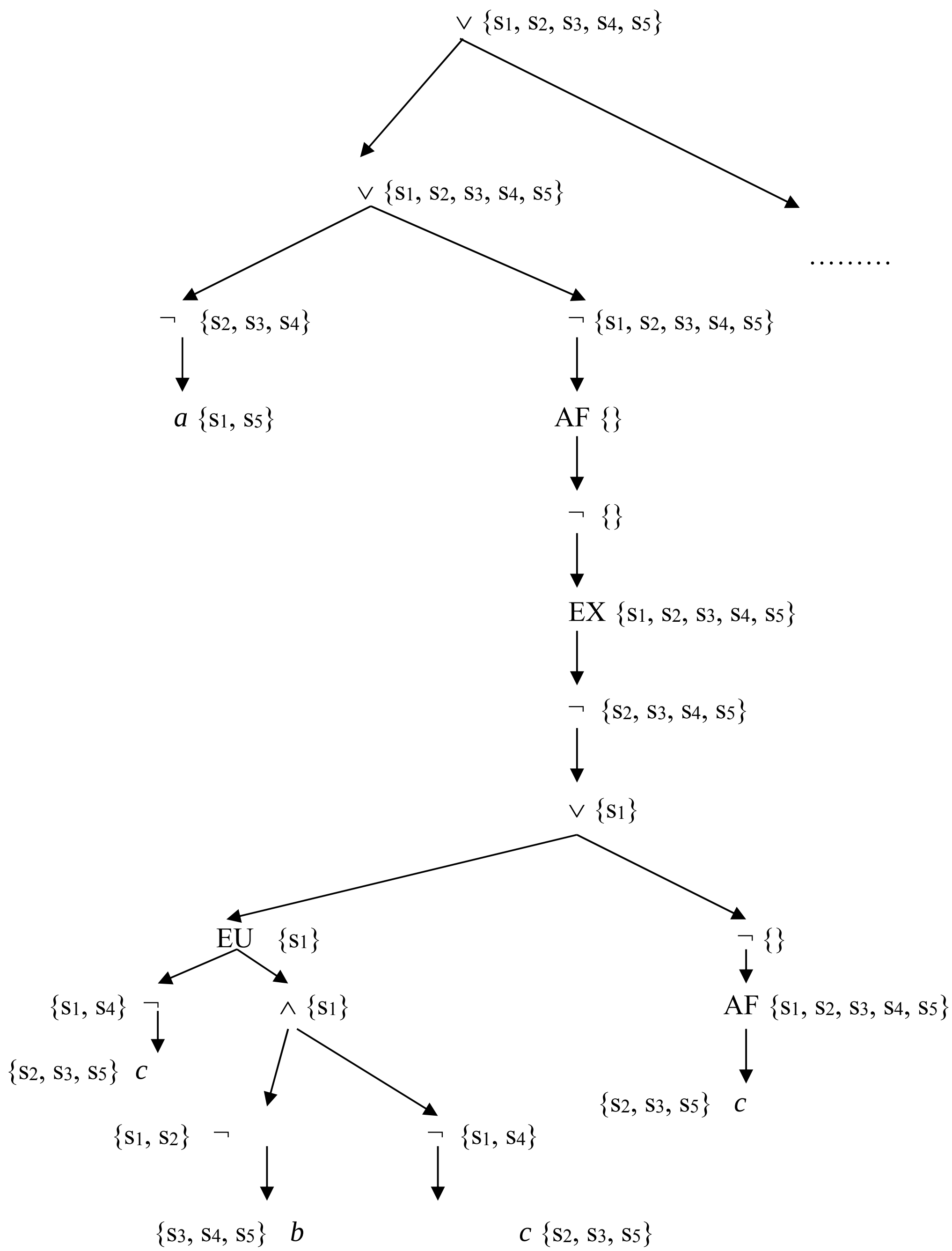
$\equiv [\neg a \vee \mathrm{EG\ EX\ A}\ (b\ \mathrm{U}\ c)] \vee [a \wedge \neg \mathrm{EX\ A} \neg(\mathrm{aUb})]$

$\equiv [\neg a \vee \mathrm{EG\ EX} \neg(\ \mathrm{E}[\neg c\ \mathrm{U}\ (\neg b \wedge \neg c)] \vee \mathrm{EG} \neg\ c)] \vee [a \wedge \neg \mathrm{EX} \neg\neg(\mathrm{E}[\neg b\ \mathrm{U}\ (\neg a \wedge \neg b)] \vee \mathrm{EG} \neg b)]$

$\equiv [\neg a \vee \mathrm{EG\ EX} \neg(\ \mathrm{E}[\neg c\ \mathrm{U}\ (\neg b \wedge \neg c)] \vee \neg \mathrm{AF}\ c)] \vee [a \wedge \neg \mathrm{EX}\ (\mathrm{E}[\neg b\ \mathrm{U}(\neg a \wedge \neg b)] \vee \mathrm{EG} \neg b)]$

$\equiv [\neg a \vee \neg \mathrm{AF} \neg(\mathrm{EX} \neg(\ \mathrm{E}[\neg c\ \mathrm{U}\ (\neg b \wedge \neg c)] \vee \neg \mathrm{AF}\ c))] \vee [a \wedge \neg \mathrm{EX}\ (\mathrm{E}[\neg b\ \mathrm{U}\ (\neg a \wedge \neg b)] \vee \neg \mathrm{AF}\ b)]$

Στο δέντρο που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου για το πρώτο κομμάτι της ιδιότητας ($[a \rightarrow \mathrm{EG\ EX\ A}\ (b\ \mathrm{U}\ c)]$). Δεδομένου ότι αυτό ικανοποιείται σε όλες τις καταστάσεις και ακολουθεί το λογικό $\vee$, ο αλγόριθμος θα επιστρέψει όλες τις καταστάσεις

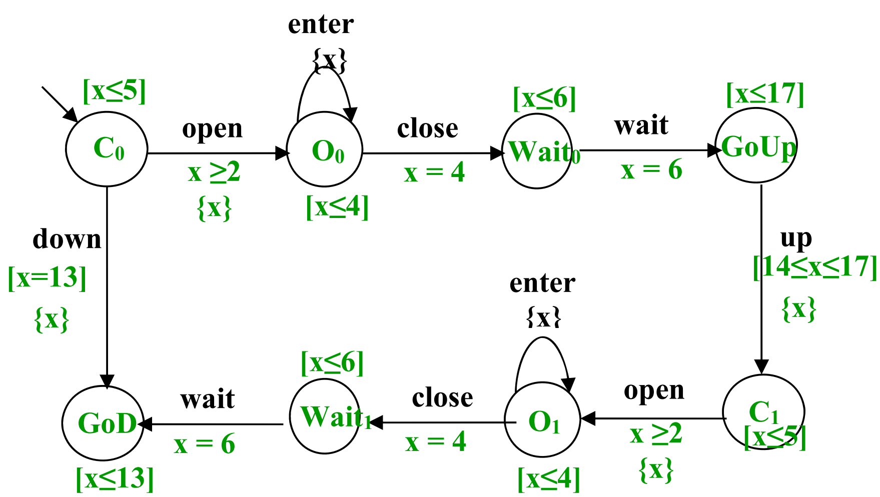


Όλες οι καταστάσεις της δομής ικανοποιούν την ιδιότητα άρα και η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα.

Άσκηση 3

(α) Πιο κάτω παρουσιάζεται το χρονικό αυτόματο του ανελκυστήρα όπου

- C_0, C_1, μοντελοποιούν τις καταστάσεις όπου οι πόρτες του ανελκυστήρα είναι κλειστές και ο ανελκυστήρας βρίσκεται στο ισόγειο και στον πρώτο όροφο, αντίστοιχα,
- O_0, O_1, μοντελοποιούν τις καταστάσεις όπου οι πόρτες του ανελκυστήρα είναι ανοικτές και ο ανελκυστήρας βρίσκεται στο ισόγειο και στον πρώτο όροφο, αντίστοιχα,
- W_0, W_1, μοντελοποιούν τις καταστάσεις όπου οι πόρτες του ανελκυστήρα είναι κλειστές και ο ανελκυστήρας περιμένει πριν να ξεκινήσει τη μετάβασή του, αντίστοιχα,
- GoUp είναι η κατάσταση όπου ο ανελκυστήρας βρίσκεται στο ισόγειο και ετοιμάζεται για τη μετάβασή του στον πρώτο όροφο, και
- GoD είναι η κατάσταση όπου ο ανελκυστήρας βρίσκεται στον πρώτο όροφο και ετοιμάζεται για τη μετάβασή του στο ισόγειο.



(β) Η κατάσταση η οποία περιγράφει τον ανελκυστήρα στο ισόγειο με την πόρτα ανοικτή είναι η O_1. Ακολουθεί μία μερική εκτέλεση του συστήματος που ξεκινά από αυτή την κατάσταση, όπου δύο επιβάτες ανεβαίνουν στον ανελκυστήρα (ο πρώτος 2.5 μονάδες χρόνου μετά από την αρχική κατάσταση, και ο δεύτερος 3 μονάδες χρόνου αργότερα) ενώ στη συνέχεια η πόρτα του ανελκυστήρα κλείνει, ο ανελκυστήρας μεταβαίνει στον πρώτο όροφο, η πόρτα του ανοίγει μετά από 4 μονάδες χρόνου και, αφού δεν ξαναμπαίνει άλλος επιβάτης, μετά από 4 μονάδες χρόνου η πόρτα κλείνει και ο ανελκυστήρας επιστρέφει στο ισόγειο.

$$(O_0,[x=0]) \xrightarrow{2.5} (O_0,[x=2.5]) \xrightarrow{enter} (O_0,[x=0]) \xrightarrow{3} (O_0,[x=3])$$

$$\xrightarrow{enter} (O_0,[x=0]) \xrightarrow{4} (O_0,[x=4]) \xrightarrow{close} (Wait_0,[x=4]) \xrightarrow{2} (Wait_0,[x=6])$$

$$\xrightarrow{wait} (GoUp,[x=6]) \xrightarrow{8} (GoUp,[x=14]) \xrightarrow{up} (C_1,[x=0]) \xrightarrow{2} (C_1,[x=2])$$

$$\xrightarrow{open} (O_1,[x=0]) \xrightarrow{4} (O_1,[x=4]) \xrightarrow{close} (Wait_1,[x=4]) \xrightarrow{2} (Wait_1,[x=6])$$

$$\xrightarrow{wait} (GoD,[x=6]) \xrightarrow{7} (GoD,[x=13]) \xrightarrow{down} (C_0,[x=0]) \longrightarrow \ldots$$

Παρόμοια μπορούν να παραχθούν και άλλες μεταβάσεις.

(γ)

i. $AG\ [\ (O_0 \vee O_1) \rightarrow AF^{<=10} \neg\ (O_0 \vee O_1)\ ]$

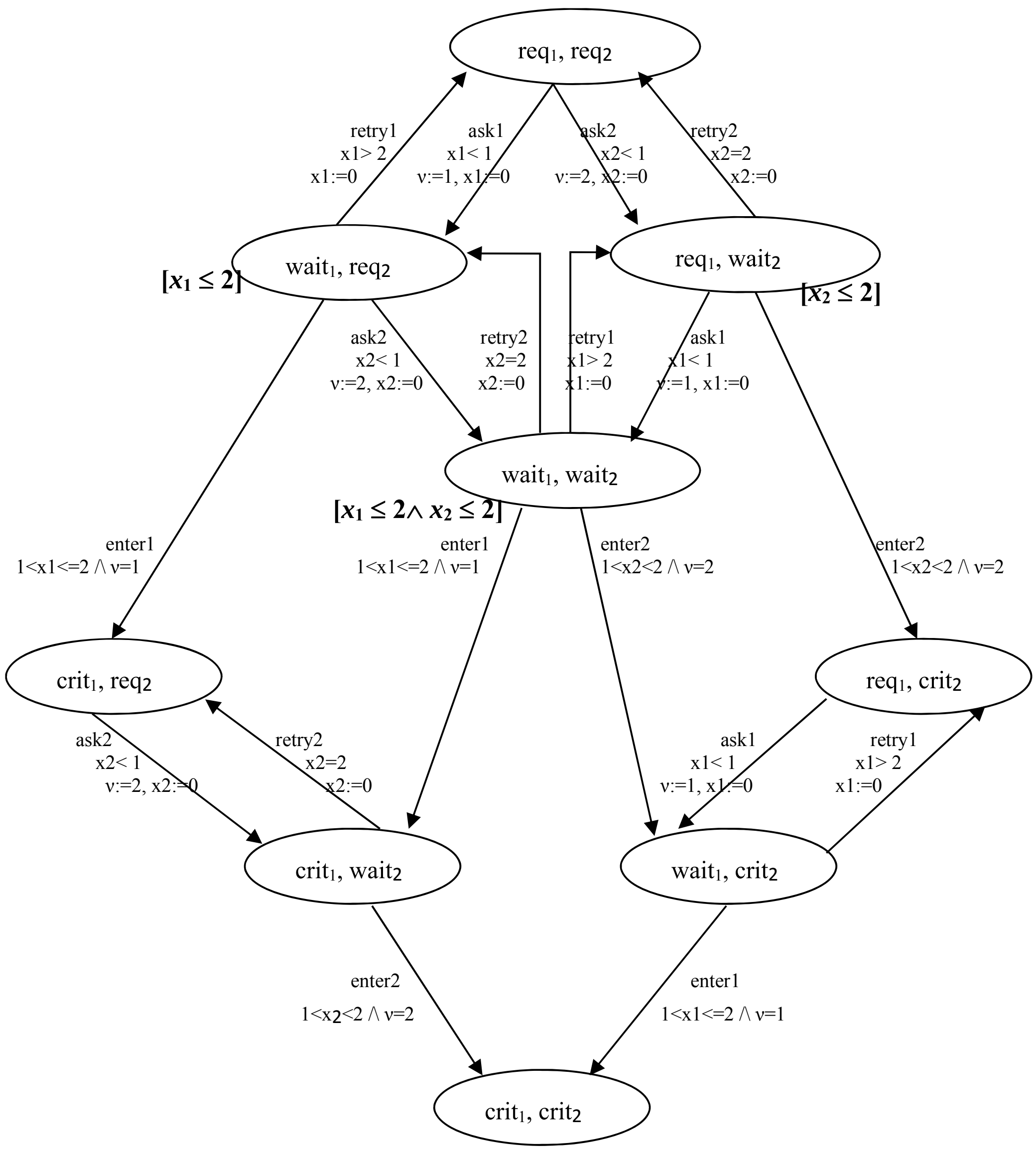
ii. $EG\ EF\ C_0$

iii. $EF^{<=25}\ C_0 \wedge EG\ (C_0 \rightarrow E\ (\neg C_0\ U^{=25}\ C_0))$

iv. $AG\ (C_0 \rightarrow AF^{<=8}\ C_1) \wedge AG\ (C_1 \rightarrow AF^{<=8}\ C_0)$

<u>Άσκηση 4</u>

(α)



(β) $\left((\mathrm{req}_1, \mathrm{req}_2), 0{,}0{,}1\right) \xrightarrow{\mathrm{ask}_1} \left((\mathrm{wait}_1, \mathrm{req}_2), 0{,}0{,}1\right) \xrightarrow{\mathrm{ask}_2} \left((\mathrm{wait}_1, \mathrm{wait}_2), 0{,}0{,}2\right)$
$\xrightarrow{1.5} ((\mathrm{wait}_1, \mathrm{wait}_2), 1.5{,}1.5{,}2) \xrightarrow{\mathrm{enter}_2} ((\mathrm{wait}_1, \mathrm{wait}_2), 1.5{,}1.5{,}2) \xrightarrow{0.5} ((\mathrm{wait}_1, \mathrm{wait}_2), 2{,}2{,}2)$

Στην πιο πάνω εκτέλεση η κάθε τετράδα περιέχει τις πληροφορίες (κατάσταση, x_1, x_2, v). Η εκτέλεση οδηγεί σε χρονικό αδιέξοδο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το αυτόματο A_1 δεν μπορεί να προχωρήσει αφού το ρολόι x_1 είναι στο 2, η μεταβλητή v = 2 και η μετάβαση enter_2 μπορεί να εκτελεστεί μόνο όταν v=1 ενώ η μετάβαση $retry_1$ μπορεί να εκτελεστεί μόνο αν $x_1 > 2$. Υπάρχουν και άλλες εκτελέσεις που οδηγούν σε αδιέξοδο όπως, για παράδειγμα, αυτές που το ρολόι x_1 ξεπερνά το 1 χωρίς να έχει προχωρήσει το αυτόματο στην κατάσταση $wait_1$. Επίσης υπάρχουν αντίστοιχα συμμετρικά αδιέξοδα για το αυτόματο A_2.

(γ) Η κατάσταση αυτή είναι προσεγγίσιμη. Μια εκτέλεση της παράλληλης σύνθεσης που οδηγεί σε αυτή την κατάσταση είναι η ακόλουθη:

$$\big((\mathrm{req}_1, \mathrm{req}_2), 0,0,0\big) \xrightarrow{\mathrm{ask}_2} \big((\mathrm{wait}_1, \mathrm{req}_2), 0,0,2\big) \xrightarrow{\mathrm{ask}_1} \big((\mathrm{wait}_1, \mathrm{wait}_2), 0,0,1\big)$$

$$\xrightarrow{2} ((\mathrm{wait}_1, \mathrm{wait}_2), 2,2,1) \xrightarrow{\mathrm{enter}_1} ((\mathrm{crit}_1, \mathrm{wait}_2), 2,2,1) \xrightarrow{\mathrm{retry}_2} ((\mathrm{crit}_1, \mathrm{req}_2), 2,0,1)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{ask}_2} ((\mathrm{crit}_1, \mathrm{wait}_2), 2,0,2) \xrightarrow{1.5} ((\mathrm{crit}_1, \mathrm{wait}_2), 3.5,1.5,2) \xrightarrow{\mathrm{enter}_2} ((\mathrm{crit}_1, \mathrm{crit}_2), 3.5,1.5,2)$$